УДК 517.9, 517.977

А. А. Покутный*, канд. физ.-мат. наук,
В. В. Семенов,** д-р физ.-мат. наук, профессор
*Институт математики НАН Украины, г. Киев
**Киевский национальный университет
имени Тараса Шевченка, г. Киев

УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ СОБОЛЕВА-ГАЛЬПЕРНА С ЧИСТЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В работе представлено решение уравнения Соболева-Гальперна с чистым запаздыванием, а также получены условия управляемости.

Ключевые слова: *запаздывающий экспоненциал, прямой интеграл пространств Гильберта, управляемость.*

Вступление. Целью данной работы является развитие идей Хусаинова Д. Я. относительно дифференциальных уравнений с запаздыванием на случай пространств Гильберта. В его с коллегами работах [1; 2] было введено понятие запаздывающего экспоненциала для различных классов дифференциальных и разностных уравнений. С его помощью стало возможным представлять решение уравнений с чистым запаздыванием аналогично тому, как это делается в задачах Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Авторы решили перенести эти результаты на случай дифференциального уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в пространстве Гильберта. Этому и посвящена настоящая заметка. В работе также исследуется управляемость таким уравнением в некоторых случаях. Результаты этой работы частично были представлены на конференциях [3; 4].

Постановка задачи и основной результат. Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение с запаздыванием:

$$A_1 \frac{dy(t)}{dt} + A_2 y(t-\tau) = 0, t \in (0;+\infty); \tag{1}$$

$$y(t) = \varphi(t),\ t \in [-\tau; 0], \tag{2}$$

где $A_j : H \to H$ — линейные неограниченные операторы, действующие в оснащенном пространстве Гильберта *H*, с областями определения $D(A_j) = V_j$ плотно и непрерывно вложенными в пространство Гильберта *H*. Пространство $V = V_1 \bigcap V_2$ также предполагается плотным в V_j, а значит и в *H*. Операторы A_j таковы, что $A_j = A_j^* \in L(V; V')$, а оператор A_1 дополнительно предполагается положительно — определенным

($(A_1 v, v) \geq \alpha_1 \| v \|_1^2, \alpha_1 > 0$). Для установления теорем, касающихся разрешимости уравнения (1), (2) напомним основные понятия прямого интеграла гильбертовых пространств [5, с. 149; 6, с. 28].

Определение. Пусть задано некоторое множество Λ, с заданной на нем мерой μ и пусть также каждой точке $\lambda \in \Lambda$ сопоставлено гильбертово пространство $H(\lambda)$, таким образом, что пространства $H(\lambda), \lambda \in \Lambda$ образуют μ — измеримое поле.

Пространство измеримых относительно меры μ функций $\lambda \to f(\lambda)$, для которых $\| f \|_{\hat{H}}^2 = \int_\Lambda \| f(\lambda) \|_{H(\lambda)}^2 \, d\mu(\lambda) < \infty$ традиционно называется *прямым интегралом пространств Гильберта* и обозначается $\hat{H} = \int_\Lambda \oplus H(\lambda) d\mu(\lambda)$.

Если $f, g \in \hat{H}$, то их скалярное произведение определяется равенством

$$(f, g)_{\hat{H}} = \int_\Lambda (f(\lambda), g(\lambda))_{H(\lambda)} d\mu(\lambda) .$$

Так построенное пространство является гильбертовым.

Для получения представления решения уравнения (1), (2) будем дополнительно предполагать, чтобы резольвенты операторов A_j коммутировали на области определения.

В силу коммутативности [5, с. 161; 6] существует прямой интеграл гильбертовых пространств

$$\hat{H} = \iint \oplus H(\lambda_1, \lambda_2) d\mu(\lambda_1, \lambda_2), \; \lambda_1 \geq \alpha_1,$$

и такая изометрия U пространства H на $\hat{H}$, что $U(A_j x) = \lambda_j U(x)$, $\forall x \in V$. При этом, как известно [5, с. 158], области определения операторов A_j перейдут соответственно в множество вектор-функций

$$\hat{V}_j = \{h(\lambda_1, \lambda_2) : \int_{\alpha_1}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_j^2 \| h(\lambda_1, \lambda_2) \|_{H(\lambda_1, \lambda_2)}^2 \, d\mu(\lambda_1, \lambda_2) < \infty\}.$$

Обозначим через $\hat{y}(t, \lambda) = \hat{y}(t, \lambda_1, \lambda_2) = (Uy(t))(\lambda)$. Действуя изометрией на (1), (2) получим следующую задачу для $\hat{y}$ в пространстве Гильберта $H(\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\lambda_1 \frac{d\hat{y}(t, \lambda)}{dt} + \lambda_2 \hat{y}(t - \tau, \lambda) = 0, \tag{3}$$

$$\hat{y}(t, \lambda) = \hat{\varphi}(t, \lambda), \; t \in [-\tau; 0]. \tag{4}$$

Поскольку $\lambda_1 \geq \alpha_1 > 0$, то задача (3), (4) равносильна следующей:

$$\frac{d\widehat{y}(t,\lambda)}{dt} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\widehat{y}(t-\tau,\lambda),$$

$$\widehat{y}(t,\lambda) = \widehat{\varphi}(t,\lambda),\ t \in [-\tau;0].$$

Для формального представления решений уравнения (3), (4) введем понятие операторного запаздывающего экспоненциала:

$$e^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} = \begin{cases} \Theta,\ -\infty < t < -\tau, \\ I, \quad -\tau \le t < 0, \\ I - \frac{1}{1!}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}tI,\ 0 \le t < \tau, \\ \ldots \\ I - \frac{1}{1!}\frac{\lambda_2}{\lambda_1}tI + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 (t-\tau)^2 I + \ldots + \frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k (t-(k-1)\tau)^k I, \\ (k-1)\tau \le t < k\tau. \end{cases}$$

Нетрудно увидеть, что запаздывающий экспоненциал удовлетворяет следующему операторному уравнению с запаздыванием:

$$\frac{d}{dt}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t},\ (k-1)\tau < t < k\tau,\ k = 0,1,2,\ldots \tag{5}$$

$$e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} = I,\ -\tau \le t \le 0, \tag{6}$$

и его производная терпит разрыв в точках $-\tau, 0$. Рассмотрим два случая:

1) $\varphi(t) = \varphi \in V_2$.

В этом случае, исходя из (5), (6) решение задачи (3), (4) может быть представлено в виде:

$$\widehat{y}(t,\lambda) = e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}\widehat{\varphi}(t,\lambda).$$

Тогда решение задачи (1), (2) будет выражаться так:

$$y(t) = U^{-1}\widehat{y}(t,\lambda).$$

Таким образом мы установили следующую теорему:

Теорема 1. Пусть

$$\int\limits_{\alpha_1}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\lambda_2|^2 \| e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t} U\varphi \|^2_{H(\lambda_1,\lambda_2)}\, d\mu(\lambda_1,\lambda_2) < \infty.$$

Тогда решение задачи (1), (2) может быть представлено в виде

$$y(t) = U^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}U\varphi.$$

2) $\varphi(t)\in C^1([-\tau;0];V)$.

В этом случае нетрудно установить следующий результат (например непосредственной подстановкой в исходное уравнение).

Теорема 2. Пусть

$$\int_{\alpha_1}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\lambda_2|^2\| e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}U\varphi(-\tau)+\int_{-\tau}^{0}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t-\tau-s)}U\frac{d}{ds}\varphi(s)ds\|_{H(\lambda)}^2\,d\mu(\lambda)<\infty.$$

Тогда решение задачи (1), (2) может бать представлено в виде

$$y(t)=U^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}U\varphi(-\tau)+\int_{-\tau}^{0}U^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t-\tau-s)}U\frac{d}{dt}\varphi(s)ds.$$

Управляемость уравнением Соболева Гальперна. Пусть теперь H — сепарабельное пространство Гильберта. Рассмотрим следующую задачу управления:

$$A_1\frac{dy(t)}{dt}+A_2y(t-\tau)=Bu(t), \tag{7}$$

$$y(t)=\varphi,\ t\in[-\tau;0), \tag{8}$$

где оператор $B\in L(H)$. Необходимо подобрать управление $u(t)$ таким образом, чтобы решение $y(t)$ проходило в момент t_1 через заданное значение y^*. Управление $u(t)$ будем искать из пространства $L_2([-\tau;0],H)$ (вне этого отрезка управление полагается нулевым). Зафиксируем в пространстве H ортонормированный базис $\{e_k\}_{k\ge 0}$. Тогда условие $y(t_1)=y^*$ эквивалентно тому, что $(y(t_1),e_k)=(y^*,e_k)$, $k\ge 0$. Решение уравнения (7), (8) будет иметь вид:

$$u(t)=U^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}U\varphi+\int_{-\tau}^{0}U^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t-\tau-s)}UBu(s)ds\,. \tag{9}$$

Условие $y(t_1)=y^*$ тогда можно записать в виде

$$y^*-U^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_1}U\varphi=Lu(s),$$

где оператор

$$L:L_2([-\tau;0],H)\to H,\ Lu(s)=\int_{-\tau}^{0}U^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t_1-\tau-s)}UBu(s)ds\,.$$

Для удобства дальнейшего изложения отметим, что оператор $e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(t_1-\tau-s)}$ представляется в виде $c(s)I$, где $c(s)$ представляет собой многочлен. В силу того, что $\{e_k\}_{k\ge 0}$ — ортонормированный базис, вектор-функцию $u(s)$ можно разложить в ряд Фурье $u(s) = = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k(s)e_k$, $u_k(s) = (u(s), e_k)$. В дальнейшем условие управляемости сведем к известной проблеме моментов [7]. Условие того, что $u(t) \in L_2([-\tau;0], H)$ будет эквивалентно тому, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\tau}^{0} u_k^2(s)ds < \infty . \tag{10}$$

Рассмотрим два случая.

1. Пусть $B = I$ — тождественный оператор. Используя представление (9) условие $(y(t_1), e_k) = (y^*, e_k), k \ge 0$ очевидно будет эквивалентно разрешимости системы интегральных уравнений:

$$\int_{-\tau}^{0} \widehat{c}(s)u_k(s)ds = (y^*, e_k) - (U^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_1} U\varphi, e_k),\ k \ge 0; \widehat{c}(s) = U^{-1}c(s)U.$$

Обозначим через $\alpha_k = (y^*, e_k) - (U^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_1} U\varphi, e_k)$. Так как ядро $\widehat{c}(s)$ непрерывно, то условие управляемости будет равносильно тому, чтобы $y^* - U^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_1} U\varphi \in H$ или другими словами

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 = \sum_{k=0}^{\infty} ((y^*, e_k) - (U^{-1}e_\tau^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t_1} U\varphi, e_k))^2 < \infty, \tag{11}$$

в том случае, когда $\widehat{c}(s) \ne 0$ на $[-\tau;0]$. Это условие дает ограничения на выбор момента времени t_1 при котором существует нужное нам управление. Поясним выше сказанное. При выполнении условия $\widehat{c}(s) \ne 0$ на $[-\tau;0]$ коэффициенты Фурье управления $u(s)$ можно выбрать следующим образом $u_k(s) = \dfrac{\alpha_k}{\tau\, \widehat{c}(s)}$. Для того, чтобы выполнялось (10) (условие принадлежности управления $u(t) \in L_2([-\tau;0], H)$) необходимо и достаточно тогда, чтобы было выполненным приведенное выше условие (11) $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\tau}^{0} u_k^2(s)ds = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{-\tau}^{0} \dfrac{\alpha_k^2}{\tau^2\, \widehat{c}^2(s)} ds = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k^2 \int_{-\tau}^{0} \dfrac{1}{\tau^2\, \widehat{c}^2(s)} ds$. Поскольку величина $\int_{-\tau}^{0} \dfrac{1}{\tau^2\, \widehat{c}^2(s)} ds$ конечна в силу того, что $\widehat{c}(s) \ne 0$, то условие (10) в таком случае будет эквивалентно условию (11). Таким образом получаем следующее утверждение.

Теорема 3. Для управляемости уравнения (7) с $B = I$, $u(t) \in L_2([-\tau;0],H)$ и $\widehat{c}(s) \neq 0$ на $[-\tau;0]$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=0}^{\infty}((y^*,e_k)-(U^{-1}e_{\tau}^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}U\varphi,e_k))^2 < \infty.$$

2. Пусть B — компактный оператор. В этом случае выбрав ортонормированный базис из собственных векторов оператора B (за которым сохраним обозначение e_k) согласно спектральной теории будем иметь, что $Be_k = \mu_k e_k$, где $\mu_k > 0$ — собственные значения оператора B. В этом случае условие управляемости будет эквивалентно разрешимости следующей системы интегральных уравнений

$$\int_{-\tau}^{0}\widehat{c}(s)u_k(s)ds = \frac{1}{\mu_k}((y^*,e_k)-(U^{-1}e_{\tau}^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}U\varphi,e_k)),\ k \geq 0.$$

В этом случае будет справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. Для управляемости уравнения (7) с компактным оператором B и $\widehat{c}(s) \neq 0$ на $[-\tau;0]$, необходимо и достаточно выполнения условия

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\mu_k^2}((y^*,e_k)-(U^{-1}e_{\tau}^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}t}U\varphi,e_k))^2 < \infty.$$

Поговорим теперь немного относительно условия $\widehat{c}(s) \neq 0$. Это условие будет равносильно тому, что момент управления t_1 должен выбираться не произвольным образом. Обозначим через $\beta_1^k, \beta_2^k, ..., \beta_k^k$ нули многочлена $\widehat{c}(s)$ на полуинтервалах $s \in (t_1-(k+1)\tau; t_1-k\tau]$, $k \geq 0$. Тогда, чтобы $\widehat{c}(s) \neq 0$ должен выполняться набор следующих условий на момент времени t_1 : $t_1 \geq 0$, если $t_1 \in [k\tau;(k+1)\tau)$ то $\beta_1^k, \beta_2^k, ..., \beta_k^k \notin (t_1-(k+1)\tau;0]$.

Выводы. Полученная конструкция решений задачи (1), (2) позволяет установить ряд важных свойств, а также дает возможность строить теорию разрешимости для различного класса уравнений в частных производных. Благодаря точному представлению можно построить теорию бифуркаций задачи (1), (2) как в линейном так и слабонелинейном случаях, что и предполагается сделать в дальнейшем.

Список использованной литературы:

1. Khusainov D. Ya. Linear autonomous time-delay system with permutation matrices solving / D. Ya. Khusainov, G. V. Shuklin // Stud. Univ. Zilina Math. Ser. — 2003. — P. 101–108.
2. Diblik J. Controllability of linear discrete with constant coefficients and pure delay / J. Diblik, D. Khusainov, M. Ruzickova // SIAM J.Control Optim. — 2008. — Vol. 47, № 3. — P. 1140–1149.
3. Покутний О. О. Розв'язки еволюційних рівнянь Соболєва-Гальперна з чистим запізненням / О. О. Покутний, В. В. Семенов // III міжнародна конференція «Обчислювальна та прикладна математика» присвячена пам'яті академіка НАН України Івана Івановича Ляшка. — К., 2009. — С. 57.
4. Покутний О. О. Керованість еволюційних рівнянь типу Соболєва-Гальперна з чистим запізненням / О. О. Покутний, В. В. Семенов // International workshop Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2009). — Kamyanets-Podilsky, 2009. — P. 95–96.
5. Гельфанд И. М. Обобщенные функции / И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин. — М. : ГИФМЛ: 1961. — Вып. 4. — 472 с.
6. Лионс Ж. Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж. Л. Лионс, Э. Мадженес. — М. : Мир, 1971. — 371 с.
7. Габасов Р. Качественная теория оптимальных процессов / Р. Габасов, Ф. Кириллова. — М. : Наука, 1971. — 507 с.

Solution of Sobolev-Galpern's equation with pure delay is represented. Conditions of controllability are founded.

Key words: *delay exponential, direct integral of Hilbert spaces, controllability.*

Отримано: 15.04.2013