DOI: 10.31319/2519-8106.2(39)2018.154206
УДК 536.2
Ю.М. Пишнограєв, к.ф.-м.н., доцент,pyshnograevyuri@gmail.com
Г.І. Штанько, старший викладач, anna.shtanko177@ gmail.com
Запорізька державна інженерна академія, м. Запоріжжя

ДВОВИМІРНА СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА З КОНВЕКТИВНОЮ СКЛАДОВОЮ ДЛЯ ДВОШАРОВОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ОБЛАСТІ

Розглядається задача, що складається з рівняння в частинних похідних другого порядку з розривними коефіцієнтами і граничних умов, що визначають поведінку невідомої функції на зовнішніх межах і на межі розділу шарів. Дана задача зводиться за допомогою відповідних підстановок до двох самостійних підзадач. Одна з них є класичною задачею Штурма-Ліувілля. Розв'язання другої підзадачі залежить від вибору проміжку, у якому розташовані власні значення задачі. Визначається вигляд власних функцій, наводяться рівняння для знаходження власних значень. Загальним розв'язком задачі є повна система попарно ортогональних функцій.
***Ключові слова**: спектральна задача, власна функція, власне значення.*

The problem, which consists of equation in finite derivatives of order two with discontinuous coefficients and boundary conditions that designate the behavior of unknown function and on boundary between layers, is handled. The problem is reduced by means of appropriate substitution to two independent subproblems. One of them is the classical Sturm-Liouville problem. The solvingof thesecond subproblem depends on the choice of interval, which the eigenvalue of the problembelong to. The formula for eigenfunction is obtained, equations for eigenvalue finding are provided. General solution of the problem is the complete system of pairwise orthogonal functions.
***Key words**: spectral problem, eigenfunctions, eigenvalue.*

Постановка проблеми

Серед аналітичних методів, що використовуються при розв'язанні задач дифузійного типу, достатньо сильним є метод скінчених інтегральних перетворень. Універсальність цього методу дозволяє знаходити розв'язки широкого кола задач тепломасопереносу.

Успішність методу скінчених інтегральних перетворень залежить від можливості розв'язання відповідної спектральної задачі, до якої зводяться вихідні рівняння в частинних похідних та граничні умови. При цьому складність отримання розв'язку спектральної задачі напряму пов'язана з геометрією та структурою тіла, що розглядається.

В інженерній практиці великий інтерес викликає вивчення процесів, що відбуваються у багатошарових конструкціях, геометрія яких моделюється двовимірною областю. Зважаючи на це розгляд відповідної спектральної задачі та побудова алгоритму її розв'язку є актуальним науковим дослідженням, результати якого дозволять отримувати розв'язки важливих інженерних задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Одним з ключових етапів використання методу скінчених інтегральних перетворень є розв'язання відповідної спектральної задачі. Процес знаходження її розв'язку дозволяє побудувати повну систему власних функцій, які в подальшому використовуються у якості ядер скінчених інтегральних перетворень. Для задач, що описують дифузійні процеси у одношарових областях, вигляд ядер інтегральних перетворень є добре вивченим [1]. У задачах для багатошарових областей [2] знаходження ядер пов'язано з труднощами побудови повної системи власних функцій [3]. Ще більш складним виявляється процес розв'язання спектральної задачі, якщо врахувати конвективну складову. У роботі [4] наводиться розв'язання такої задачі для одновимірної двошарової області. Результати цієї роботи використані для розв'язання задачі конвективного теплообміну у двошаровій області.

Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є розв'язання двовимірної спектральної задачі з конвективною складовою для двошарової області, а саме вивчення особливостей побудови ортогональної системи функцій і відповідного набору власних значень.

Виклад основного матеріалу

Задана прямокутна область, що складається з двох шарів (рис. 1). Сталі a, λ і w приймають на першому шарі ($-l_1 < x < 0;\ 0 < y < h$) значення a_1, λ_1, w_1, а на другому шарі ($0 < x < l_2;\ 0 < y < h$) значення a_2, λ_2, w_2.

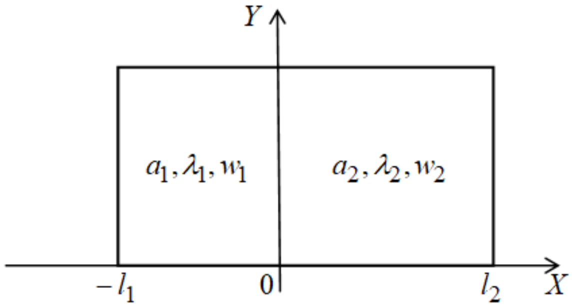

Рис. 1. Прямокутна двошарова область

Необхідно визначити функцію $\Phi(x,y)$ з рівняння в частинних похідних

$$a\left(\Phi_{xx}(x,y)+\Phi_{yy}(x,y)\right)+w\Phi_x(x,y)+\beta^2\Phi(x,y)=0\,, \tag{1}$$

де β^2 — квадрат власних чисел спектральної задачі.

На зовнішніх межах прямокутної області і на спільній межі задані граничні умови

$$\begin{cases} \Phi(-l_1,y)=0,\\ \Phi(l_2,y)=0,\\ \Phi(x,0)=0,\\ \Phi(x,h)=0,\\ \Phi(-0,y)=\Phi(+0,y),\\ \lambda_1\Phi_x(-0,y)=\lambda_2\Phi_x(+0,y). \end{cases} \tag{2}$$

Представимо функцію $\Phi(x,y)$ у вигляді добутку $\Phi(x,y)=\varphi(x)\theta(y)$ і підставимо в рівняння (1). Отримаємо

$$a\left(\varphi''(x)\theta(y)+\varphi(x)\theta''(y)\right)+w\varphi'(x)\theta(y)+\beta^2\varphi(x)\theta(y)=0\,. \tag{3}$$

Після ділення обох частин рівняння (3) на $a\varphi(x)\theta(y)$ та перенесення виразу, що містить змінну y, у праву частину, маємо

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}+\frac{w}{a}\cdot\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}+\frac{\beta^2}{a}=-\frac{\theta''(y)}{\theta(y)}\,. \tag{4}$$

Рівність лівої і правої частин виразу (4) можлива лише у випадку, коли обидві частини (4) дорівнюють певній сталій η^2. В результаті, з урахуванням граничних умов (2), приходимо до двох підзадач. Перша з них, відносно змінної y, складається з рівняння

$$\theta''(y)+\eta^2\theta(y)=0 \tag{5}$$

і граничних умов

$$\theta(0)=0, \theta(h)=0 . \tag{6}$$

Задача (5), (6) є класичною задачею Штурма-Ліувілля і її розв'язок добре відомий

$$\theta(y)=\sin(\eta_k y), \tag{7}$$

де $\eta_k=\dfrac{k\pi}{h}, k\in Z$, і квадрат норми $\|\theta\|^2=\dfrac{h}{2}$.

Друга підзадача відносно змінної x має вигляд

$$a\varphi''(x)+w\varphi'(x)+\left(\beta^2-a\eta_k^2\right)\varphi(x)=0 , \tag{8}$$

$$\begin{cases} \varphi(-l_1)=0, \\ \varphi(l_2)=0, \\ \varphi(-0)=\varphi(+0), \\ \lambda_1\varphi'(-0)=\lambda_2\varphi'(+0). \end{cases} \tag{9}$$

Для розв'язання рівняння (8) з умовами (9)робимо заміну

$$\varphi(x)=\psi(x)e^{-\mu x} , \tag{10}$$

$$\mu=\begin{cases} \mu_1=\dfrac{w_1}{2a_1}, x\in[-l_1;0), \\ \mu_2=\dfrac{w_2}{2a_2}, x\in[0;l_2]. \end{cases} \tag{11}$$

В результаті приходимо до спектральної задачі. Вона складається з рівняння

$$a\psi''(x)+\left(\beta^2-a\mu^2-a{\eta_k}^2\right)\psi(x)=0 \tag{12}$$

і граничних умов

$$\begin{cases} \psi(-l_1)=0, \\ \psi(l_2)=0, \\ \psi(-0)=\psi(+0), \\ \lambda_1\left(\psi'(-0)-\mu_1\psi(-0)\right)=\lambda_2\left(\psi'(+0)-\mu_2\psi(+0)\right) \end{cases} \tag{13}$$

Для розв'язання задачі (12), (13) необхідно розглянути три випадки. Припустимо, що $a_1\left({\mu_1}^2+{\eta_k}^2\right)<a_2\left({\mu_2}^2+{\eta_k}^2\right)$.

Якщо $\beta\in\left(0;\sqrt{a_1\left({\mu_1}^2+{\eta_k}^2\right)}\right)$, то всі його значення слід визначати з трансцендентного рівняння

$$(\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_2)sh(q_1l_1)sh(q_2l_2)-\lambda_1q_1ch(q_1l_1)sh(q_2l_2)-\lambda_2q_2sh(q_1l_1)ch(q_2l_2)=0 ,$$

де $$q_1=\sqrt{\mu_1^2+{\eta_k}^2-\frac{\beta^2}{a_1}} ,\ q_2=\sqrt{\mu_2^2+{\eta_k}^2-\frac{\beta^2}{a_2}} .$$

Власним значенням відповідають власні функції

$$\psi_1(x)=A_1ch(q_1x)+B_1sh(q_1x),\ \psi_2(x)=A_2ch(q_2x)+B_2sh(q_2x), \tag{14}$$

де
$$A_1=A_2=sh(q_1l_1),\ B_1=ch(q_1l_1),\ B_2=\frac{sh(q_1l_1)(\lambda_2\mu_2-\lambda_1\mu_1)+\lambda_1q_1ch(q_1l_1)}{\lambda_2q_2}.$$

У випадку, коли $\beta\in\left(\sqrt{a_1\left(\mu_1{}^2+\eta_k{}^2\right)};\sqrt{a_2\left(\mu_2{}^2+\eta_k{}^2\right)}\right)$, власні значення β знаходимо з трансцендентного рівняння

$$(\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_2)\sin(q_1l_1)sh(q_2l_2)-\lambda_1q_1\cos(q_1l_1)sh(q_2l_2)-\lambda_2q_2\sin(q_1l_1)ch(q_2l_2)=0,$$

де
$$q_1=\sqrt{\frac{\beta^2}{a_1}-\mu_1^2-\eta_k{}^2},\ q_2=\sqrt{\mu_2^2+\eta_k{}^2-\frac{\beta^2}{a_2}}.$$

При цьому власні функції мають вигляд

$$\psi_1(x)=A_1\cos(q_1x)+B_1\sin(q_1x),\ \psi_2(x)=A_2ch(q_2x)+B_2sh(q_2x), \tag{15}$$

де
$$A_1=A_2=\sin(q_1l_1),\ B_1=\cos(q_1l_1),\ B_2=\frac{\sin(q_1l_1)(\lambda_2\mu_2-\lambda_1\mu_1)+\lambda_1q_1\cos(q_1l_1)}{\lambda_2q_2}.$$

Якщо власне значення $\beta\in\left(\sqrt{a_2\left(\mu_2{}^2+\eta_k{}^2\right)};+\infty\right)$, то трансцендентне рівняння визначається наступним чином

$$(\lambda_1\mu_1-\lambda_2\mu_2)\sin(q_1l_1)\sin(q_2l_2)-\lambda_1q_1\cos(q_1l_1)\sin(q_2l_2)-\lambda_2q_2\sin(q_1l_1)\cos(q_2l_2)=0,$$

де
$$q_1=\sqrt{\frac{\beta^2}{a_1}-\mu_1^2-\eta_k{}^2},\ q_2=\sqrt{\frac{\beta^2}{a_2}-\mu_2^2-\eta_k{}^2}.$$

Тоді власні функції мають вигляд

$$\psi_1(x)=A_1\cos(q_1x)+B_1\sin(q_1x),\ \psi_2(x)=A_2\cos(q_2x)+B_2\sin(q_2x), \tag{16}$$

де
$$A_1=A_2=\sin(q_1l_1),\ B_1=\cos(q_1l_1), B_2=\frac{-\lambda_1\mu_1\sin(q_1l_1)+\lambda_2\mu_2\sin(q_1l_1)+\lambda_1q_1\cos(q_1l_1)}{\lambda_2q_2}.$$

Отже, спектральна задача (1)-(2) розв'язана. Її розв'язком є функції

$$\Phi(x,y)=e^{-\mu x}\psi(x)\theta(y), \tag{17}$$

де $\theta(y)$ визначаються виразом (7), а $\psi(x)$ виразами (14)—(16).

Слід відмітити, що функції $\Phi(x,y)$ ортогональні з вагою $\frac{\lambda}{a}$, тобто

$$\int_{-l_1}^{l_2}\int_0^h\frac{\lambda}{a}\Phi_n(x,y)\Phi_m(x,y)dxdy=\begin{cases}0, & n\neq m,\\ \|\Phi_n\|^2, & n=m,\end{cases}$$

де $\|\Phi_n\|^2$ — квадрат норми.

Висновки та перспективи подальших досліджень

При побудові розв'язку спектральної задачі головна особливість полягає в необхідності розгляду трьох проміжків розташування власних значень. Це пов'язано з наявністю конвективної складової, а також з тим, що область, яку розглядаємо, є двовимірною та двошаровою. Знайдені власні функції можна в подальшому використовувати у якості ядер інтегральних перетворень для повного розв'язання відповідних задач тепломасопереносу. Аналіз проведених викладок показує, що перспективними є напрямки, пов'язані з розв'язанням спектральних задач для тривимірних областей, і областей з кількістю шарів, більшою ніж два.

Список використаної літератури

1. Карташев Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности / Э.М. Карташев. – М.: Высш. шк., 1985. – 480 с.
2. Плятт Ш.Н. Расчеты температурных полей бетонных гидросооружений / Ш.Н.Плятт. – М.: Энергия, 1974. – 407 с.
3. Пышнограев Ю.Н. Задача о распространении тепла в ортотропной двуслойной пластине при нагреве точечными источниками тепла / Ю.Н. Пышнограев, // Труды I ВК «Технологические проблемы прочности несущих конструкций» Т.1, Ч.2, Запорожье, 1991.
4. Пышнограев Ю.Н. Построение системы собственных функций для уравнения конвективной диффузии с кусочно-постоянными коэффициентами / Ю.Н. Пышнограев, Е.Ю. Пышнограев // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2012. – т. 9, № 1. – С. 7–12.
5. Пышнограев Ю.Н. Аналитическое решение задачи конвективного теплообмена в двуслойных средах / Ю.Н. Пышнограев, А.И. Штанько, Е.Ю. Пышнограев // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. № 2, 2017.С. 236–242.

TWO-DIMENSIONAL SPECTRAL PROBLEM WITH A CONVECTIVE COMPONENT FOR A TWO-LAYER RECTANGULAR AREA

Pyshnograev Y.N., Shtanko A.I.

Abstract

Among the analytical methods used in solving problems of diffusion type, the method of finite integral transformations is quite powerful. The catolicityof this method allows to find solutions to a wide range of heat and mass transfer problems. The success of the method of finite integral transformations depends on the possibility of solving the corresponding spectral problem, to which the initial equations in partial derivatives and boundary conditions are reduced. In this connection, the complexity of obtaining a solution ofa spectral problem is directly related to the geometry and structure of the body in question. In engineering practice, the study of the processes occurring in multilayer structures, whose geometry is modeled by a two-dimensional region, is of great interest. For this reason, consideration of the corresponding spectral problem and the construction of an algorithm for its solution is an relevant scientific study, the results of which will make it possible to obtain solutions of important engineering problems.

One of the key stages of the application of the method of finite integral transformations is the solution of the corresponding spectral problem. The process of its solution enables to build a complete system of eigenfunctions, which are further used as kernels of finite integral transformations. This makes it possible to obtain analytical solutions for a large number of heat and mass transfer problems using standard algorithms. In this context, the purpose of the study is to solve a two-dimensional spectral problem with a convective component for a two-dimensionaldomain, expressly to study the constructing peculiarities of orthogonal system of functions and the corresponding set of eigenvalues.

The undertaken studies have shown that in the construction of a solution to a spectral problem, the main feature is the need to consider three intervals of the eigenvalues location. This is due to the presence of the convective component, as well as the fact that the domain under consideration is two-dimensional and two-layer. The discovered eigenfunctions can be further used as kernels of integral transformations for the complete solution of the corresponding heat and mass transfer problems. The analysis of the performed computationsshows that promising are the directions connected with the solution of spectral problems for three-dimensional regions and domains with more than two layers.

References

[1] Kartashov E.M. *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moskow, 1985. 480 p.

[2] Plyatt S.N. *Raschety temperaturnykh poley betonnykh gidrosooruzheniy* [Calculations of temperature fields of concrete hydro structures]. Moskow, 1974. 407 p.

[3] Pyshnograev Y.N. The problem of the propagation of heat in an orthotropic two-layer plate when heated by point sources of heat. *Trudy 1 VK "Tekhnologicheskie problemy prochnosti nesushchikh konstruktsii" Zaporozh'e*,1991, vol.1, ch.1, pp. 155–160 (in Russian).

[4] Pyshnograev Y.N., Pyshnograev E.Y. Construction of a system of eigenfunctions for the convective diffusion equation with piecewise constant coefficients. *Zbirnyk prats In-tu matematyki NAN Ukrainy*, 2012, vol. 9, no.1, pp. 7–12 (in Russian).

[5] Pyshnograev Y.N., Shtanko A.I., Pyshnograev E.Y. Analytical solution of the problem of convective heat exchange in two-layer medium. *Visnik Zaporiz'kogo natsional'nogo universitetu. Fiziko-matematichni nauki*, 2017, no. 2, pp. 236–242(in Russian).