Судук Н.В.

Постановка і дослідження багатоетапної транспортно-виробничої задачі

У статті сформульована постановка багатоетапної транспортно-виробничої задачі для вирішення задач планування і управління матеріальними потоками.

In the article is formulated multi-staged transportation and production problem for solution planning and management of material flows.

Ключові слова: *багатоетапна транспортно-виробнича задача, матеріальні потоки, багаторівнева інтегрована система.*

Вступ. Одне із центральних місць в управлінні підприємствами займають задачі планування і управління матеріально-транспортними потоками. Будучи досить важливими і, в той же час, одними із найбільш складних для розв'язку, транспортно-виробничі задачі здатні забезпечити високий економічний ефект, виявити "вузькі" місця і стан виробничої інфраструктури, а також перспективи її розвитку.

Управління матеріальними потоками у виробничих системах розглядається у працях низки вчених: А.Г. Бутрін, А.М. Гаджинський, Н.Г. Журбенко, Є.О. Салмінєн, А.А. Борозна, В.Н. Родіонова, Н.В. Федоркова, Р.А. Файзарахманов. Проте дана проблема не є вирішеною, оскільки модернізація виробництва і використання сучасних технологій на промислових підприємствах вимагає розробки нових математичних моделей, а розвиток обчислювальної техніки і програмного забезпечення сприяє їх реалізації. Тому розробка наукових основ формалізації і управління матеріальними потоками є досить актуальною проблемою.

Постановка завдання. Метою даної статті є формулювання та дослідження багатоетапної транспортно-виробничої задачі для ефективного управління матеріальними потоками у багаторівневих інтегрованих системах (БІС).

Результати. Сформулюємо основну математичну задачу. Для цього введемо необхідні позначення. Нехай $p \in P$ – множина територіально

Судук Н.В., аспірант, Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника

розподілених виробничих підприємств. Кожне виробниче підприємство цієї множини може організувати роботу у відповідності з виробничим завданням БІС, використовуючи наявні внутрішні ресурси множини M_p. Будемо вважати, що множини M_p не перетинаються і визначимо $M = \cup_{p\in P} M_p$.

Позначимо $N_p \subset N$ – підмножина технологічних операцій (технологій), виконаних виробничим підприємством з індексом $p \in P$, їх об'єднання позначимо $N = \cup_{p\in P} N_p$. Множини N_p також будемо вважати такими, що не перетинаються для різних $p \in P$. Оскільки вирішення виробничої задачі може бути пов'язане з використанням різних технологій, введемо основні керовані фактори – інтенсивність використання відповідних технологій, яким позначимо змінні x_l $(j \in N)$. Будемо вважати ці змінні обмеженні зверху невід'ємними величинами d_j, а їх сукупність, в силу ряду внутрішніх виробничих умов, які знаходяться в деякій множині Ω_p. Витрати, пов'язані з використанням технологій, відображає функціонал $F_p(x\lfloor N_p \rfloor)$: $\Omega_p \to R^1$.

Крім власних ресурсів, виробнича програма різних підприємств $p \in P$ може бути пов'язана з виробництвом множини S зовнішніх, існуючих з точки зору задачі планування БІС в цілому, ресурсів технологічної системи. Припускають, що кожний ресурс $s \in S$ пов'язаний, тією чи іншою мірою, з двома виробничими підприємствами.

Інтенсивність технологій виробництва $p \in P$ визначають об'єми використання і споживання цих ресурсів: $w_p[S] = (w_p^1, w_p^2, ..., w_p^{|S|})$, що відображає оператор: $G_p(x\lfloor N_p \rfloor)$: $\Omega_p \to R^{|S|}$, тобто $w_p[S] = G_p(x\lfloor N_p \rfloor)$. Відзначимо, що $w_p[S] \geq 0$ – для пункту виробництва p продукту s, $w_p[S] \leq 0$ – для пункту споживання p продукту s, $w_p[S] = 0$ – якщо виробництво p не пов'язане з споживанням або виробництвом продукту s.

Будемо вважати сумарне використання ресурсів кожного виду, обмеженими зверху і знизу значеннями $H_s \geq h_s$ $(s \in S)$. Значення H_s і h_s можуть бути близькими або рівними нулю для $s \in S$ – виробничої переробки, додатними, якщо s – індекс виробленої продукції і від'ємними у випадку s – деякого зовнішнього (ввізного) використовуваного ресурсу.

У зв’язку з просторовим розподілом, потоки матеріальних ресурсів є транспортними потоками y^s_{pq} $(p, q \in P, s \in S)$. Ці потоки є невід’ємними, витрати пов’язані з транспортуванням ресурсів будемо вважати лінійними і пропорційними значенням σ^s_{pq}, при $p, q \in P, s \in S$.

Об’єднавши транспортні потоки і використання (споживання) ресурсів рівняннями балансу, отримаємо наступну математичну модель:

- допустимість інтенсивності технологій:

$$x\lfloor N_p \rfloor \in \Omega_p,\ p \in P \tag{1}$$

- зв’язок обсягів споживання (використання) ресурсів з інтенсивністю технологій:

$$w_p[S] = G_p\left(x\lfloor N_p \rfloor\right),\ p \in P \tag{2}$$

- збалансованість сумарного використання ресурсів:

$$h_s \le \sum_{p \in P} w^s_p \le H_s,\ s \in S \tag{3}$$

- збалансування транспортних потоків виробництв:

$$\sum_{q \in P} \left(y^s_{qp} - y^s_{pq}\right) = w^s_p,\ p \in P, s \in S \tag{4}$$

- обмеженість інтенсивності технологій:

$$0 \le x_j \le d_j,\ j \in N \tag{5}$$

- невід’ємність транспортних потоків:

$$y^s_{pq} \ge 0,\ p, q \in P, s \in S \tag{6}$$

Цільова функція:

$$\sum_{p \in P} F_p\left(x\lfloor N_p \rfloor\right) + \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} \sum_{q \in P} \sigma^s_{pq} y^s_{pq} \to \min, \tag{7}$$

Дана функція відображає мінімальні транспортно-виробничі витрати, необхідні для виконання виробничого плану.

Дана задача (1-7) – це багатоетапна транспортно-виробнича задача (БТВЗ), яка виступає в якості об’єднуючої моделі, ціль якої є узгодження планів роботи підприємств, забезпечення ефективної роботи БІС в цілому по заданих критеріях. Отримана модель відповідає системі управління виробничим процесом верхнього рівня, ціль якого – узгодження агрегованих показників роботи підприємств БІС з загальним критерієм ефективності виробничо-економічного характеру.

Обмеження (1) і (5) відображають внутрішні ресурси виробництва (виробничі блоки БТВЗ); (3), (4), і (6) – міжвиробничі продуктові зв’язки (транспортні блоки БТВЗ), (2) і (7) – об’єднують перелічені блоки між собою.

Рівняння (4) у випадку фіксованих значень $x\lfloor N_p \rfloor$ $(p \in P)$при умові (2) представляють собою обмеженість транспортної задачі відносно w_p^s, $(p \in P, s \in S)$. Виходячи із розумного припущення про невід’ємність $\sigma_{pq}^s \geq 0, (p, q \in P, s \in S)$, частина змінних цієї задачі рівна нулю.

Нерівності (5) не включені в визначену множину Ω^p, оскільки вони є спеціальними умовами в випадку лінійної моделі і не входять в склад її матриці обмежень. Однак для зручності спільного дослідження всіх обмежень доцільно ввести множину, об’єднавши умови (1) та (5):

$$\Omega_p' = \Omega_p \cup \left\{ x\left[N_p\right] 0 \leq x_j \leq d_j \right\}, p \in P$$

Лінійна багатоетапна транспортно-виробнича задача, умови якої відрізняються конкретизацією обмежень (1), (2) і функціоналу (7) представлена наступним чином. В лінійному випадку кожна технологія $j \in N_p$, $p \in P$ характеризується внутрішньою продуктивною структурою – вектор-стовпців $A_j\lfloor M_p \rfloor$ і зовнішньою продуктивною структурою – вектор-стовпців $B_j[S]$ споживання (або використання, в залежності від знаку) зовнішніх продуктів S. Функціонал $F_p(x\lfloor N_p \rfloor)$ є лінійною функцією відносно $x_j(j \in N_p)$ з деякими коефіцієнтами вектора $c[N]$ коефіцієнтів $(c_j)_{j \in N}$.

Будемо вважати, що стовпці $A_j\lfloor M_p \rfloor (j \in N_p)$ відображають матриці $A\lfloor M_p, N_p \rfloor$, а стовпці $B_j[Q]$ $(j \in N)$ – матриці $B[Q, N]$. Вектор $c[N]$складається з коефіцієнтів $c_j(j \in N)$.

Тепер багатогранник Ω_p для $p \in P$ можна описати в рамках лінійних обмежень:

$$\Omega_p = \left\{ x\left[N_p\right] \sum_{j \in N_p} A_{ij} x_j \bullet \beta_i, i \in M_p \right\},$$

де $\bullet$ – один із знаків довільного замкнутого відношення =, $\geq$, або $\leq$. У випадку лінійних умов задачі БТВЗ, відношення (1), (2) і (7) запишуться іншим чином:

$$\sum_{j \in N_p} A_{ij} x_j \bullet \beta_i, i \in M_p \qquad (1')$$

$$w_p^s = \sum_{j \in N_p} B_{sj} x_j, s \in S \quad (2')$$

$$\sum_{p \in P} \sum_{j \in N_p} c_j x_j + \sum_{s \in S} \sum_{p \in P} \sum_{q \in P} \sigma_{pq}^s y_{pq}^s \to \min. \quad (7')$$

Багатоетапна транспортно-виробнича задача включає групу задач розподілу ресурсів, визначених відношеннями (1) (або (1') в лінійному випадку) і пов'язаних між собою безпосередньо рівняннями балансів (3-4) в транспортній задачі і продуктивних відношень (2) (або (2') у лінійному випадку). Весь блок задач об'єднує спільний функціонал (7) або (7').

Умови (3) і (4) представляють собою рівняння балансу транспортної задачі в матричній постановці для повної транспортної графи, матриця суміжності якої складається із одиниць. На практиці інколи можливо скоротити кількість одиниць матриці суміжності транспортної графи переходячи до сіткової транспортної задачі, яка не тільки має меншу розмірність, але і зручніше інтерпретувати як на рівні формування вихідних даних, так і розшифровки результатів обчислень. Цей варіант БТВЗ назвемо сітковим. Для його постановки введемо G_s=< P, E_s > – транспортна графа продукту $s \in S$, вершини якої відповідають виробництвам БІС, а дуги – магістралям транспортування ресурсів підприємства.

Визначимо $\sigma_u \geq 0$ – витрати транспортування по дузі $u \in E_s$, $y_u^s \geq 0$ – величина потоку. Тоді сумарні витрати на транспортування продукту $s \in S$ складають $\sum_{u \in E_s} \sigma_u y_u^s$. Для складання рівнянь балансу сіткової транспортної задачі (ТЗ) визначимо Γ_{sp}^+ – множина дуг, які входять до вершини $p \in P$, множина Γ_{sp}^- – сукупність дуг, які виходять з p. Тепер рівняння балансу (замість (4)) набуде вигляду:

$$\sum_{u \in \Gamma_{sp}^+} y_u^s - \sum_{u \in \Gamma_{sp}^-} y_u^s = w_p^s. \quad (4'')$$

Визначимо цільову функцію сіткової БТВЗ:

$$\sum_{p \in P} \sum_{j \in N_p} c_j x_j + \sum_{s \in S} \sum_{u \in E_s} \sigma_u y_u^s \to \min. \quad (7'')$$

Складність алгоритму вирішення принципово не залежить від вибору виду сіткових чи матричних допоміжних транспортних задач. Дослідження цих задач на практиці призводить до складної математичної задачі з тисячами змінних і обмежень, тому вирішити задачі БТВЗ безпосереднім використанням класичних методів вирішення оптимізаційних задач досить складно, необхідно засвоїти і сформулювати спеціальні підходи для вирішення цієї задачі.

Дослідження БТВЗ починається з встановлення вимог існування оптимального розв’язку цієї задачі (як для лінійного, так і для загального випадку). Далі досліджується більш простий лінійний варіант цієї задачі. Оскільки лінійна БТВЗ є явно вираженою багаторівневою і варіативною блочною структурою, на наступному етапі проводиться її дослідження і засвоєння використання методів декомпозиції. Серед можливих способів розкладу матриці обмежень на блоки вибирається найбільш підходящий і для нього можливе використання метода Данціга-Вулфа [7, 8].

Основна складність на цьому етапі є в розкладі вихідної задачі таким чином, щоб отримані часткові задачі по можливості зберігали свою вихідну структуру і склад. Це виявляється можливим – блочні задачі повністю відповідають задачам виробничого планування підсистеми, а “центральна” хоча і втрачає свої властивості транспортної, але залишається близькою до неї (група транспортних задач з додатковим стовпцем параметричного характеру).

Наступний крок дослідження БТВЗ – виведення оцінки точності розв’язку при виконанні схеми двоїстої декомпозиції. Отримані оцінки дозволяють сформулювати критерій закінчення вирішення задачі після досягнення визначеної точності розв’язку (в абсолютному і відносному значенні) і отримати оцінку такого розв’язку, при розрахунку якого “центральна” задача суттєво спрощується.

Алгоритм пошуку субоптимального розв’язку уже не потребує параметричної задачі, яка поєднує групу транспортних. Це дозволяє не тільки ще більше зменшити складність вирішення задачі, але й спростити алгоритм приблизного розв’язку.

Використання отриманого в кінцевому результаті методу для розв’язання багатоетапної транспортно-виробничої задачі свідчить про можливість використання і достатньо високу ефективність запропонованого методу.

Висновки. Головний результат даної статті – формалізація і дослідження БТВЗ. Отже, сформульовані загальна математична модель БТВЗ і її варіанти відповідають системі управління виробничим процесом і сприяють узгодженню агрегованих показників роботи підприємства БІС з загальним критерієм ефективності виробничо-економічного характеру. При вирішені БТВЗ доцільно застосовувати метод, який базується на основі блочної структури зв'язків між обмеженнями з використанням схем двоїстої декомпозиції.

Література

5. Бакаев А. А., Гриценко В. И., Бажан Л. И., Попченко В. И. Экономико-математическое моделирование развития транспортных систем. Киев: Наукова думка, 1991. 151 с.
6. Бутрин А. Г. Управление материальными, финансовыми и информационными потоками на промышленном предприятии. Челябинск: Изд-во ЮУрГУ, 1999. 108 с.
7. Воронин А. В. О новом классе транспортно-производственных задач // Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 10, вып. 1. М.: Изд-во "ОПиПМ", 2003. С. 123–125.
8. Воронин А. В. Многоетапные транспортно-производственные задачи // Обозрение прикладной и промышленной математики, т. 10, вып. 3. М.: Изд-во "ОПиПМ", 2003. С. 623–625.
9. Вулис В. И., Шерман Ю. С. Метод декомпозиции для решения больших задач транспортного типа // Экономика и мат. методы. XXI. Вып. 2. М., 1985. С. 304–314.
10. Файзарахманов Р. А. Моделирование и управление материальными потоками производственной системы с учетом факторов неопределенности и риска. Пермь: Изд-во ПермГу, 2002. 180 с.
11. Dantzig G. B., Van Slyke R. M. Generalized Upper Bounding Techniques // Journal Computer and System Science, v. 1, 1967, pp. 213–226.
12. Dantzig G. B., Wolfe P. The Decompozition Principle for Linear Programming // Operations Research, v. 8, 1960, pp. 101–111.
13. Miller D. L., Pekny J. F., Tompson S. L. Solution of large dense transportation problems using a parallel primal algorithm // Oper. Res. Lett. v. 9, № 5, 1990. pp. 319–324.