

Моделювання взаємозв'язку нерівномірності розподілу доходів населення з життєвим рівнем та рівнем бідності

Досліджено нерівномірність розподілу доходів населення на основі аналізу кривої Лоренца всередині сукупності, та при порівнянні різних сукупностей домогосподарств (населення), а також визначено їх життєвий рівень та рівень бідності.

The inequality distribution of income investigated in the aggregate, and when comparing different sets of households (population), based on an analysis of the Lorenz curve, and defined their standard of living and poverty.

Ключові слова: *нерівномірність розподілу доходів, крива Лоренца, життєвий рівень, рівень бідності, коефіцієнт Джині.*

Вступ. Розрахунок значущих індикаторів нерівності пов'язаний із законом розподілу населення за середньодушовими доходами чи витратами. До таких, зокрема, відносяться різноманітні статистичні показники рівня та глибини економічної нерівності – коефіцієнти Джині, Аткінсона, Тейла, децильний коефіцієнт диференціації, децильний коефіцієнт фондів, крива Лоренца тощо.

Постановка завдання. Проблема дослідження нерівності розподілу населення за доходами присвячено багато вітчизняних [2,5,7] та зарубіжних робіт [1,3,4,6,8], в яких вони, як правило, розглядаються в контексті перелічених вище статистичних показників, основою для визначення яких є статистичний ряд розподілу населення за доходами. Проте аналіз наукових праць засвідчує певну недосконалість використовуваних на сьогодні офіційними статистичними службами способів оцінювання даних показників, так само, як і неефективність (в специфічних умовах полімодального устрою сучасної української економіки) моделей, базованих на застосуванні логнормального закону розподілу доходів населення.

Метою даної статті є дослідження нерівномірності розподілу доходів населення як всередині сукупності, так і при порівнянні різних сукупностей

домогосподарств (населення), а також визначення їх життєвого рівня та рівня бідності на основі аналізу кривої Лоренца.

Результати. Нерівність населення за доходами базується на різних концептуальних уявленнях, які втілюються в конкретних показниках. В даному дослідженні пропонується аналіз нерівномірності розподілу доходів населення провести з використанням групи показників диференціації, що формується у відповідності до постановки конкретних цілей дослідження (визначення добробуту населення, рівнів життя, якості, бідності тощо) та може включати відповідні таким цілям різноманітні показники диференціації як за структурою, так і за часом. Зокрема, пропонується розглянути найбільш вживані характеристики диференціації населення за доходами, такі як коефіцієнт Джині та крива Лоренца.

На даний час в практичних цілях широко використовується коефіцієнт концентрації доходів населення – коефіцієнт Джині (G) [1,2,5-8]:

$$G = 1 - 2 \sum_{i=1}^n q_i s_i + \sum_{i=1}^n q_i x_i,$$

де x_i – частка доходів i -ої групи домогосподарств (населення);

s_i – кумулятивна частка доходів домогосподарств (населення) визначається на підставі даних ранжованого у порядку зростання розподілу домогосподарств (населення) за рівнем доходів шляхом послідовного підсумовування питомої ваги домогосподарств (населення) в інтервалах доходів, які розміщені нижче верхньої межі встановленої інтервальної групи розподілу;

q_i – частка домогосподарств (населення) i -ої групи в загальній чисельності домогосподарств (населення);

n – кількість груп домогосподарств (населення).

Статистична міра рівності доходів коливається від 0 до 1. При цьому, чим більший цей коефіцієнт, тим більша нерівність (тобто вищий ступінь поляризації населення за рівнем доходів і тим ближчий коефіцієнт Джині до 1). При вирівнюванні доходів в суспільстві цей показник прямує до нуля.

Широко відомою є концепція рівності Лоренца, згідно з якою для кожного індивіда в сукупності повинна спостерігатися рівність його частки в сукупності населення і частки його доходу в сумарному доході сукупності. Невиконання цієї умови відображено у відхиленні реальної кривої Лоренца від ідеальної прямої, що символізує повну рівність. Реальна крива Лоренца показує ступінь

нерівномірності розподілу доходів між соціальними групами або, інакше кажучи, ступінь концентрації багатства. Нерівність розподілу тим більша, чим далі крива Лоренца знаходиться від діагоналі одиничного квадрата – прямої «абсолютної рівності» (рис. 1).

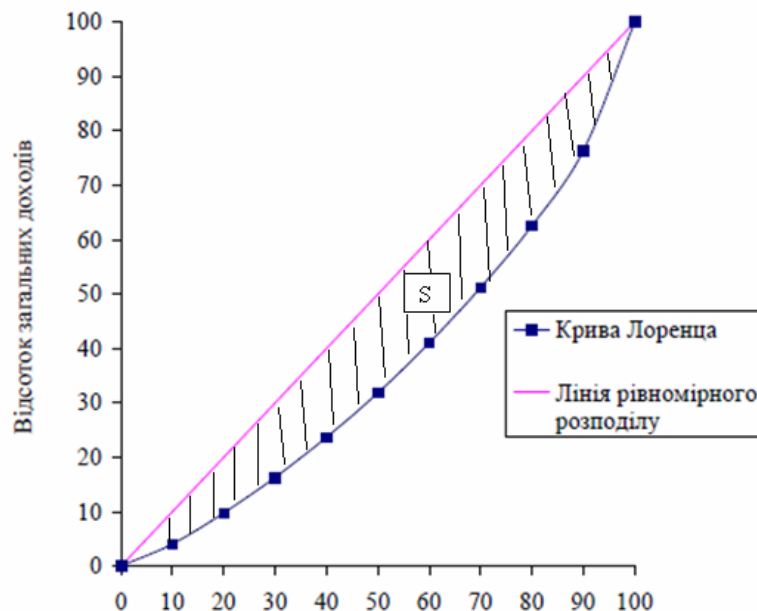


Рис 1. Типовий вигляд кривої Лоренца

Припустимо, що вектор доходів домогосподарств (населення) $x = (x_1, \dots, x_n)$ впорядкований в порядку зростання: $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$. Емпіричну криву Лоренца утворюють точки з координатами:

- абсциса: i/n , де n – загальна кількість домогосподарств (населення), i – кількість домогосподарств (населення) i -ої групи.
- ордината: $L(0) = 0$, $L(i/n) = \frac{s_i}{s_n}$, $s_i = x_1 + x_2 + \dots + x_i$.

Крива Лоренца $L(p)$ визначена у всіх точках $p \in (0,1)$ через лінійну інтерполяцію. $L(p)$ репрезентує p -у фракцію з найменшими доходами.

Припустимо, що розглянуті величини доходів домогосподарств (населення) x_i є випадковим значеннями розподілу $F(x)$, який є зростаючою функцією, $0 < F(x) < 1$ з середньою величиною μ . Перше припущення передбачає, що визначена функція $F^{-1}(p)$ виражає сукупність доходів домогосподарств

(населення) p -го квантилю. Теоретична крива Лоренца, що відповідає цьому розподілу, задається як:

$$L(p) = \mu^{-1} \int_0^p F^{-1}(t) dt.$$

В табл. 1 представлено криві Лоренца, утворені найбільш поширеними розподілами.

Таблиця 1

Криві Лоренца, генеровані різними розподілами [1]

Розподіл	Функція розподілу ймовірностей	Крива Лоренца
Рівномірний	$F(x) = \begin{cases} 0, & x < \mu, \\ 1, & x \geq \mu \end{cases}$	$L(p) = p$
Експоненціальний	$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x > 0$	$p + (1 - p) \ln(1 - p)$
Зміщений експоненціальний	$F(x) = 1 - e^{-\lambda(x-a)}, x > a$	$p + (1 + \lambda a)^{-1} (1 - p) \ln(1 - p)$
Парето	$F(x) = 1 - (a/x)^\alpha, x > a, \alpha > 1$	$1 - (1 - p)^{(a-1)/\alpha}$

Якщо $L(p)$ є кривою Лоренца, яка відповідає розподілу $F(x)$, то $L(p)$ є випуклою і її похідна рівна:

$$L'(p) = 1 \text{ для } p = F(\mu).$$

Припустимо, що відомі розподіли доходів двох сукупностей домогосподарств (населення) або ж однієї, але у двох різних періодах часу. Маючи ці два вектори доходів $x = (x_1, \dots, x_n)$ і $y = (y_1, \dots, y_n)$, за допомогою кривої Лоренца дослідимо:

- в якій сукупності домогосподарств (населення) є більша нерівномірність розподілу доходів;
- яка сукупність домогосподарств (населення) має вищий життєвий рівень;
- в якій сукупності домогосподарств (населення) менший рівень бідності.

Нерівномірність розподілу доходів домогосподарств (населення). Як наголошувалось вище, найбільш відомим показником нерівності доходів є коефіцієнт Джині, відомий також як додатковий чинник концентрації Лоренца. Коефіцієнт Джині G дорівнює подвоєному полю концентрації $2S$ (рис. 1). Альтернативний спосіб розрахунку коефіцієнта Джині G базується на визначенні співвідношення середнього відхилення (Δ), яке відповідає розподілу $F(x)$, до середньої величини доходу:

$$G = \frac{\Delta}{2\mu}, \quad (1)$$

$$\text{де } \Delta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |x - y| dF(x) dF(y) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(x)[1 - F(x)] dx = 4 \int_{-\infty}^{\infty} x[F(x) - 1/2] dFx.$$

Заштрихована поверхня на рис. 1 називається полем концентрації (S).

Вираз (1) показує, що коефіцієнт Джині вимірює нерівність розподілу доходів домогосподарств (населення) як відношення середнього відхилення до середньої величини μ .

Покажемо еквівалентність цих двох визначень коефіцієнта Джині:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - y_j| &= 2 \left(\sum_{i=1}^n \sum_{i=j}^n x_i - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j x_i \right), \\ n \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n x_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n x_i + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j x_i - \sum_{i=1}^n x_i, \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - y_j| &= 2 \left[\sum_{i=1}^n \sum_{i=j}^n x_i - \left((n+1) \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j x_i \right) \right] = \\ &= 4 \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n x_i - 2(n+1) \sum_{i=1}^n x_i, \\ G_n &= \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |x_i - y_j|}{2n \sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i} - \frac{2(n+1) \sum_{i=1}^n x_i}{2n \sum_{i=1}^n x_i} \approx \frac{2 \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n x_i}{n \sum_{i=1}^n x_i} - 1. \end{aligned}$$

$$\text{Оскільки } L\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{\sum_{i=1}^k y_i}{\sum_{i=1}^n y_i}, \text{ то } G_n \approx \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - L\left(\frac{i}{n}\right)\right) - 1.$$

Якщо S є полем концентрації, то:

$$G_n = 2(S + 1/2) - 1 = 2S + 1 - 1 = 2S.$$

Коефіцієнт Джині є відносним індексом нерівності, який вимірює масштаби пропорції доходів, а не ефективну міру нерівності. Крива Лоренца не зміниться, якщо вектор доходів помножити на довільне додатне дійсне число. Коефіцієнт Джині має проте важливу властивість: якщо перерозподілити доходи від багатших економічних агентів до бідніших, то коефіцієнт зменшиться і навпаки. Отже, коефіцієнт Джині можна вважати коефіцієнтом відносної нерівності.

Припустимо, що є дві криві Лоренца для двох різних сукупностей домогосподарств (населення) А і В. Покажемо за допомогою кривої Лоренца, що розподіл сукупності А домінує над розподілом сукупності В:

$$L_A(x) \geq L_B(x),$$

тобто крива Лоренца для сукупності А знаходиться над кривою Лоренца для сукупності В (якщо вони перетинаються, то вони є не порівнюваними).

Легко зауважити, що якщо розподіл сукупності А домінує над розподілом сукупності В, то поле концентрації для А менше, ніж поле концентрації для В і таким чином в А є менша нерівномірність розподілу доходів домогосподарств (населення), ніж у В.

Отже, для векторів (розподілів) доходів домогосподарств (населення) порядок домінування у сенсі кривої Лоренца рівносильний з порядком нерівномірності розподілу доходів.

Життєвий рівень населення. Виявляється, що порядок домінування в сенсі кривої Лоренца пов'язаний з життєвим рівнем населення [2]. Відомо, що коефіцієнт Джині і крива Лоренца є відносними величинами (тобто інваріантними щодо однорідних додатних перетворень). Отже, співставлення за їх допомогою життєвого рівня різних сукупностей домогосподарств (населення) може призвести до хибних висновків. Спробуємо відкоригувати ці величини, щоб мати змогу порівнювати за їх допомогою життєвий рівень різних сукупностей домогосподарств (населення).

Припустимо, що $U(x)$ – корисність доходу x , $f(x)$ – щільність розподілу доходів домогосподарств (населення). Тоді середня корисність доходу визначається за формулою:

$$SW = \int_0^{\infty} U(x)f(x)dx.$$

Часто її інтерпретують як життєвий рівень населення з щільністю розподілу доходів $f(x)$.

Нехай $F(x)$ і $G(x)$ – функції розподілу ймовірностей двох розподілів доходів з однаковими середніми величинами доходів $\mu_F = \mu_G$. Тоді:

$$L_F(p) \geq L_G(p) \Leftrightarrow \int_0^{\infty} U(x)f(x)dx \geq \int_0^{\infty} U(x)g(x)dx$$

для кожної $U(x)$, такої, що $U(x)$ зростає і вгнута ($U'(x) > 0$ і $U''(x) < 0$). Тобто життєвий рівень населення сукупності А (з функцією розподілу ймовірностей доходів $F(x)$) є не меншим, ніж життєвий рівень населення сукупності В (при таких самих середніх доходах), тоді, і тільки тоді, коли розподіл сукупності А домінує у вигляді кривої Лоренца над розподілом сукупності В [1].

Твердження Аткинсона узагальнив Е. Шоррокс [3], запропонувавши узагальнену криву Лоренца $GL(x)$:

$$GL(x) = \mu L(x),$$

де $L(x)$ – крива Лоренца, μ – середня величина доходу.

Згідно [3] нехай $F(x)$ і $G(x)$ – функції розподілу ймовірностей двох розподілів доходів ($f(x)$ і $g(x)$ – їх щільності відповідно). Тоді:

$$GL_F(p) \geq GL_G(p) \Leftrightarrow \int_0^{\infty} U(x)f(x)dx \geq \int_0^{\infty} U(x)g(x)dx$$

для всіх $U(x)$, таких, що $U'(x) > 0$ і $U''(x) < 0$, також для кожного $U'(x) > 0$ і $p \in [0,1]$.

Тобто життєвий рівень населення сукупності А (з функцією розподілу ймовірностей доходів $F(x)$) є не меншим, ніж життєвий рівень населення сукупності В, тоді і тільки тоді, коли розподіл сукупності А домінує у вигляді узагальнюючих кривих Лоренца над розподілом сукупності В.

Узагальнена крива Лоренца для сукупності з розподілом F визначається

таким чином:

$$GL(F; p) = \int_0^p F^{-1}(q) dq \text{ для } p \in [0,1]$$

і узгоджений з нею частковий порядок GL записується таким чином:

$$FGLG \Leftrightarrow GL(F; p) \geq GL(G; p), \forall p \in [0,1],$$

а також

$$GL(F; p) > GL(G; p) \text{ для деякого } p \in [0,1].$$

В роботі [1] виведено наступну умову для життєвого рівня населення:

$$IS_F = \mu_F(1 - G_F).$$

Можна легко показати, що порядок узагальнених кривих Лоренца узгоджується з життєвим рівнем Сена.

$$\begin{aligned} FGLG &\Leftrightarrow \int_0^1 GL_F(p) dp \geq \int_0^1 GL_G(p) dp \Leftrightarrow \mu_F \int_0^1 L_F(p) dp \geq \mu_G \int_0^1 L_G(p) dp \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \mu_F \left(\frac{1-2S_1}{2} \right) \geq \mu_G \left(\frac{1-2S_2}{2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \mu_F (1 - G_F) \geq \frac{1}{2} \mu_G (1 - G_G) \Leftrightarrow IS_F \geq IS_G, \end{aligned}$$

де S_1 є площею під кривою Лоренца для F , а S_2 є площею під кривою Лоренца для G .

У зворотному напрямку перетворення не виконується, тому що порядок узагальнених кривих Лоренца є частковим порядком, а порядок згідно з життєвим рівнем Сена є лінійним порядком.

Рівень бідності. Продовженням викладеного вище підходу є робота Дж. Фостера і Е. Шоррокса [4], в якій розподіл доходів представлено функцією розподілу ймовірностей з множини:

$$F = \{F : R_+ \rightarrow [0,1], F \text{ зростаюча і неперервна справа};$$

$$F(0) = 0 \text{ і } F(s_F) = 1 \text{ для деякого } s_F < \infty\},$$

$$\mu_F = \int_0^\infty s dF(s),$$

$$F^{-1}(p) = \inf \{s \geq 0 : F(s) \geq p\}, p \in [0,1].$$

Рівень бідності є функцією виду:

$$P : \mathcal{F} \times R_+ \rightarrow R,$$

доходи в якій $P(F; z)$ об'єднані з функцією розподілу ймовірностей F при встановленій межі бідності z .

Припустимо, що:

1. $P_1(F; z) = F(z)$ – це частка населення, яка знаходиться за межею бідності.

У дискретному випадку $P_1 = m/n$, де n – загальна чисельність населення, m – чисельність населення, яка знаходиться за межею бідності.

2. $P_2(F; z) = \frac{1}{z} \int_0^{F(z)} [z - F^{-1}(p)] dp$ – частка населення, яка знаходиться вище

межі бідності і ідентифікує себе як середній клас.

Для дискретного випадку $P_2 = \sum_{i=1}^m \frac{z - x_i}{z}$.

3. $P_3(F; z) = \frac{1}{z^2} \int_0^{F(z)} [z - F^{-1}(p)]^2 dp$ – частка населення, яка ідентифікує себе

як заможний клас (в [4] визначається як індекс Фостера).

Для дискретного випадку $P_3 = \frac{1}{nz^2} \sum_{i=1}^m (z - x_i)^2$.

4. Узагальнення індексів P_1, P_2, P_3 :

$$P_\alpha(F; z) = \frac{1}{z^{\alpha-1}} \int_0^{F(z)} [z - F^{-1}(p)]^{\alpha-1} dp, \quad \alpha \geq 1, \quad P_\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m \left(\frac{z - x_i}{z} \right)^\alpha.$$

На множині \mathcal{F} визначається зв'язок порядку, який позначається як $P(z)$, де $z \in Z$, Z визначає певний встановлений поріг бідності (наприклад, від біологічного мінімуму до 60% середніх витрат у вказаній сукупності). Цей зв'язок визначається таким чином [4]:

$$FP(z)G \Leftrightarrow P(F; z), \quad \forall z \in Z,$$

а також

$$P(F; z) < P(G; z) \text{ для певного } z \in Z.$$

Запис $FP(z)G$ означає, що сукупність з функцією розподілу ймовірностей доходів F має менший рівень бідності, ніж сукупність з функцією розподілу ймовірностей доходів G з огляду на індекс бідності P і встановлений поріг бідності Z .

Припустимо, що для заданого $F \in \mathcal{F}$ $F_1 = F$, а також F_α будуть визначені рекурентно при $\alpha \geq 2$:

$$F_\alpha(s) = \int_0^s F_{\alpha-1}(t)dt \text{ і } F_1(s) = F(s).$$

Водночас можна визначити зв'язок стохастичного домінування D_α рівня $\alpha \geq 2$ для $\alpha \in N$ таким чином:

$$FD_\alpha G \Leftrightarrow F_\alpha(s) \leq G_\alpha(s) \text{ для всіх } s > 0, \quad (2)$$

а також

$$F_\alpha(s) \leq G_\alpha(s) \text{ для деякого } s > 0.$$

Зауважимо, що

$$z^{\alpha-1}P_\alpha(F; z) = \int_0^z (z-y)^{\alpha-1}dF(y).$$

Інтегруючи по частинах, отримаємо:

$$\int_0^z (z-y)^{\alpha-1}dF(y) = (\alpha-1)!F_\alpha(z).$$

Звідси можна зробити наступні висновки.

1. Для довільного $\alpha \in N$:

$$FP_\alpha G \Leftrightarrow FD_\alpha G.$$

Зауважимо також, що якщо $\alpha \leq \beta$, то:

$$FP_\beta G \Leftrightarrow FP_\alpha G.$$

Відповідність між порядками бідності P_α і стохастичним домінуванням D_α дає можливість отримати інтерпретацію P_α в термінах функції життєвого рівня. Припустимо, що \mathcal{U} є класом функції життєвого рівня виду:

$$U(F) = \int u(x)dF(x),$$

де $u: R_+ \rightarrow R$ є неперервною функцією. Нехай $\mathcal{U}_1 \subset \mathcal{U}$ є класом функцій, для яких $u'(x) > 0$, $\mathcal{U}_2 \subset \mathcal{U}_1$ – клас функцій, для яких $u''(x) < 0$ і $\mathcal{U}_3 \subset \mathcal{U}_2$ – клас таких функцій, що $u'''(x) < 0$.

Для $\alpha = 1, 2, 3$ \mathcal{U}_α будуть частковими порядками, які визначаються таким чином:

$$F \mathcal{U}_\alpha G \Leftrightarrow U(F) > U(G) \text{ для всіх } U \in \mathcal{U}_\alpha.$$

2. Використовуючи відомий факт зі стохастичних домінувань, отримаємо наступний висновок. Для $\alpha = 1, 2, 3$ $FP_\alpha G \Leftrightarrow F \mathcal{U}_\alpha G$.

Таким чином, твердження, що у суспільстві із функцією розподілу

ймовірностей доходів F є менший рівень бідності, ніж у суспільстві із функцією розподілу ймовірностей доходів G для P_α рівнозначне твердженню, що у суспільстві із функцією розподілу ймовірностей доходів F існує вищий життєвий рівень, ніж у суспільстві із функцією розподілу ймовірностей доходів G для всіх функцій життєвого рівня з \mathcal{U}_α .

3. Можна показати більш загальне твердження, а саме, що порядок стохастичних домінувань зумовлює порядок бідності. Якщо розподіл F домінує над розподілом G (2), то рівень бідності у суспільстві з розподілом доходів F є меншим, ніж рівень бідності в суспільстві з розподілом доходів G .

Нехай $\Phi: R_+ \rightarrow R$ – спадна функція, причому така, що $\Phi(0) = 1$, а також $\Phi(z) = 0$, ($F(0) = 0$).

Тоді

$$\Phi(F) = \int_0^z \Phi(t) dF(t) = \Phi(t)F(t)|_0^z - \int_0^z F(t) d\Phi(t) = \int_0^z F(t) d(-\Phi(t)).$$

Звідси

$$P(G, z) - P(F, z) = \Phi(G) - \Phi(F) = \int_0^z (G(t) - F(t)) d(-\Phi(t)) \geq 0,$$

оскільки прирости зростаючої функції $-\Phi(t)$ визначають додатну міру з припущення $F \leq G$ (FDG).

Таким чином, на основі [3] можна зробити висновок, що життєвий рівень зумовлює рівень бідності.

Висновки. Отже, показано, що на основі аналізу кривої Лоренца можна не тільки досліджувати нерівномірність розподілу доходів як всередині сукупності, так і при порівнянні різних сукупностей домогосподарств (населення), але й визначати їх життєвий рівень та рівень бідності.

Література

1. Gastwirth J.L. Estimation Lorentz curve and Gini index // Review Economics and Statistics, 1972, Vol. 54, P. 306-316.
2. Сисак Л.І. Аналіз підходів і методів визначення показників життєвого рівня населення / Сисак Л.І. // Економіка: проблеми теорії та практики. Збірник наукових праць. Випуск 213. Том 4. – Дніпропетровськ: ДНУ. – 2006. – С.

1066-1072.

3. Shorrocks A.F. Ranking Income Distributions // *Economica*, 1983, Vol. 50.
4. Foster J.E., Shorrocks A.F. Poverty Orderings. *Econometrica*. 1988, Vol. 56.
5. Гвелесіані А.Г. Диференціація грошових доходів населення: аналіз, прогноз та механізм регулювання. [Монографія] / Відп. ред. В.М. Новіков. – К.: Ін-т демографії та соціальних досліджень НАН України, 2008. – 155 с.
6. Колмаков И.Б. Методы и модели прогнозирования показателей дифференциации и поляризации денежных доходов населения. Дисс. ... д-ра экон. наук. М.: РГБ, 2008.
7. Новіков В.М. Соціальні трансформації: міжнародний та вітчизняний досвід / Новіков В.М., Сітнікова Н.П., Мусіна Л.А., Семенов В.В. – К., 2003. – 253 с.
8. Cowell F.A., Jenkins S.P. How much inequality can we explain? A methodology and an application to the United States // *Economic Journal*, 1995, № 105(429), P. 421-30.