

2. Мартинюк О. В. Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. II / О. В. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2011. — Вип. 6. — С. 157–171.
3. Мартинюк О. В. Задача Коші для сингулярних еволюційних рівнянь у зліченно-нормованих просторах нескінченно диференційовних функцій. III / О. В. Мартинюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2012. — Вип. 7. — С. 199–212.
4. Городецький В. В. Еволюційні рівняння з псевдо-Бесселевими операторами / В. В. Городецький, О. М. Ленюк // Доп. НАН України. — 2007. — №8. — С. 11–15.
5. Корн Т. Справочник по математике / Т. Корн, Г. Корн. — М. : Наука, 1977. — 832 с.

The new classes of functions-symbols and new classes of pseudo-differential operators, which are built on such characters by direct and inverse Bessel transformation, are defined in the paper. The correct solvability of the Cauchy problem for evolution equations with pseudo-Bessel operators with initial functions of the spaces such as Sobolev-Schwartz distributions is set.

Key words: *Bessel transformation; spaces of basic functions, spaces of generalized functions, the Cauchy problem, pseudo-Bessel operators, the operator of generalized shift of the argument.*

Отримано: 14.06.2011

УДК 519.6

А. П. Мотайло*, старший преподаватель,
А. Н. Хомченко**, д-р физ.-мат. наук, профессор

* Херсонский национальный технический университет, г. Херсон,

** Черноморский государственный университет им. П. Могилы, г. Николаев

КУСОЧНО-ЛИНЕЙНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ НА РЕШЕТКАХ ТЕТРАЭДРАЛЬНО-ОКТАЭДРАЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

В статье исследованы сходимость метода конечных элементов на решетке с ячейками в форме октаэдров и аппроксимационные качества кусочно-линейных координатных функций на этом носителе.

Ключевые слова: *октаэдр, тетраэдр, кусочно-линейные координатные функции, порядок аппроксимации, сходимость в среднеквадратичном.*

Введение. Задача интерполирования функций в 3D методом конечных элементов (МКЭ), как правило, решается с привлечением базисных функций гексаэдра и тетраэдра. Трудности алгоритмизации, связанные с большим объемом вычислений на тетраэдрических

решётках и неприспособленностью решетки из гексаэдров к границам пространственной области сложной геометрической формы, иногда могут быть устранены путём введения решётки иной конфигурации, например, с ячейками в форме октаэдров и тетраэдров.

Анализ предшествующих публикаций, цели статьи. Пополнение библиотеки объёмных конечных элементов (КЭ) октаэдром [1] привело к необходимости исследования таких его характеристик как количество степеней свободы в узлах КЭ, вид координатных (базисных) функций, описание геометрии области КЭ, класс решаемых задач, для которых он предназначен [2].

Цель статьи — изучить характеристики КЭ в форме октаэдра и возможность применения кусочно-линейной интерполяции при решении задач трёхмерного напряженного состояния при условии дискретизации области решёткой «тетра-окта».

Основная часть. Пусть Ω — ограниченная область в R^3 , $\bar{\Omega}$ — её замыкание. Предположим, что для решения в вариационной постановке краевой задачи механики

$$Au = f, u|_{\partial\Omega} = \varphi, Bu|_{\partial\Omega} = \psi, \quad (1)$$

где A — дифференциальный оператор уравнений равновесия, B — оператор естественных граничных условий, $u = u(x, y, z)$, $f = f(x, y, z)$, $\varphi = \varphi(x, y, z)$, $\psi = \psi(x, y, z)$ — соответственно искомая и известные функции, определённые на $\bar{\Omega}$, $\partial\Omega$ — граница Ω , дискретизация пространственной области $\bar{\Omega} = \bigcup_{r=1}^n \bar{\Omega}_r$ ($\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n$ — непересекающиеся области в R^3) осуществляется с помощью решётки тетраэдрально-октаэдральной структуры (рис. 1), где $\bar{\Omega}_r$ — октаэдр $\bar{\Omega}_r^o$ или тетраэдр $\bar{\Omega}_r^t$.

Узлы решётки расположены в вершинах многогранников. Координатные функции $N_l(x, y, z) \in S^h$, $l = \overline{1, L}$, где S^h — пространство пробных функций в $C^k(\bar{\Omega})$, L — общее число глобальных степеней свободы $q_l \in R$, $h = \max_{1 \leq r \leq n} \text{diam} \bar{\Omega}_r$; определяются равенствами:

$$N_l(x, y, z) = \begin{cases} N_{lj}(x, y, z), & (x, y, z) \in \bar{\Omega}_j, \text{ где } \bar{\Omega}_j = \bigcup_{r=1}^{n_r} \bar{\Omega}_r^o, \\ 0, & (x, y, z) \notin \bar{\Omega}_j, \end{cases} \quad (2)$$

где n_r — общее число элементов $\bar{\Omega}_r$, содержащих узел j .

Искомая функция перемещений $u \in H_E^s(\bar{\Omega})$ аппроксимируется полиномом $u_h(x, y, z) = \sum_{l=1}^L N_l q_l$, $q_l = u_h(x_{lj}, y_{lj}, z_{lj})$, где $u_h(x, y, z) \in S^h$, (x_{lj}, y_{lj}, z_{lj}) — координаты незакрепленного узла j , соответствующего степени свободы q_l , $H_E^s(\bar{\Omega})$ — пространство допустимых функций, удовлетворяющих главным граничным условиям, с нормой $\|v\|_s = \left(\sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial^{|\alpha|} v(x, y, z)}{\partial x^{\alpha_1} \partial y^{\alpha_2} \partial z^{\alpha_3}} \right)^2 d\Omega \right)^{1/2}$ для любого $v \in H_E^s$, α — трехмерный мультииндекс.

Определим координатные функции N_i , $i = \overline{1, Nr}$, где Nr — общее число узлов (локальных степеней свободы q_i), на отдельном элементе $\bar{\Omega}_r$ в местной системе координат $O\xi\eta\zeta$ с центром: для октаэдра $\bar{\Omega}_r^o$ — в точке пересечения диагоналей (рис. 2а), для тетраэдра $\bar{\Omega}_r^t$ — в одной из его вершин:

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} NL_i(\xi, \eta, \zeta), (\xi, \eta, \zeta) \in \bar{\Omega}_r^o, i = \overline{1, 6}, \\ L_i(\xi, \eta, \zeta), (\xi, \eta, \zeta) \in \bar{\Omega}_r^t, i = \overline{1, 4}, \end{cases} \quad (3)$$

где $NL_i(\xi, \eta, \zeta)$ — кусочно-линейные функции [3], соответствующие узлам октаэдра:

$$NL_i(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \frac{1}{6}(1 + 2|\xi| \pm 3\xi - |\eta| - |\zeta|), i = 1, 3, \\ \frac{1}{6}(1 + 2|\eta| \pm 3\eta - |\xi| - |\zeta|), i = 2, 4, \\ \frac{1}{6}(1 + 2|\zeta| \pm 3\zeta - |\xi| - |\eta|), i = 5, 6, \end{cases} \quad (4)$$

а $L_i(\xi, \eta, \zeta)$ — линейные функции, объёмные координаты тетраэдра [4]. При этом интерполяция на $\bar{\Omega}_r$ принимает вид пробного полинома

$$u_I(x, y, z) = \sum_{i=1}^{Nr} N_i(x, y, z) q_i, \quad q_i = u(x_i, y_i, z_i),$$

где $u_I(x, y, z) \in S^h$, $S^h \subset C^0(\bar{\Omega})$, $(x, y, z) \in \bar{\Omega}_r$, $(x, y, z)^T = [S] \cdot (\xi, \eta, \zeta)^T + (x_{0,r}, y_{0,r}, z_{0,r})^T$, $[S]$ — матрица преобразования

местной системы координат в глобальную, $(x_{0,r}, y_{0,r}, z_{0,r})$ — координаты начала $O\xi\eta\zeta$ для элемента $\bar{\Omega}_r$ в системе $Oxyz$.

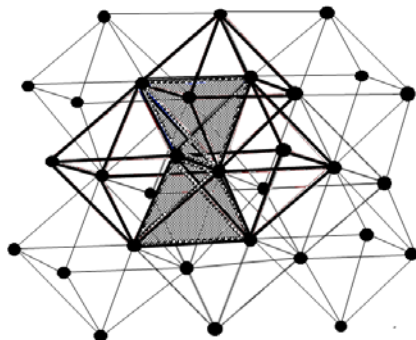


Рис. 1. Фрагмент решётки «тетра-окта»

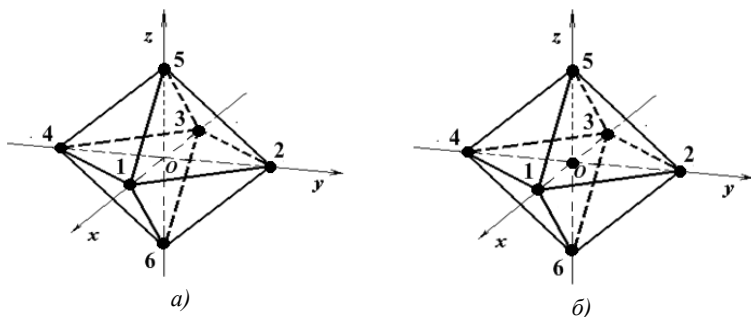


Рис. 2. Модели октаэдра: а) нецентрированная; б) центрированная

Согласно теоремам об аппроксимации функций степенными полиномами [5, 6] ошибка $u - u_h$ МКЭ в энергетической норме пространства $H^s(\bar{\Omega})$ зависит от размера h КЭ и степени полноты p пространства S^h . Для функций (2)—(4) порядок s суммируемых с квадратом производных равен 1, а степень p полного полинома, интерполируемого точно функциями (2)—(4), также равна 1. Действительно, соотношение

$$\sum_{i=1}^{Nr} \sum_{l_r=1}^{L_r} (B_{i,l_r} x^\tau)(x_i, y_i, z_i) N_{i,l_r}(x, y, z) = x^\tau \quad \text{при } |\tau| \leq p \text{ и } (x, y, z) \in \bar{\Omega}_r, \quad (5)$$

где Nr — число узлов элемента $\bar{\Omega}_r$, B_{i,l_r} — дифференциальный оператор порядка $s \leq |\tau|$, L_r — число степеней свободы $q_{i,r}^{(l_r)}$, соответст-

вующих узлу i , τ — трехмерный мультииндекс), устанавливающее порядок аппроксимации для любых решеток и произвольного числа степеней свободы в узлах [7], для функций $NL_i (i = \overline{1,6})$ принимает вид системы равенств

$$\sum_{i=1}^6 NL_i = 1; \quad NL_1 - NL_3 = x; \quad NL_2 - NL_4 = y; \quad NL_5 - NL_6 = z;$$

$$\text{при } |\tau| \leq 1, \quad (x, y, z) \in \Omega_r^o.$$

Для $\Omega_r = \Omega_r^t$, где $N_{i_r} = L_i$, $i = \overline{1,4}$, $L_r = 3$, равенства (5) также справедливы при $p = 1$.

Утверждение 1. Кусочно-линейная интерполяция полиномами $u_h = \sum_{l=1}^L N_l q_l$, $u_h \in S^h$, $S^h \subset H^1(\bar{\Omega})$ решения краевой задачи (1), где функции $N_l (l = \overline{1,L})$ определяются равенствами (2)—(4), имеет порядок $O(h)$ в $H^1(\bar{\Omega})$ и порядок $O(h^2)$ в $H^0(\bar{\Omega})$ при $m = 1$ ($2m$ — порядок дифференциального оператора A), т.е. справедливы оценки: $\|\sigma - \sigma_h\|_0 \leq ch$, $\|u - u_h\|_0 \leq ch^2$, где $\|v\|_0 = \int_{\Omega} v^2 d\Omega$ для любого $v \in H^0(\bar{\Omega})$, σ_h, σ — напряжения, соответствующие перемещениям u_h, u , c — константа, измеряющая погрешность интерполяции, h — максимальный диаметр $\bar{\Omega}_r$.

Доказательство. Согласно [8] сходимость МКЭ на рассматриваемой решётке обеспечивается выполнением трёх условий. Функции $N_l (l = \overline{1,L})$ должны 1) принадлежать энергетическому пространству дифференциального оператора A , 2) быть линейно-независимыми, 3) удовлетворять условиям полноты в энергетическом пространстве оператора A .

Принадлежность энергетическому пространству дифференциального оператора A краевой задачи (1), устанавливается существованием компонентов напряженно-деформированного состояния, входящих в функционал $I(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega} f^T u d\Omega$, где σ, ε — векторы напряжений и деформаций. По области Ω_r^t это свойство выполняется для любого $r = \overline{1, n_1}$ в силу определения функций $L_i (i = \overline{1,4})$ как функций

класса C^1 . По области Ω_r^o , где функции $NL_i (i = \overline{1,6})$ класса C^0 , интегрирование определено для любого $r = \overline{1, n_2}$, если $\int_{\Omega_r^o} \varepsilon^T \sigma d\Omega_r^o =$
 $= \sum_{p=1}^8 \int_{\Omega_{r,p}^o} \varepsilon^T \sigma d\Omega_{r,p}^o$, где $n_1 + n_2 = n$, $\Omega_r^o = \bigcup_{p=1}^8 \Omega_{r,p}^o$, $\Omega_{r,p}^o$ — области, полученные разбиением Ω_r^o координатными плоскостями $\zeta = 0$, в любой точке которых функции $\frac{\partial}{\partial \xi} NL_i, \frac{\partial}{\partial \eta} NL_i, \frac{\partial}{\partial \zeta} NL_i$ терпят разрывы первого рода. В межэлементной зоне, т.е. для любого непустого множества $G = \overline{\Omega}_r^o \cap \overline{\Omega}_r^t (r = \overline{1, n})$ непрерывность перемещений u и их производных ε, σ гарантирована линейностью функций $N_l(x, y, z)$ при $(x, y, z) \in G$. Действительно, в единой системе координат $NL_j(x, y, z) = L_j(x, y, z)$, где $j \in G_r$, $G_r = \{j : (x_j, y_j, z_j) \in G\}$. Таким образом, функции $N_l (l = \overline{1, L})$ принадлежат энергетическому пространству дифференциального оператора A .

Линейная независимость функций $N_l (l = \overline{1, L})$ в пространстве пробных функций $S^h \subset C^0(\overline{\Omega})$ следует непосредственно из системы уравнений $N_l(x_i, y_i, z_i) = \delta_{li}$, где δ_{li} — символ Кронекера, $l, i = \overline{1, L}$. При этом всякую пробную функцию u_h можно представить в виде линейной комбинации $u_h = \sum_{l=1}^L q_{lj} N_{lj}$, где $q_{lj} = u_h(x_j, y_j, z_j)$, j — незакрепленный узел, соответствующий степени свободы l . Последнее означает, что функции $N_l (l = \overline{1, L})$ образуют базис в пространстве S^h .

Условием полноты системы функций $N_l (l = \overline{1, L})$ в энергетическом пространстве дифференциального оператора A как системы функций, способных при неограниченном дроблении решетки аппроксимировать любые перемещения по области Ω с любой наперед заданной степенью точности, является условие $p \geq m$. Следовательно, $m = 1$.

При этом, полнота системы функций $N_l (l = \overline{1, L})$ в энергетическом пространстве дифференциального оператора A означает, что

$\|u - u_h\|_A \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, где $\|u - u_h\|_A = \|e_h\|_A = \sqrt{\int_{\Omega} |\text{grad } e_h|^2 d\Omega}$ для любого $e_h \in H^1(\Omega)$.

Согласно [5; 6] из оценки ошибки интерполяции $e_h = u - u_h$ функциями $N_l(l = \overline{1, L})$ в энергетической норме $\|u - u_h\|_A \leq ch^{p+1-m}$ следует оценка в среднеквадратичном для напряжений $\|\sigma - \sigma_h\|_0 \leq ch^{p+1-m}$, откуда в свою очередь получается оценка в среднеквадратичном для перемещений $\|u - u_h\|_0 \leq ch^{2(p+1-m)}$, где c — константа, измеряющая погрешность интерполяции. При $p = m = 1$ имеем: $\|\sigma - \sigma_h\|_0 \leq ch$, $\|u - u_h\|_0 \leq ch^2$, где $\sigma, \sigma_h \in H^0(\overline{\Omega})$ — точное и приближенное значения напряжений, соответствующие перемещениям $u, u_h \in H^1(\overline{\Omega})$. Из вложения $H^1(\overline{\Omega}) \subset H^0(\overline{\Omega})$ следует справедливость утверждения 1.

Если в формуле (3) узловые функции NL_i заменить функциями G_i :

$$N_i(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} G_i(\xi, \eta, \zeta), (\xi, \eta, \zeta) \in \overline{\Omega}_r^o, i = \overline{0, 6}, \\ L_i(\xi, \eta, \zeta), (\xi, \eta, \zeta) \in \overline{\Omega}_r^t, i = \overline{1, 4}, \end{cases} \quad (6)$$

где $G_i(\xi, \eta, \zeta)$ — кусочно-линейные функции [1], соответствующие узлам октаэдра (рис. 2б):

$$G_i(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} 1 - |\xi| - |\eta| - |\zeta|, i = 0, \\ \frac{1}{2}(|\xi| \pm \xi), i = 1, 3, \\ \frac{1}{2}(|\eta| \pm \eta), i = 2, 4, \\ \frac{1}{2}(|\zeta| \pm \zeta), i = 5, 6, \end{cases} \quad (7)$$

то аппроксимация решения задачи (1) пробными функциями

$$u_I(x, y, z) = \sum_{i=0}^6 G_i(x, y, z) q_i, \quad q_i = u(x_i, y_i, z_i),$$

$$u_I \in S^h, \quad S^h \subset H^1(\overline{\Omega}), \quad (x, y, z) \in \Omega_r^o,$$

имеет порядок $p = 1$.

Утверждение 2. Для кусочно-линейной интерполяции $u_h = \sum_{l=1}^L N_l q_l$, $u_h \in S^h$, $S^h \subset H^1(\bar{\Omega})$ решения краевой задачи (1), где функции $N_l (l = \overline{1, L})$ определяются равенствами (2), (6)—(7) при $m = 1$ ($2m$ — порядок дифференциального оператора A) справедливы оценки: $\|\sigma - \sigma_h\|_0 \leq ch$, $\|u - u_h\|_0 \leq ch^2$.

Доказательство: аналогично доказательству утверждения 1.

Таким образом, КЭ в форме октаэдра с набором кусочно-линейных базисных функций $N_{L_i} (i = \overline{1, 6})$ или $G_i (i = \overline{0, 6})$ совместен с линейным тетраэдром и предназначен для задач с дифференциальным оператором второго порядка. Поскольку дифференциальное уравнение, описывающее трехмерное напряженное состояние массивного тела конечного объема, есть уравнение Лапласа, МКЭ будет сходиться на решетке «тетра-окта» по перемещениям с порядком h^2 и по напряжениям — с порядком h . Заметим, что полилинейная аппроксимация перемещений $u = (u_x, u_y, u_z)^T$ конечными элементами в форме тетраэдра и гексаэдра, при условии, что в каждом узле по три степени свободы, имеет тот же порядок сходимости метода конечных элементов, что и кусочно-линейная на решетке «тетра-окта».

Потенциальная энергия для трехмерного напряженного состояния определяется равенством:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \varepsilon^T \sigma d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Bu)^T D(Bu) d\Omega, \quad (8)$$

где u — вектор перемещений, ε — вектор деформаций, σ — вектор напряжений, B — матрица дифференцирования, D — матрица упругости.

$$\begin{aligned} u &= (u_x, u_y, u_z)^T; \\ \varepsilon &= (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx})^T; \\ \sigma &= (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})^T, \end{aligned} \quad (9)$$

где матрица D для изотропного материала, E — модуль упругости, μ — коэффициент Пуассона.

Предположим, что в каждом узле октаэдра (рис. 3а) перемещения u_x, u_y, u_z вдоль координатных осей подчинены закону

$$u_x = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5|x| + a_6|y| + a_7|z|, \quad (10)$$

(u_y, u_z — аналогічно).

Коефіцієнтам $a_i, i = \overline{1, 7}$ полинома ставятся в соответствие степени свободы в виде перемещений $U_i, i = \overline{1, 6}$ и условие $a_1 = \sum_{i=1}^6 U_i$.

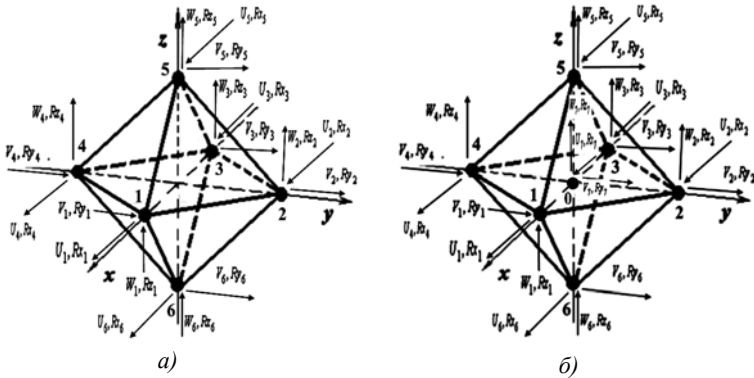


Рис. 3. Интерполяция перемещений на октаэдре: а) 6 узлов, б) 7 узлов

Интерполяция перемещений в явном виде запишется так:

$$u_x = \sum_{i=1}^6 NL_i(x, y, z)U_i; \quad (11)$$

где $NL_i(x, y, z)$ определяются из равенств (4) при $\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b},$

$\zeta = \frac{z}{c}, a, b, c > 0$. Интерполяция u_y, u_z выглядит аналогично.

Матрица жесткости, построенная на основе (8)—(11), приведена в табл. 1, в которой принято

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{27abc} \left(13b^2c^2\lambda + (a^2b^2 + 26b^2c^2 + a^2c^2)\nu \right); \\ a_2 &= \frac{1}{27abc} \left(-2b^2c^2\lambda + (a^2b^2 - 4b^2c^2 - 2a^2c^2)\nu \right); a_3 = \frac{5}{9}c\lambda; \\ a_4 &= \frac{1}{27abc} \left(-5b^2c^2\lambda + (a^2b^2 - 10b^2c^2 + a^2c^2)\nu \right); \\ a_5 &= -\frac{1}{27abc} \left(2b^2c^2\lambda + (2a^2b^2 + 4b^2c^2 - a^2c^2)\nu \right); a_6 = \frac{1}{3}b\lambda; \\ a_7 &= \frac{1}{27abc} \left(a^2c^2\lambda + (a^2b^2 + 13b^2c^2 + 2a^2c^2)\nu \right); \end{aligned}$$

$$a_8 = \frac{5}{9}cv; a_{10} = \frac{1}{27abc} \left(a^2c^2\lambda + (a^2b^2 - 5b^2c^2 + 2a^2c^2)v \right);$$

$$a_{11} = -\frac{1}{27abc} \left(-a^2c^2\lambda + (2a^2b^2 + 2b^2c^2 - 2a^2c^2)v \right);$$

$$a_{15} = \frac{1}{3}bv; a_{23} = \frac{1}{3}a\lambda;$$

$$a_{24} = \frac{1}{27abc} \left(a^2b^2\lambda + (2a^2b^2 + b^2c^2 + 13a^2c^2)v \right);$$

$$a_{25} = \frac{1}{27abc} \left(a^2b^2\lambda + (2a^2b^2 + b^2c^2 - 5a^2c^2)v \right).$$

Таблица 1

Матрица жесткости КЭ в форме октаэдра (6 узлов) для изотропного материала

U_1	V_1	W_1	U_2	V_2	W_2	U_3	V_3	W_3	U_4	V_4	W_4	U_5	V_5	W_5	U_6	V_6	W_6	Степени свободы
a_1	0	0	a_2	a_3	0	a_4	0	0	a_2	$-a_3$	0	a_5	0	a_6	a_5	0	$-a_6$	Rx_1
	a_7	0	a_8	a_9	0	0	a_{10}	0	$-a_8$	a_9	0	0	a_{11}	0	0	a_{11}	0	Ry_1
		a_{12}	0	0	a_{13}	0	0	a_{14}	0	0	a_{13}	a_{15}	0	a_{16}	$-a_{15}$	0	a_{16}	Rz_1
			a_{17}	0	0	a_2	$-\frac{1}{5}a_8$	0	a_{18}	0	0	a_{19}	0	0	a_{19}	0	0	Rx_2
				a_{20}	0	$-\frac{1}{5}a_5$	a_9	0	0	a_{21}	0	0	a_{22}	a_{23}	0	a_{22}	$-a_{23}$	Ry_2
					a_{24}	0	0	a_{13}	0	0	a_{25}	0	a_{26}	a_{27}	0	$-a_{26}$	a_{27}	Rz_2
						a_1	0	0	a_2	$\frac{1}{5}a_3$	0	a_5	0	$-a_6$	a_5	0	a_6	Rx_3
							a_7	0	$\frac{1}{5}a_8$	a_9	0	0	a_{11}	0	0	a_{11}	0	Ry_3
								a_{12}	0	0	a_{13}	$-a_{15}$	0	a_{16}	a_{15}	0	a_{16}	Rz_3
									a_{17}	0	0	a_{19}	0	0	a_{19}	0	0	Rx_4
										a_{20}	0	0	a_{22}	$-a_{23}$	0	a_{22}	a_{23}	Ry_4
											a_{24}	0	$-a_{26}$	a_{27}	0	a_{26}	a_{27}	Rz_4
												a_{28}	0	0	a_{29}	0	0	Rx_5
													a_{30}	0	0	a_{31}	0	Ry_5
														a_{32}	0	0	a_{33}	Rz_5
															a_{28}	0	0	Rx_6
																a_{30}	0	Ry_6
																	a_{32}	Rz_6

$\lambda = \frac{\mu E}{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}; \nu = \frac{E}{2(1 + \mu)}$

Симметрично

Остальные a_i получаются циклической перестановкой значений a, b, c .

Если интерполяция перемещений по закону (10) осуществляется на централизованной модели октаэдра (рис. 3б), коэффициенты $a_i, i = \overline{1,7}$ полиномов u_x, u_y, u_z однозначно определяются степенями свободы $U_i, V_i, W_i, i = \overline{1,7}$. Интерполяция перемещений u_x (u_y, u_z — аналогично) в явном виде запишется так:

$$u_x = \sum_{i=1}^6 G_i(x, y, z)U_i + G_0(x, y, z)U_7; \quad (12)$$

где $G_i(x, y, z)$ определяются из равенств (7) при $\xi = \frac{x}{a}, \eta = \frac{y}{b}, \zeta = \frac{z}{c}$, $a, b, c > 0$.

Соответствующая матрица жесткости приведена в табл. 2.

Таблица 2

Матрица жесткости КЭ в форме октаэдра (7 узлов)
для изотропного материала

U_1	V_1	W_1	U_2	V_2	W_2	U_3	V_3	W_3	U_4	V_4	W_4	U_5	V_5	W_5	U_6	V_6	W_6	U_7	V_7	W_7	Степени свободы	
a_1	0	0	0	a_2	0	0	0	0	0	$-a_2$	0	0	0	a_3	0	0	$-a_3$	$-a_1$	0	0	Rx_1	
a_4	0	a_5	0	0	0	0	0	0	$-a_5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-a_4$	0	Ry_1
	a_4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	a_6	0	0	$-a_6$	0	0	0	0	0	$-a_4$	Rz_1
		a_7	0	0	0	$-a_5$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-a_7$	0	0	0	Rx_2
			a_8	0	$-a_2$	0	0	0	0	0	0	a_9	0	0	$-a_9$	0	$-a_8$	0	0	0	0	Ry_2
				a_7	0	0	0	0	0	0	0	a_{10}	0	0	$-a_{10}$	0	0	0	0	$-a_7$	0	Rz_2
					a_1	0	0	a_2	0	0	$-a_3$	0	0	a_3	$-a_1$	0	0	0	0	0	0	Rx_3
						a_4	0	0	a_5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-a_4$	0	0	Ry_3
							a_4	0	0	$-a_6$	0	a_6	0	0	0	0	0	0	0	0	$-a_4$	Rz_3
								a_7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-a_7$	0	0	0	Rx_4
									a_8	0	0	$-a_9$	0	a_9	0	$-a_8$	0	0	0	0	0	Ry_4
										a_7	0	$-a_{10}$	0	a_{10}	0	0	0	0	0	$-a_7$	0	Rz_4
											a_{11}	0	0	0	0	0	0	$-a_{11}$	0	0	0	Rx_5
												a_{11}	0	0	0	0	0	0	$-a_{11}$	0	0	Ry_5
													a_{12}	0	0	0	0	0	0	$-a_{12}$	0	Rz_5
														a_{11}	0	0	0	$-a_{11}$	0	0	0	Rx_6
															a_{11}	0	0	$-a_{11}$	0	0	0	Ry_6
																a_{12}	0	0	$-a_{12}$	0	0	Rz_6
																	a_{13}	0	0	0	0	Rx_7
																		a_{14}	0	0	0	Ry_7
																			a_{15}	0	0	Rz_7

Выводы и перспективы дальнейших исследований.

1. В работе установлено, что октаэдр с набором узловых кусочно-линейных функций совместен с тетраэдром, координатными функциями которого являются L -координаты.
2. Условие полноты $p \geq m$ системы функций N_i для дифференциального оператора A порядка $2m$ выполняется при $m = 1, p = 1$, где p — порядок аппроксимации.
3. МКЭ сходится в среднеквадратичном на решетке «тетра-окта» по перемещениям с порядком h^2 и по напряжениям — с порядком h .
4. В задаче трехмерного напряженного состояния для КЭ в форме октаэдра построены матрицы жесткости (для 6 и 7 узлов интерполяции на октаэдре), что позволяет проводить сравнительный анализ структуры глобальной матрицы жесткости системы для решёток различной конфигурации.
5. В перспективе предполагается изучение характеристик октаэдра с полиномиальными базисами второго порядка [9] с целью определения класса задач, для которых он предназначен.

Список использованной литературы:

1. Greiner G. Hierarchical tetrahedral-octahedral subdivision for volume visualization / G. Greiner, R. Grosso // The Visual Computer. — 2000. — Vol. 16. — P. 357–369.
2. Городецкий А. С. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / А. С. Городецкий, В. И. Зоворицкий, А. И. Лантух-Лященко, А. О. Рассказов. — М. : Транспорт, 1981. — 183 с.
3. Хомченко А. Н. Две модели кусочно-линейной интерполяции на октаэдре / А. Н. Хомченко, А. П. Мотайло // Проблеми інформаційних технологій : зб. наук. пр. — Херсон : ХНТУ, 2011. — №1. — С. 47–50.
4. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М. : Мир, 1979. — 392 с.
5. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г. Стренг, Дж. Фикс. — М. : Мир, 1977. — 349 с.
6. Розин Л. А. Метод конечных элементов в применении к упругим системам / Л. А. Розин. — М. : Стройиздат, 1977. — 132 с.
7. Карпиловский В. С. Конструирование несовместных конечных элементов / В. С. Карпиловский. — К., 1980. — 50 с. — Деп. в УкрНИИТИ, №2153.
8. Михлин С. Г. Вариационные методы математической физики / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1970. — 512 с.
9. Мотайло А. П. Алгебраїчна побудова базиса шестивузлового октаэдра [Електронний ресурс] / А. П. Мотайло, А. Н. Хомченко // Наукові праці Вінницького національного технічного університету. — Вінниця : ВНТУ, 2011. — № 4. — Режим доступа: http://www.nbu.gov.ua/e-journals/VNTU/2011_4/2011-4.files/uk/1lapmsno_ua.pdf.

In this work we are investigated convergence of the finite element method of on lattices with cells in the form of octahedra and approximation's qualities of the piecewise linear coordinate functions on this carrier.

Key words: *octahedron, tetrahedron, piece wise linear coordinate functions, order of approximation, convergence in the mean-square.*

Отримано: 19.04.2013

УДК 004.942:519.876.5

Б. Б. Нестеренко^{*}, д-р техн. наук, професор,

М. А. Новотарський[†], д-р техн. наук, с.н.с.,

О. Б. Нестеренко^{**}, канд. фіз.-мат. наук

^{*}Інститут математики НАН України, м. Київ,

^{**}Національний університет технологій і дизайну, м. Київ

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ РУХУ РІДИНИ ПРИ ПЕРИСТАЛЬТИЧНИХ КОЛИВАННЯХ

Наведено основні принципи побудови нестационарної математичної моделі руху рідини під дією перистальтичних коливань. Для реалізації моделі на паралельних обчислювальних системах запропоновано використання паралельного локально-асинхронного методу. Наведено результати чисельних експериментів.

Ключові слова: *математична модель, локально-асинхронний метод, перистальтичний процес, триплекс.*

Вступ. Рух рідин в живих організмах найчастіше відбувається за рахунок руху обмежуючих поверхонь. Такі рухи поверхонь називають перистальтичними коливаннями. Головними системами організму людини, що використовують цей механізм переміщення рідин, є серцево-судинна та травна системи. Перистальтичні коливання також широко використовуються в техніці при створенні систем перекачування хімічно-активних речовин та у медицині для перекачування крові.

Дослідження фізичних процесів, що відбуваються при перистальтичних коливаннях мають велику актуальність. Адже знання властивостей біологічних систем дає можливість пояснити причини та попередити виникнення тих чи інших патологічних станів цих систем. Результати таких досліджень також можуть бути використані як рекомендації при оперативних втручаннях з метою забезпечення правильного функціонування систем організму шляхом модифікації фізичних параметрів.

Математичне моделювання сьогодні є одним із найбільш ефективних та економічно обґрунтованих способів дослідження перистальтичних процесів, які відбуваються в організмі людини. Цим пояс-