

ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ ПРОЦЕДУРЫ УМНОЖЕНИЯ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ В ОРТОГОНАЛЬНЫХ БАЗИСАХ

Abstract . One of the main and the most challenging arithmetic operations is considered to be the realization of works of multi-bit numbers. Modern approach to its computational efficiency is the use of the convolution theorem in the bases of orthogonal functions.

The possibility of implementing the algorithm multiplying large numbers using a new family of basis functions based on mathematical apparatus based transformations.

Keywords. Discrete orthogonal transformations, convolution theorem, Fourier transform, Walsh-Hadamard transform bit.

Введение. Хорошо известно, что в составе алгоритмического обеспечения компьютерных систем обработки сигналов одно из центральных мест занимают алгоритмы дискретных ортогональных преобразований (ДОП). К числу наиболее известных относятся преобразования Фурье, Уолша-Адамара, Хаара [1]. Достаточно широкое распространение получил вейвлет-анализ [2], являющийся дальнейшим развитием теории ортогональных преобразований.

В настоящее время одним из направлений развития данной теории является синтез параметрических семейств новых ортогональных базисов. В Институте проблем моделирования в энергетике (ИПМЭ) им. Г.Е. Пухова НАН Украины был предложен математический аппарат разрядных преобразований [3], который может служить основой для построения абсолютно новой системы базисных функций при реализации уже существующих алгоритмов ДОП.

Следует отметить, что процедуры формирования систем базисных разрядных функций (РФ) [4] реализуются по аналогии с процедурами формирования так называемых несинусоидальных ортогональных функций, основанных на использовании функции Радемахера, Уолша и Хаара. Данное свойство позволило предположить, что предлагаемый аппарат ложится в классическую теорию Фурье преобразований и должен обладать теми же основными свойствами, что и известные ДОП.

В связи с изложенным, автором был проведен анализ возможности использования разрядных функций [5] при реализации теоремы о свертке, позволяющей существенно упростить задачу вычисления произведения многоразрядных чисел путем замены операции произведения на вычисление свертки через алгоритмы быстрых дифференциальных преобразований (ДП).

Основная часть. Для проверки выдвинутой гипотезы в первую очередь обратимся к классическому дискретному преобразованию Фурье (ДПФ).

В случае с ДПФ в качестве базисных функций используется система дискретных экспоненциальных функций.

$$\varphi_k(i) = W_N^{ki}, \quad i = 0, 1, \dots, N-1; \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (1)$$

$$W_N = \exp^{-j2\pi/N}, \quad j = \sqrt{-1} \quad (2)$$

Функции W_N^{ki} (поворачивающие множители) являются ортогональными и периодическими с периодом N как по переменной k , так и по переменной i , т. е.:

$$W_N^{ki} = W_N^{(k+N)i} = W_N^{(i+N)k} \quad (3)$$

Математически прямое и обратное ДПФ можно представить в следующем виде:

$$c(k) = \sum_{i=0}^{N-1} s(i) * W_N^{i*sk}, \quad k = 0 \dots N-1 \quad (4)$$

$$s(i) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) * W_N^{-i*sk}, \quad i = 0 \dots N-1. \quad (5)$$

где $c(k)$, $k=0, 1, \dots, N-1$ – спектральные коэффициенты сигнала $s(i)$.

Теорема о свертке.

Спектр циклической свертки двух сигналов равен произведению спектров этих сигналов.

Пусть $z(n)$ -результат циклической свертки сигналов $a(n)$ и $b(n)$:

$$z(n) = \sum_{m=0}^{N-1} a(m) * b(n-m), \quad n = 0 \dots N-1. \quad (6)$$

Рассчитаем спектр сигнала $s(n)$:

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} s(n) * W_N^{n*sk}, \quad k = 0 \dots N-1, \quad (7)$$

$$S(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \left[\sum_{m=0}^{N-1} a(m) * b(n-m) \right] * W_N^{n*sk}. \quad (8)$$

Поменяем местами операции суммирования:

$$S(k) = \sum_{m=0}^{N-1} a(m) * \left[\sum_{n=0}^{N-1} b(n-m) * W_N^{n*sk} \right]. \quad (9)$$

Представим множитель W_N^{n*sk} в виде:

$$W_N^{n*sk} = W_N^{(n-m+m)*sk} = W_N^{(n-m)*sk} * W_N^{m*sk} \quad (10)$$

Подставив (9) в (10) получим:

$$\begin{aligned} S(k) &= \sum_{m=0}^{N-1} a(m) * \left[\sum_{n=0}^{N-1} b(n-m) * W_N^{(n-m)*sk} * W_N^{m*sk} \right] = \dots \\ &= \left[\sum_{m=0}^{N-1} a(m) * W_N^{m*sk} \right] * \left[\sum_{n=0}^{N-1} b(n-m) * W_N^{(n-m)*sk} \right] = A(k) * B(k), \end{aligned} \quad (11)$$

где $A(k)$ и $B(k)$ - спектры сворачиваемых сигналов.

Выражение, представленное в (11) является подтверждением того, что спектр свертки двух сигналов есть не что иное, как результат произведения спектров самих сигналов.

Алгоритм вычисления циклической свертки представлен на рисунке 1.

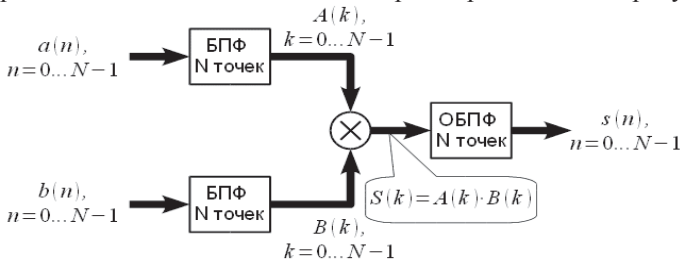


Рис. 1. Алгоритм вычисления циклической свертки.

Алгоритм реализации ДПФ рассмотрим на примере двух бинарных последовательностей.

Пример 1. Дано: две последовательности а и в, представленные в двоичном виде.

$$a = 19 \rightarrow (1, 0, 0, 1, 1);$$

$$b = 13 \rightarrow (1, 1, 0, 1);$$

Циклическая свертка. Разрядность получаемого результата циклической свертки определяется как $n = N + M - 2 = 8$, где N и M разрядности последовательностей а и в соответственно.

Дополняем число элементов каждой из исходных последовательностей до 8 разрядов.

$$a := (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0); \quad b := (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

Результат вычисления циклической свертки (6):

$$z = a * b = (1, 1, 0, 2, 2, 1, 1, 1).$$

Важно отметить то, что нормализация полученных результатов на данном этапе не выполняется.

$$F(n) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} & -j & -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & j & \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -j & -1 & j & 1 & -j & -1 & j \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & j & \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & -j & -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & -j & \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} & j & -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & j & -1 & -j & 1 & j & -1 & -j \\ 1 & \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & j & -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} & -j & \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

ДПФ. Процедуру ДПФ, удобно представлять в матричной форме.

Матрица преобразования / поворачивающих множителей для 8-разрядной последовательности имеет следующий вид.

Результат перемножения исходной последовательности на представленную матрицу является Фурье образ или спектр последовательности $a = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$:

$$A(k) = 3, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 2+j, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - j\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 1, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad 2-j, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} + j\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Спектр $b = (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$:

$$B(k) = 3, \quad \mathbf{1 - j\sqrt{2}}, \quad 1, \quad \mathbf{1 - j\sqrt{2}}, \quad -1, \quad \mathbf{1 + j\sqrt{2}}, \quad 1, \quad \mathbf{1 + j\sqrt{2}}$$

Результат поэлементного перемножения образов исходных последовательностей:

$$A(k) * B(k) = \begin{pmatrix} 9 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{2} - 1 + j \\ 2 + j \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{2} - 1 - j \\ -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{2} - 1 + 1 \\ 2 - j \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{2} - 1 - j \end{pmatrix}$$

Фурье-образ свертки $z = (1, 1, 0, 2, 2, 1, 1, 1)$:

$$F(z) = \begin{pmatrix} 9 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{2} - 1 + j \\ 2 + j \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} - \frac{1}{2}j\sqrt{2} - 1 - j \\ -1 \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{2} - 1 + 1 \\ 2 - j \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}j\sqrt{2} - 1 - j \end{pmatrix}$$

Полученные результаты являются подтверждением выполнения теоремы о свертке.

С дискретным преобразованием Уолша-Адамара (ДПУ) ситуация обстоит несколько иначе.

В случае ДПУ в качестве системы базисных функций используется система дискретных функций Уолша $\{wal_k(i)\}$ $i=0, 1, \dots, N-1, k=0, 1, \dots, N-1$, где $N=2^n$, где n – целое число.

Данная система представляет для нас особый интерес в связи с тем, то принципы их построения взяты за основу при формировании систем разрядных функций.

Функции $wal_k(i)$ являются ортогональными и удовлетворяют условию мультипликативности $wal_k(i) * wal_j(i) = wal_{k \oplus j}(i)$

Прямое и обратное ДПУ определяются как:

$$c(k) = \sum_{t=0}^{N-1} s(t) * wal_k(t), \quad k = 0 \dots N - 1, \quad (12)$$

$$s(t) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) * wal_k(t), \quad t = 0 \dots N - 1. \quad (13)$$

Так же, как и в случае ДПФ, спектр оказывается периодическим: $c(k) = c(k + nN)$, где n – целое число. Однако ДПУ имеет существенные отличия от ДПФ. Это касается, в частности, теорем запаздывания и свертки.

Теорема о произведении спектра (или теорема о свертке) в случае ДПУ математически записывается как:

$$c_1(k) * c_2(k) = F[a(t) * b(t)] = F \left[\sum_{j=0}^{N-1} a(j) * b(t \oplus j) \right], \quad (14)$$

где $c_1(k)$, $c_2(k)$ – спектральные коэффициенты последовательностей/сигналов $a(i)$ и $b(i)$ в базисе функций Уолша.

$$z(t) = \sum_{j=0}^{N-1} a(j) * b(t \oplus j). \quad (15)$$

Выражение (15) есть не что иное, как диадная свертка двух последовательностей. Запись $b(i \oplus j)$ означает диадный сдвиг последовательности отсчетов сигнала $b(i)$ на j интервалов, где $i \oplus j$ – это десятичное число, двоичное представление которого определяется поразрядным сложением по модулю два двоичных представлений чисел i и j .

Подтверждение выполнения данного свойства рассмотрим на следующем примере.

Пример 2. Дано: две последовательности a и b , представленные в двоичном виде.

$$a = 19 \rightarrow (1, 0, 0, 1, 1);$$

$$b = 13 \rightarrow (1, 1, 0, 1).$$

Диадная свертка. Разрядность получаемого результата диадной свертки, как и в случае с ДПФ, определяется как $i = N + M - 2 = 8$, где N и M разрядности последовательностей a и b соответственно.

Дополняем число элементов каждой из исходных последовательностей до 8 разрядов.

$$a := (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0);$$

$$b := (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

$$\text{Разрядность числа } i = N + M - 2 = 8.$$

Дополняем число элементов исходной последовательности до 8 разрядов.

Результат диадной свертки (15): $z = a * b = (2, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 1)$.

ДПУ. ДПУ, как и ДПФ, удобно представить в матричной форме.

Матрица преобразования / поворачивающих множителей имеет следующий вид:

$$W(i) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Образ последовательности $a := (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$:

$A(k) = 3, 1, -1, 1, 3, 1, -1, 1$.

Образ $b := (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$:

$B(k) = 3, 3, 1, 1, 1, 1, -1, -1$.

Результат поэлементного перемножения образов исходных последовательностей:

$A(k) * B(k) = 9, 3, -1, 1, 3, 1, 1, -1$.

Образ диадной свертки z :

$W(z) = 9, 3, -1, 1, 3, 1, 1, -1$.

Разрядное преобразование.

Предлагаемый аппарат разрядных преобразований [3] основан на представлении исходных математических зависимостей в виде их разрядных изображений [4], которые, в свою очередь, являются основой для построения систем базисных функций.

Прямое и обратное разрядное преобразование (РП) определяются, как уже упоминалось, аналогично ДПФ и ДПУ:

$$c(k) = \sum_{l=0}^{N-1} s(l) * \Psi_k(l), \quad k = 0 \dots N-1, \quad (17)$$

$$s(l) = \sum_{k=0}^{N-1} c(k) * \Psi_k(l), \quad l = 0 \dots N-1. \quad (18)$$

Пример 3. Дано: две последовательности a и b , представленные в двоичном виде.

$a = 19 \rightarrow (1, 0, 0, 1, 1)$;

$b = 13 \rightarrow (1, 1, 0, 1)$;

Свертка. Разрядность получаемого результата циклической свертки

определяется как $n = N + M - 2 = 8$, где N и M разрядности последовательностей a и b соответственно.

Дополняем число элементов каждой из исходных последовательностей до 8 разрядов.

$$a := (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0).$$

$$b := (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0).$$

$$\text{Результат циклической свертки: } z = a * b = (1, 1, 0, 2, 2, 1, 1, 1).$$

$$\text{Результат диадной свертки: } z = a * b = (2, 1, 1, 2, 1, 1, 0, 1).$$

Для проверки выдвинутой в выше гипотезы будем использовать систему конъюнктивных сложных разрядных функций (СРФ) принципы формирования которых изложены в [3]. Матричная форма записи первых 8 СРФ, упорядоченных по Пэли, имеет вид:

$$\Psi(k) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Образ $a := (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0)$:

$$A(k) = 1, 0, -1, 0, -1, 0, 2, -1.$$

Образ $b := (1, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$:

$$B(k) = 1, -1, -1, 1, 0, 0, 1, -1.$$

Результат перемножения спектров исходных последовательностей:

$$A(k) * B(k) = 1, 0, 1, 0, 0, 0, 2, 1.$$

Спектр циклической свертки z :

$$Z(k) = 1, 1, -1, 0, 0, -1, 2, -1.$$

Спектр диадной свертки z :

$$Z(k) = 2, -1, -1, 0, -1, 1, 2, -1.$$

Выводы. Результат, полученный в последнем примере, показывает, что при использовании системы базисных функций, построенной с использованием аппарата разрядных преобразований [3] и представления исходных математических зависимостей в виде их разрядных изображений [4], не подтверждается вывод теоремы о свертке. Следовательно, формальное использование ДОП, основанных на аппарате разрядных преобразований [3], не гарантирует правильность результата произведения многоразрядных функций. Систематизация и анализ полученных результатов является темой дальнейших исследований.

1. Залманзон Л.А. Преобразования Фурье, Уолша, Хаара / Л.А.Залманзон. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
2. Оппенгейм А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – М.: Техносфера, 2006. – 855 с.
3. Мохор В.В. Основы теории синтеза вычислительных устройств в базе разрядных функций / В.В. Мохор. – К: Научная мысль, 1997. – 191 с.
4. Максименко Е.В. Повышение продуктивности компьютерных моделей на основе применения разрядных спектров/ Е.В. Максименко // Ежегодная научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов (Киев, 15-16 января 2014 г.): научно-практ. конф.: тез. док. – К., 2014.
5. Максименко Е.В. Особенности реализации теоремы о свертке в базах ортогональных функций/ Е.В. Максименко // Ежегодная научно-техническая конференция молодых ученых и специалистов (Киев, 15 января 2015 г.): научно-практ. конф.: тез. док. – К., 2015.
6. Смирнов В.И. Курс высшей математики / В.И. Смирнов. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953. – 626 с.
7. <http://kibia.ru/teachers/kreindelin/pdf/8.pdf>
8. <http://www.dsplib.ru/content/propdft/propdft.html#r4>

Поступила 5.10.2015г.

УДК 681

И.А.Владимирский, г.Киев.

КОРРЕЛЯЦИОННЫЙ МЕТОД ПОИСКА УТЕЧЕК ПРИ ОДНОСТОРОННЕМ ДОСТУПЕ К ТРУБОПРОВОДУ

Представлено кореляційний метод пошуку витоків з використанням акустичного шуму течі на трубопроводі і на поверхні ґрунту над трубопроводом. Показано критерій виявлення витoku і приклад його застосування.

Представлен кореляційний метод пошуку утечек с использованием акустического шума течи на трубопроводе и на поверхности ґрунта над трубопроводом. Показаны критерий выявления утечки и пример его применения.

Correlative method of leaks searching by using acoustic leak noise on the pipeline and on the ground surface above the pipeline is represented. The criterion of leakage detection and example of its use is shown.

Ключові слова: трубопровід, витік, течешукач.

Ключевые слова: трубопровод, утечка, течешукач.

Keywords: pipe, leak, leak detector.

Введение и постановка задачи. Рост сроков эксплуатации подземных трубопроводных сетей водо и теплоснабжения, увеличение их износа сопровождается постоянным повышением их повреждаемости.