3. Верлань А. Ф. О применении сплайнов при численном решении одного интегрального уравнения задачи восстановления сигналов / А. Ф. Верлань, Б. Б. Абдусатаров, В. И. Биленко // Доклады АН УССР, Сер. А. — 1981. — №4. — С. 72–75.
4. Крылов В. И. Вычислительные методы / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. — М. : Наука, 1977. — Т. II. — 400 с.
5. Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям: Методы решения / А. В. Манжиров, А. Д. Полянин. — М. : Факториал Пресс, 2000. — 384 с.
6. Никольский С.М. Квадратурные формулы / С. М. Никольский ; с доб. Н. П. Корнейчука. — 4-е изд., доп. — М. : Наука, 1988. — 254 с.
7. Стечкин С. Б. Сплайны в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. Н. Субботин. — М. : Наука, 1976. — 248 с.

In this paper considered is the issue the development and evaluation of errors numerical algorithm for solving integral equations Volterra through the use of interpolation splines. Compared with traditional algorithms, this algorithm has a small number of computational operations in step cyclic processes and structures can provide a synthesis of specialized computing devices, focused on solving the problem of signal restoration in real time.

Key words: *approximation, numerical, the function of two variables, error.*

Отримано: 18.02.2013

УДК 517.91:532.2

Г. І. Готинчан*, старший викладач
І. З. Готинчан,** канд. фіз.-мат. наук

*Чернівецький факультет національного технічного університету «Харківський політехнічний інститут», м. Чернівці
** Чернівецький торговельно-економічний інститут Київського національного торговельно-економічного університету, м. Чернівці

ГІБРИДНЕ ІНТЕГРАЛЬНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ (КОНТОРОВИЧА-ЛЄБЄДЄВА)-ФУР'Є-БЕССЕЛЯ-ЕЙЛЕРА НА СЕГМЕНТІ ПОЛЯРНОЇ ОСІ

Методом дельта-подібної послідовності (ядро Діріхле) запроваджено гібридне інтегральне перетворення, породжене на сегменті з трьома точками спряження гібридним диференціальним оператором (Конторовича-Лєбєдєва)-Фур'є-Бесселя-Ейлера.

Ключові слова: *гібридний диференціальний оператор, гібридне інтегральне перетворення, спектр, спектральна функція, основна тотожність.*

Постановка проблеми та її аналіз. Метод відокремлення змінних і породжене ним інтегральне перетворення (Фур'є, Ганкеля, Меліна і т.д.) дало можливість одержати інтегральне зображення аналітичного розв'язку достатньо широкого класу задач математичної фізики однорідного середовища. Таким чином, до середини XX-го століття було створено ефективний математичний апарат інтегрування задач математичної фізики однорідного середовища. З появою в технологічних процесах композитних матеріалів ми маємо справу з неоднорідним (кусково-однорідним) середовищем. Було створено гібридні інтегральні перетворення, які дали можливість проінтегрувати достатньо широкий клас задач математичної фізики кусково-однорідних середовищ. Запровадженню одного із типів гібридного інтегрального перетворення присвячена ця стаття.

Основна частина. Розглянемо диференціальні оператори Конторовича-Лєбєдєва $B_{\alpha_1} = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_1 + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha_1^2 - \lambda^2 r^2$ [1], Фур'є $\frac{d^2}{dr^2}$ [2], Бесселя $B_{\nu,\alpha_2} = \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_2 + 1) r^{-1} \frac{d}{dr} - \left(\nu^2 - \alpha_2^2\right) r^{-2}$ [3] та Ейлера $B_{\alpha_3}^* = r^2 \frac{d^2}{dr^2} + (2\alpha_3 + 1) r \frac{d}{dr} + \alpha_3^2$ [2]; $2\alpha_j + 1 > 0, \nu \geq \alpha_2$, $\lambda \in (0, \infty)$.

Запровадимо інтегральне перетворення, породжене на множині

$$I_3 = \left\{ r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, R_3) \cup (R_3, R_4); R_4 < \infty \right\}$$

гібридним диференціальним оператором (ГДО)

$$M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)} = \theta\left(r\right) \theta(R_1 - r) a_1^2 B_{\alpha_1} + a_2^2 \theta(r - R_1) \theta(R_2 - r) \frac{d^2}{dr^2} + \\ + a_3^2 \theta(r - R_2) \theta(R_3 - r) B_{\nu,\alpha_2} + a_4^2 \theta(r - R_3) \theta(R_4 - r) B_{\alpha_3}^*, \; (\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2), \tag{1}$$

де $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда [4], $a_j > 0, j = \overline{1,4}$.

Означення. Областю визначення ГДО $M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$ назвемо множину G вектор-функцій $g(r) = \left\{ g_1(r), g_2(r), g_3(r), g_4(r) \right\}$ з такими властивостями:

1) вектор-функція

$$f(r) = \left\{ B_{\alpha_1}\left[g_1(r) \right]; g_2''(r); B_{\nu,\alpha_2}\left[g_3(r) \right]; B_{\alpha_3}^*\left[g_4(r) \right] \right\}$$

неперервна на множині I_3;

2) функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\lim_{r \to 0} \left[r^\gamma g_1(r) \right] = 0, \quad \left[(\alpha_{22}^4 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^4) g_4(r) \right] \Bigg|_{r = R_4} = 0; \tag{2}$$

3) функції $g_j(r)$ задовольняють умови спряження

$$\left[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr}+\beta_{j1}^k)g_k(r)-(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr}+\beta_{j2}^k)g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k}=0;\ j=1,2,\ k=\overline{1,3}. \quad (3)$$

У подальшому вважаємо, що виконані умови на коефіцієнти:

$$\alpha_{jm}^k \ge 0,\ \ \beta_{jm}^k \ge 0,\ \ c_{jk}=\alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k-\alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k,$$

$$c_{1k}\cdot c_{2k}>0;\ \ \alpha_{22}^4\ge 0,\ \ \beta_{22}^4\ge 0,\ \ \alpha_{22}^4+\beta_{22}^4\ne 0.$$

Введемо до розгляду числа:

$$a_{11}^k=\alpha_{11}^k\alpha_{22}^k-\alpha_{21}^k\alpha_{12}^k,\ \ a_{12}^k=\alpha_{11}^k\beta_{22}^k-\alpha_{21}^k\beta_{12}^k,$$

$$a_{21}^k=\beta_{11}^k\alpha_{22}^k-\beta_{21}^k\alpha_{12}^k,\ \ a_{22}^k=\beta_{11}^k\beta_{22}^k-\beta_{21}^k\beta_{12}^k,\ k=\overline{1,3}.$$

Лема 1. Для вектор-функцій $u(r)=\{u_1(r),u_2(r),u_3(r),u_4(r)\}\in G$ та $v(r)=\{v_1(r),v_2(r),v_3(r),v_4(r)\}\in G$ справджується базова тотожність:

$$\left[u_k'(r)v_k(r)-u_k(r)v_k'(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}\left[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)-u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)\right]\Big|_{r=R_k}. \quad (4)$$

Доведення. Розглянемо алгебраїчну систему:

$$\alpha_{j1}^k u_k'(R_k)+\beta_{j1}^k u_k(R_k)=\alpha_{j2}^k u_{k+1}'(R_k)+\beta_{j2}^k u_{k+1}(R_k). \quad (5)$$

За правилами Крамера знаходимо функціональні залежності:

$$\begin{aligned} u_k'(R_k)&=c_{1k}^{-1}\left[a_{21}^k u_{k+1}'(R_k)+a_{22}^k u_{k+1}(R_k)\right],\\ u_k(R_k)&=-c_{1k}^{-1}\left[a_{11}^k u_{k+1}'(R_k)+a_{12}^k u_{k+1}(R_k)\right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Залежності (6) справедливі й для компонент v_j вектор-функції $v(r)$:

$$\begin{aligned} v_k'(R_k)&=c_{1k}^{-1}\left[a_{21}^k v_{k+1}'(R_k)+a_{22}^k v_{k+1}(R_k)\right],\\ v_k(R_k)&=-c_{1k}^{-1}\left[a_{11}^k v_{k+1}'(R_k)+a_{12}^k v_{k+1}(R_k)\right]. \end{aligned} \quad (7)$$

Безпосереднім обчисленням знаходимо:

$$\begin{aligned} u_k'(r)v_k(r)-u_k(r)v_k'(r)&=c_{1k}^{-2}(a_{11}^k a_{22}^k-a_{12}^k a_{21}^k)(u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)-\\ -u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r))&=c_{1k}^{-1}c_{2k}\left[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)-u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)\right], \end{aligned} \quad (8)$$

тому що $a_{11}^k a_{22}^k-a_{12}^k a_{21}^k=c_{1k}c_{2k}$.

Доведення леми завершено.

Зауваження: Якщо умови спряження неоднорідні, тобто

$$\left[(\alpha_{j_1}^k \frac{d}{dr}+\beta_{j_1}^k)u_k(r)-(\alpha_{j_1}^k \frac{d}{dr}+\beta_{j_1}^k)u_{k+1}(r)\right]\Big|_{r=R_k}=\omega_{jk};\ j=1,2,\ k=\overline{1,3}, \quad (9)$$

то базова тотожність має вигляд:

$$u_k'(r)v_k(r)-u_k(r)v_k'(r)=c_{1k}^{-1}c_{2k}\left[u_{k+1}'(r)v_{k+1}(r)-u_{k+1}(r)v_{k+1}'(r)\right]+$$
$$+c_{1k}^{-1}[(\alpha_{12}^k\frac{d}{dr}+\beta_{12}^k)v_{k+1}(r)\Big|_{r=R_k}\cdot\omega_{2k}-(\alpha_{22}^k\frac{d}{dr}+\beta_{22}^k)v_{k+1}(r)\Big|_{r=R_k}\cdot\omega_{1k}]. \qquad (10)$$

При цьому $v(r)\in G$.

Визначимо числа

$$a_1^2\sigma_1=1,\ a_2^2\sigma_2=\frac{c_{21}}{c_{11}}R_1^{2\alpha_1+1},\ a_3^2\sigma_3=\frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}},$$

$$a_4^2\sigma_4=\frac{c_{21}c_{22}c_{23}}{c_{11}c_{12}c_{13}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{R_3^{2\alpha_2+1}}{R_3^{2\alpha_3+1}},$$

вагову функцію

$$\sigma(r)=\theta(r)\theta(R_1-r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\sigma_2+$$
$$+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}+\theta(r-R_3)\theta(R_4-r)\sigma_4 r^{2\alpha_3-1} \qquad (11)$$

та скалярний добуток:

$$(u(r),v(r))=\int_0^{R_4}u(r)v(r)\sigma(r)dr\equiv\int_0^{R_1}u_1(r)v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$
$$\int_{R_1}^{R_2}u_2(r)v_2(r)\sigma_2dr++\int_{R_2}^{R_3}u_3(r)v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr+\int_{R_3}^{R_4}u_4(r)v_4(r)\sigma_4 r^{2\alpha_3-1}dr. \qquad (12)$$

Лема 2. Гібридний диференціальний оператор $M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$ самоспряжений, тобто має місце рівність для $u\in G$ та $v\in G$:

$$\left(M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[u(r)\right],v(r)\right)=\left(u(r),M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[v(r)\right]\right). \qquad (13)$$

Доведення. Згідно правила (12) маємо:

$$(M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[u(r)\right],v(r))=\int_0^{R_1}(a_1^2B_{\alpha_1}\left[u_1(r)\right])v_1(r)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}(a_2^2\frac{d^2u_2}{dr^2})v_2(r)\sigma_2dr+\int_{R_2}^{R_3}(a_3^2B_{\nu,\alpha_2}\left[u_3(r)\right])v_3(r)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr+ \qquad (14)$$
$$+\int_{R_3}^{R_4}(a_4^2B_\alpha^*\left[u_4(r)\right])v_4(r)\sigma_4 r^{2\alpha_3-1}dr.$$

Проінтегруємо під знаками інтегралів в (14) два рази частинами:

$$(M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[u(r)\right],v(r))=\left[a_1^2r^{2\alpha_1+1}\sigma_1\left(\frac{du_1}{dr}v_1-u_1\frac{dv_1}{dr}\right)\right]\Bigg|_0^{R_1}+$$

$$+\int_0^{R_1} u_1(r)\left(a_1^2 B_{\alpha_1}\left[v_1(r)\right]\right)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr+$$

$$+\left[a_2^2\sigma_2\left(\frac{du_2}{dr}v_2-u_2\frac{dv_2}{dr}\right)\right]\Bigg|_{r=R_1}^{r=R_2}+\int_{R_1}^{R_2} u_2(r)(a_2^2 v_2''(r))\sigma_2 dr+$$

$$+\left[a_3^2\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}\left(\frac{du_3}{dr}v_3-u_3\frac{dv_3}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_2}^{R_3}+ \tag{15}$$

$$+\int_{R_2}^{R_3} u_3(r)\left(a_3^2 B_{\nu,\alpha_2}\left[v_3(r)\right]\right)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr+$$

$$+\left[a_4^2\sigma_4 r^{2\alpha_3+1}\left(\frac{du_4}{dr}v_4-u_4\frac{dv_4}{dr}\right)\right]\Bigg|_{R_3}^{R_4}+\int_{R_3}^{R_4}\left(a_4^2 B_\alpha^*\left[v_4(r)\right]\right)u_4(r)\sigma_4 r^{2\alpha_3-1}dr.$$

В силу умов обмеженості в точці $r=0$ перший доданок при $r\to 0$ дорівнює нулю. В силу базової тотожності (4) в точці $r=R_1$ маємо:

$$a_1^2 R_1^{2\alpha_1+1}\sigma_1(u_1'v_1-u_1v_1')\Big|_{r=R_1}-a_2^2\sigma_2(u_2'v_2-u_2v_2')\Big|_{r=R_1}=$$

$$=\left(a_1^2 R_1^{2\alpha_1+1}\sigma_1\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2\right)\times\left(u_2'(R_1)v_2(R_1)-u_2(R_1)v_2'(R_1)\right)= \tag{16}$$

$$=0\cdot(u_2'(R_1)v_2(R_1)-u_2(R_1)v_2'(R_1))=0,$$

тому, що в силу вибору чисел σ_1 та σ_2 вираз

$$a_1^2 R_1^{2\alpha_1+1}\sigma_1\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2=\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{c_{11}}\cdot c_{21}-\frac{c_{21}}{c_{11}}\cdot R_1^{2\alpha_1+1}=\frac{c_{21}}{c_{11}}R_1^{2\alpha_1+1}(1-1)\equiv 0.$$

Внаслідок базової тотожності (1.4) при $k=2$ маємо:

$$a_2^2\sigma_2(u_2'v_2-u_2v_2')\Big|_{r=R_2}-a_3^2 R_2^{2\alpha_2+1}\sigma_3(u_3'v_3-u_3v_3')\Big|_{r=R_2}=$$

$$=\left(a_2^2\sigma_2\frac{c_{22}}{c_{12}}-a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1}\right)(u_3'v_3-u_3v_3')\Big|_{r=R_2}=0, \tag{17}$$

тому, що в силу вибору чисел σ_2 та σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2\frac{c_{22}}{c_{12}}-a_3^2\sigma_3 R_2^{2\alpha_2+1}=\frac{c_{21}}{c_{11}}R_1^{2\alpha_1+1}\frac{c_{22}}{c_{12}}-$$

$$-\frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}R_2^{2\alpha_2+1}=\frac{c_{21}c_{22}}{c_{11}c_{12}}R_1^{2\alpha_1+1}(1-1)\equiv 0.$$

Внаслідок базової тотожності (4) при $k=3$ знаходимо:

$$a_3^2\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}(u_3'v_3-u_3v_3')\Big|_{r=R_3}-a_4^2\sigma_4 R_3^{2\alpha_3+1}(u_4'v\ \ -u_4v_4')\Big|_{r=R_3}=$$
$$=\left(a_3^2\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}\frac{c_{23}}{c_{13}}-a_4^2\sigma_4 R_3^{2\alpha_3+1}\right)(u_4'(r)v_4(r)-u_4(r)v_4'(r))\Big|_{r=R_3}=0, \tag{18}$$

тому, що в силу вибору чисел σ_3 та σ_4 вираз:

$$\left(a_2^3\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1}\frac{c_{23}}{c_{13}}-a_4^2\sigma_4 R_3^{2\alpha_3+1}\right)=(\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}R_3^{2\alpha_2+1}\frac{c_{23}}{c_{13}}-$$
$$-\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{c_{23}}{c_{13}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{R_3^{2\alpha_2+1}}{R_3^{2\alpha_3+1}}R_3^{2\alpha_3+1})=\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{c_{23}}{c_{13}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}R_3^{2\alpha_2+1}(1-1)\equiv 0.$$

Якщо $\alpha_{22}^4\neq 0$, то

$$\left(\frac{du_4}{dr}v_4(r)-u_4(r)\frac{dv_4}{dr}\right)\Bigg|_{r=R_4}=(\alpha_{22}^4)^{-1}\left[\left(\alpha_{22}^4\frac{du_4}{dr}+\beta_{22}^4u_4\right)\Big|_{r=R_4}v_4(R_4)-\right.$$
$$\left.-\beta_{22}^4u_4(R_4)v_4(R_4)-\alpha_{22}^4u_4(R_4)\frac{dv_4}{dr}\Big|_{r=R_4}\right]=(\alpha_{22}^4)^{-1}[0\cdot v_4(R_4)- \tag{19}$$
$$-u_4(R_4)(\alpha_{22}^4\frac{d}{dr}+\beta_{22}^4)v_4\Big|_{r=R_4}]=(\alpha_{22}^4)^{-1}(0\cdot v_4(R_4)-0\cdot u_4(R_4))=0.$$

Рівності (16)—(19) показують,що в (15) позаінтегральні доданки перетворюються в нуль. Рівність (15) набуває вигляду :

$$(M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[u(r)\right],v(r))=(u(r),M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[v(r)\right]).$$

Доведення леми завершено.

Висновок. Спектр ГДО $M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$ дійсний. Оскільки ГДО $M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$ має одну особливу точку $r=0$, то спектр його неперервний [5]. Можна вважати, що спектральний параметр $\beta\in(0,\infty)$. Спектральному параметру β відповідає дійсна вектор-функція

$$V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r,\beta)=\sum_{k=1}^{4}\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)V_{\nu,\alpha_2;k}^{(\alpha)}(r,\beta),R_0=0. \tag{20}$$

При цьому функції $V_{\nu,\alpha_2;k}^{(\alpha)}(r,\beta)$ повинні задовольняти відповідно диференціальні рівняння:

$$(B_{\alpha_1}+b_1^2)V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)=0,r\in(0,R_1),b_1^2=a_1^{-2}(\beta^2+k_1^2),k_1^2\geq 0,$$
$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_2^2\right)V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta)=0,r\in(R_1,R_2),b_2^2=a_2^{-2}(\beta^2+k_2^2),k_2^2\geq 0,$$

$$(B_{\nu,\alpha_2}+b_3^2)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\beta)=0, r\in(R_2,R_3), b_3^2=a_3^{-2}(\beta^2+k_3^2), k_3^2\ge 0,$$
$$(B^*_{\alpha_3}+b_4^2)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\beta)=0, r\in(R_3,R_4), b_4^2=a_4^{-2}(\beta^2+k_4^2), k_4^2\ge 0, \qquad (21)$$

крайові умови (2) та умови спряження (3).

Фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Конторовича-Лєбєдєва $(B_{\alpha_1}+b_1^2)v=0$ складають функції $C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)$ та $D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)$ [1]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Фур'є $\left(\frac{d^2}{dr^2}+b_2^2\right)v=0$ складають функції $\cos b_2 r$ та $\sin b_2 r$ [2]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Бесселя $(B_{\nu,\alpha_2}+b_3^2)v=0$ складають функції $J_{\nu,\alpha_2}(b_3 r)$ та $N_{\nu,\alpha_2}(b_3 r)$ [3]; фундаментальну систему розв'язків для диференціального рівняння Ейлера $(B^*_{\alpha_3}+b_4^2)v=0$ складають функції $r^{-\alpha_3}\cos(b_4\ln r)$ та $r^{-\alpha_3}\sin(b_4\ln r)$ [2].

Якщо тепер покласти

$$V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(r,\beta)=A_1C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)+B_1D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1), r\in(0,R_1),$$
$$V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(r,\beta)=A_2\cos b_2 r+B_2\sin b_2 r, r\in(R_1,R_2),$$
$$V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\beta)=A_3J_{\nu,\alpha_2}(b_3 r)+B_3N_{\nu,\alpha_2}(b_3 r), r\in(R_2,R_3), \qquad (22)$$
$$V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\beta)=A_4r^{-\alpha_3}\cos(b_4\ln r)+B_4r^{-\alpha_3}\sin(b_4\ln r), r\in(R_3,R_4),$$

то умови спряження (3) й крайова умова в точці $r=R_4$ для визначення восьми величин $A_j, B_j\ (j=\overline{1,4})$ дають однорідну алгебраїчну систему з семи рівнянь:

$$X^{11}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1,b_1)A_1+X^{12}_{\alpha_1;j1}(\lambda R_1,b_1)B_1-$$
$$-v^{11}_{j2}(b_2R_1)A_2-v^{12}_{j2}(b_2R_1)B_2=0, j=1,2,$$
$$v^{21}_{j2}(b_2R_2)A_2+v^{22}_{j2}(b_2R_2)B_2-u^{21}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2)A_3-u^{22}_{\nu,\alpha_2;j2}(b_3R_2)B_3=0, \qquad (23)$$
$$u^{31}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_3R_3)A_3+u^{32}_{\nu,\alpha_2;j1}(b_3R_3)B_3-$$
$$-Y^{31}_{\alpha_3;j2}(b_4,R_3)A_4-Y^{32}_{\alpha_3;j2}(b_4,R_3)B_4=0,$$
$$Y^{41}_{\alpha_3;22}(b_4,R_4)A_4+Y^{42}_{\alpha_3;22}(b_4,R_4)B_4=0.$$

Алгебраїчна система (23) сумісна. Її розв'язок одержується стандартним способом [6].

Припустимо,що $A_4 = A_0 Y^{42}_{\alpha_3;22}(b_{4,} R_4)$, $B_4 = -A_0 Y^{41}_{\alpha_3;22}(b_{4,} R_4)$, де $A_0 \neq 0$ підлягає визначенню.

При такому виборі величин A_4, B_4 останнє рівняння стає тотожністю. Тоді для знаходження величин A_3, B_3 маємо алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$u^{31}_{v,\alpha_2;j1}(b_3R_3)A_3 + u^{32}_{v,\alpha_2;j1}(b_3R_3)B_3 = A_0[Y^{42}_{\alpha_3;22}(b_{4,}R_4)Y^{31}_{\alpha_3;j2}(b_{4,}R_3) - \\ -Y^{41}_{\alpha_3;22}(b_{4,}R_4)Y^{32}_{\alpha_3;j2}(b_{4,}R_3)] \equiv A_0\delta_{\alpha_3;j}(b_4;R_3,R_4),\ j=1,2. \tag{24}$$

Звідси знаходимо, що при $q_{\alpha_2}(\beta) = 2\pi^{-1}c_{13}(b_3^{2\alpha_2}R_3^{2\alpha_2+1})^{-1} \neq 0$

$$A_3 = \frac{A_0}{q_{\alpha_2}(\beta)}\Big[\delta_{\alpha_3;1}(b_4;R_3,R_4)u^{32}_{v,\alpha_2;21}(b_3R_3) - \\ -\delta_{\alpha_3;2}(b_4;R_3,R_4)u^{32}_{v,\alpha_2;11}(b_3R_3)\Big],$$

$$B_3 = \frac{A_0}{q_{\alpha_2}(\beta)}\Big[\delta_{\alpha_3;2}(b_4;R_3,R_4)u^{31}_{v,\alpha_2;11}(b_3R_3) - \\ -\delta_{\alpha_3;1}(b_4;R_3,R_4)u^{31}_{v,\alpha_2;21}(b_3R_3)\Big]. \tag{25}$$

При відомих A_3, B_3 для визначення A_2, B_2 маємо алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$v^{21}_{j1}(b_2R_2)A_2 + v^{22}_{j1}(b_2R_2)B_2 = A_0\left[q_{\alpha_2}(\beta)\right]^{-1} a^{\alpha_3}_{v,\alpha_2;j}(\beta),\ j=1,2. \tag{26}$$

У системі (26) прийняті позначення:

$$\delta_{v,\alpha_2;jk}(b_3R_2,b_3R_3) = u^{22}_{v,\alpha_2;j2}(b_3R_2)u^{31}_{v,\alpha_2;k1}(b_3R_3) - u^{21}_{v,\alpha_2;j2}(b_3R_2)u^{32}_{v,\alpha_2;k1}(b_3R_3),$$

$$a^{\alpha_3}_{v,\alpha_2;j}(\beta) = \delta_{\alpha_3;2}(b_4;R_3,R_4)\delta_{v,\alpha_2;j1}(b_3R_2,R_3b_3) - \\ -\delta_{\alpha_3;1}(b_4;R_3,R_4)\delta_{v,\alpha_2;j2}(b_3R_2,R_3b_3).$$

Розв’язком системи (26) є функції:

$$A_2 = \frac{A_0}{q_{\alpha_2}c_{12}b_2}\Big[a^{\alpha_3}_{v,\alpha_2;1}(\beta)v^{22}_{21}(b_2R_2) - a^{\alpha_3}_{v,\alpha_2;2}(\beta)v^{22}_{11}(b_2R_2)\Big],$$

$$B_2 = \frac{A_0}{q_{\alpha_2}c_{12}b_2}\Big[a^{\alpha_3}_{v,\alpha_2;2}(\beta)v^{21}_{11}(b_2R_2) - a^{\alpha_3}_{v,\alpha_2;1}(\beta)v^{21}_{21}(b_2R_2)\Big]. \tag{27}$$

При відомих A_2, B_2 для визначення величин A_1, B_1 маємо алгебраїчну систему з двох рівнянь:

$$X^{11}_{\alpha_{11};j1}(\lambda R_1,b_1)A_1 + X^{12}_{\alpha_{11};j1}(\lambda R_1,b_1)B_1 = \frac{A_0}{q_{\alpha_2}c_{12}b_2} b^{\alpha_3}_{v,\alpha_2;j}(\beta),\ j=1,2. \tag{28}$$

Тут беруть участь функції:

$$\delta_{jk}(b_2R_1,b_2R_2)=v_{j2}^{11}(b_2R_1)v_{k1}^{22}(b_2R_2)-v_{j2}^{12}(b_2R_1)v_{k1}^{21}(b_2R_2),\ j,k=1,2;$$

$$b_{\nu,\alpha_2;j}^{\alpha_3}(\beta)=a_{\nu,\alpha_2;1}^{\alpha_3}(\beta)\delta_{j2}(b_2R_1,b_2R_2)-a_{\nu,\alpha_2;2}^{\alpha_3}(\beta)\delta_{j1}(b_2R_1,b_2R_2),\ j=1,2.$$

Алгебраїчна система (28) має єдиний розв'язок [6]:

$$\begin{gathered}A_0=c_{12}b_2q_{\alpha_1}(\beta)q_{\alpha_2}(\beta);\ A_1=-\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta),\\ B_1=\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta),q_{\alpha_1}=\frac{c_{11}sh(\pi b_1)}{\pi\lambda^{2\alpha_1}R_1^{2\alpha_1+1}},\\ \omega_{\nu,\alpha_2;j}^{(\alpha)}(\beta)=X_{\alpha_1;21}^{1j}(\lambda R_1,b_1)b_{\nu,\alpha_2;1}^{\alpha_3}(\beta)-\\ -X_{\alpha_1;11}^{1j}(\lambda R_1,b_1)b_{\nu,\alpha_2;2}^{\alpha_3}(\beta),\ j=1,2.\end{gathered}\tag{29}$$

Підставимо визначені формулами (25), (27) та (29) величини A_j, B_j у рівності (22). Отримаємо функції:

$$V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)=\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)D_{\alpha_1}(\lambda r,b_1)-\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)C_{\alpha_1}(\lambda r,b_1),$$

$$V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta)=q_{\alpha_1}(\beta)\left[a_{\nu,\alpha_2;1}^{\alpha_3}(\beta)\varphi_{21}^2(b_2R_2,b_2r)-a_{\nu,\alpha_2;2}^{\alpha_3}(\beta)\varphi_{11}^2(b_2R_2,b_2r)\right],$$

$$\varphi_{j1}^2(b_2R_2,b_2r)=v_{j1}^{22}(b_2R_2)\cos b_2r-v_{j1}^{21}(b_2R_2)\sin b_2r,\ j=1,2;$$

$$\begin{gathered}V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta)=q_{\alpha_1}(\beta)c_{12}b_2\Big\{\delta_{\alpha_3;2}(b_4;R_3,R_4)\times\\ \times\left[u_{\nu,\alpha_2;11}^{31}(b_3R_3)N_{\nu,\alpha_2}(b_3r)-u_{\nu,\alpha_2;11}^{32}(b_3R_3)J_{\nu,\alpha_2}(b_3r)\right]\\ -\delta_{\alpha_3;1}(b_4;R_3,R_4)\left[u_{\nu,\alpha_2;21}^{31}(b_3R_3)N_{\nu,\alpha_2}(b_3r)-u_{\nu,\alpha_2;21}^{32}(b_3R_3)J_{\nu,\alpha_2}(b_3r)\right]\Big\}\end{gathered}\tag{30}$$

$$\begin{gathered}V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(r,\beta)=q_{\alpha_1}(\beta)c_{12}b_2q_{\alpha_2}\times\\ \times\left[Y_{\alpha_3;22}^{42}(b_4,R_4)r^{-\alpha_3}\cos(b_4\ln r)-Y_{\alpha_3;22}^{41}(b_4,R_4)r^{-\alpha_3}\sin(b_4\ln r)\right].\end{gathered}$$

Згідно рівності (20) спектральна вектор-функція $V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)$ визначена.

Наявність вагової функції $\sigma(r)$, спектральної вектор-функції $V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)$ та спектральної щільності

$$\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)=2\beta\lambda^{2\alpha_1}(sh(\pi b_1))^{-1}\left(\left[\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)\right]^2+\left[\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)\right]^2\right)^{-1}$$

дозволяє визначити пряме $H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$ та обернене $H_{\nu,\alpha_2}^{-(\alpha)}$ гібридне інтегральне перетворення, породжене на множині I_3 ГДО $M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$ [7]:

$$H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[g(r)\right]=\int\limits_0^{R_4} g(r)V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r,\beta)\sigma(r)dr\equiv\tilde{g}(\beta), \tag{31}$$

$$H_{\nu,\alpha_2}^{-(\alpha)}\left[\tilde{g}(\beta)\right]=\int\limits_0^{\infty}\tilde{g}(\beta)V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r,\beta)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta\equiv g(r). \tag{32}$$

Математичним обґрунтуванням правил (31), (32) є твердження.

Теорема 1. (про інтегральне зображення) Якщо функція

$$f(r)=[\theta(r)\theta(R_1-r)r^{\alpha_1-\frac{1}{2}}+\theta(r-R_1)\theta(R_2-r)\cdot 1+$$

$$+\theta(r-R_2)\theta(R_3-r)r^{\alpha_2+\frac{1}{2}}+\theta(r-R_3)\theta(R_4-r)r^{\alpha_3-\frac{1}{2}}]g(r)$$

неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на множині $(0,R_4)$, то для будь-якого $r\in I_3$ справджується інтегральне зображення

$$g(r)=\int\limits_0^{\infty}V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r,\beta)\int\limits_0^{R_4} g(\rho)V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta)d\beta. \tag{33}$$

Доведення. Для $\beta\neq\lambda$ функції $V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)$ та $V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\lambda)$ задовольняють відповідно диференціальні рівняння Конторовича-Лєбєдєва:

$$\left[a_1^2B_{\alpha_1}+(\beta^2+k_1^2)\right]V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)=0,$$

$$\left[a_1^2B_{\alpha_1}+(\lambda^2+k_1^2)\right]V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\lambda)=0.$$

Помножимо перше рівняння на функцію $r^{2\alpha_1-1}V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\lambda)$, а друге рівняння помножимо на функцію $r^{2\alpha_1-1}V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)$ і віднімемо від першого друге:

$$a_1^{-2}(\beta^2-\lambda^2)r^{2\alpha_1-1}V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\lambda)V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)=$$

$$=\frac{d}{dr}\left[r^{2\alpha_1+1}\left(V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)\frac{dV_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\lambda)}{dr}-V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\lambda)\frac{dV_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)}{dr}\right)\right]. \tag{34}$$

Функції $V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta)$ та $V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\lambda)$ задовольняють відповідно диференціальні рівняння Фур’є:

$$\left[a_2^2\frac{d^2}{dr}+(\beta^2+k_2^2)\right]V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta)=0,$$

$$\left[a_2^2\frac{d^2}{dr}+(\lambda^2+k_2^2)\right]V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\lambda)=0.$$

Помножимо перше рівняння на функцію $V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(r,\lambda)$, а друге — на функцію $V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_i;2}(r,\beta)$ і віднімемо від першого друге:

$$a_2^{-2}(\beta^2-\lambda^2)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(r,\lambda)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(\rho,\beta)=$$

$$=\frac{d}{dr}\left[\left(V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(r,\beta)\frac{dV^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(r,\beta)}{dr}-V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(r,\lambda)\frac{dV^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(r,\beta)}{dr}\right)\right]. \quad (35)$$

Функції $V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\beta)$ та $V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_i;3}(r,\lambda)$ задовольняють відповідно диференціальні рівняння Бесселя:

$$\left[a_3^2B_{\alpha_1}+(\beta^2+k_3^2)\right]V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\beta)=0,$$

$$\left[a_3^2B_{\alpha_1}+(\lambda^2+k_3^2)\right]V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\lambda)=0.$$

Помножимо перше рівняння на функцію $r^{2\alpha_2+1}V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\lambda)$, а друге рівняння — на функцію $r^{2\alpha_2+1}V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\beta)$ і віднімемо від першого друге:

$$a_3^{-2}(\beta^2-\lambda^2)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\lambda)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\beta)r^{2\alpha_2-1}=$$

$$=\frac{d}{dr}\left[r^{2\alpha_2+1}\left(V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\beta)\frac{dV^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\lambda)}{dr}-V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\lambda)\frac{dV^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;3}(r,\beta)}{dr}\right)\right]. \quad (36)$$

Функції $V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_i;4}(r,\beta)$ та $V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_{i1};4}(r,\lambda)$ для $\beta\neq\lambda$ задовольняють відповідно диференціальні рівняння Ейлера:

$$\left[a_4^2B^*_{\alpha_3}+(\beta^2+k_4^2)\right]V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\beta)=0,$$

$$\left[a_4^2B^*_{\alpha_3}+(\lambda^2+k_4^2)\right]V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\lambda)=0.$$

Помножимо перше рівняння на функцію $r^{2\alpha_3-1}V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\lambda)$, а друге рівняння — на функцію $r^{2\alpha_3-1}V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\beta)$ і віднімемо від першого рівняння друге:

$$a_4^{-2}(\beta^2-\lambda^2)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\lambda)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\beta)r^{2\alpha_3-1}=$$

$$=\frac{d}{dr}\left[r^{2\alpha_3+1}\left(V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\beta)\frac{dV^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\lambda)}{dr}-V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\lambda)\frac{dV^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(r,\beta)}{dr}\right)\right]. \quad (37)$$

Помножимо рівність (34) на $a_1^2\sigma_1 dr$ і проінтегруємо від $\varepsilon>0$ до R_1, помножимо рівність (35) на $a_2^2\sigma_2 dr$ і проінтегруємо від R_1 до R_2, помножимо рівність (36) на $a_3^2\sigma_3 dr$ і проінтегруємо від R_2 до R_3, помножимо рівність (37) на $a_4^2\sigma_4 dr$ і проінтегруємо від R_3 до R_4. Склавши одержані рівності, маємо:

$$\int\limits_{\varepsilon}^{R_4} V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r,\beta)V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr = -\varepsilon^{2\alpha_1+1}(\beta^2-\lambda^2)^{-1}\times$$
$$\times\left[{V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}}'(\varepsilon,\lambda)V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\varepsilon,\beta)-V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\varepsilon,\lambda){V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}}'(\varepsilon,\beta)\right]. \tag{38}$$

Позаінтегральні доданки в точках $r=R_j\,(j=\overline{1,3})$ перетворюються в нуль в силу вибору чисел $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ та σ_4 й внаслідок базової тотожності (4). Доданок в точці $r=R_4$ рівний нулю в силу (19).

Згідно з роботою [1] введемо до розгляду функції:

$$G_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta,\lambda)=\left[\Gamma_1(b_1(\lambda))\Gamma_2(b_1(\beta))-\Gamma_1(b_1(\beta))\Gamma_2(b_1(\lambda))\right]\times$$
$$\times[\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\lambda)+\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\lambda)]+[\Gamma_1(b_1(\lambda))\Gamma_1(b_1(\beta))-$$
$$-\Gamma_2(b_1(\beta))\Gamma_2(b_1(\lambda))]\times\left[\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\lambda)-\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\lambda)\right],$$
$$G_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta,\beta)=0;$$

$$G_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta,\lambda)=\left[\Gamma_1(b_1(\beta))\Gamma_2(b_1(\lambda))-\Gamma_1(b_1(\lambda))\Gamma_2(b_1(\beta))\right]\times$$
$$\times[\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\lambda)-\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\lambda)]+[\Gamma_2(b_1(\lambda))\Gamma_2(b_1(\beta))-$$
$$-\Gamma_1(b_1(\beta))\Gamma_1(b_1(\lambda))]\times\left[\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\lambda)+\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\lambda)\right],$$
$$G_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta,\beta)\neq 0.$$

$$G_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(\beta,\lambda)=\left[\Gamma_1(b_1(\beta))\Gamma_1(b_1(\lambda))-\Gamma_2(b_1(\lambda))\Gamma_2(b_1(\beta))\right][\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\lambda)-$$
$$-\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\lambda)]+[\Gamma_2(b_1(\lambda))\Gamma_1(b_1(\beta))+\Gamma_2(b_1(\beta))\Gamma_1(b_1(\lambda))]\times$$
$$\times\left[\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\lambda)+\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\lambda)\right],G_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(\beta,\beta)\neq 0;$$

$$G_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(\beta,\lambda)=\left[\Gamma_1(b_1(\beta))\Gamma_1(b_1(\lambda))+\Gamma_2(b_1(\lambda))\Gamma_2(b_1(\beta))\right][\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\lambda)+$$
$$+\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\lambda)]+[\Gamma_1(b_1(\lambda))\Gamma_2(b_1(\beta))-\Gamma_1(b_1(\beta))\Gamma_2(b_1(\lambda))]\times$$
$$\times\left[\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\lambda)-\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\lambda)\right],$$

$$G_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(\beta,\beta)=(\left[\Gamma_1(b_1(\beta)\right]^2+\left[\Gamma_2(b_1(\beta)\right]^2)(\left[\omega_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta)\right]^2+\left[\omega_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta)\right]^2).$$

Оскільки [8]

$$\left[\Gamma_1(b_1(\beta)\right]^2+\left[\Gamma_2(b_1(\beta)\right]^2=(\Gamma_1(b_1(\beta)+i\Gamma_2(b_1(\beta))(\Gamma_1(b_1(\beta)-i\Gamma_2(b_1(\beta))$$

$$\equiv\Gamma(1+i(b_1(\beta))\Gamma(1-i(b_1(\beta))=\frac{\pi(b_1(\beta))}{sh(\pi(b_1(\beta)))}\equiv\left|\Gamma(1+i(b_1(\beta))\right|^2,$$

то для $G^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(\beta,\beta)$ отримуємо вираз:

$$G^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;4}(\beta,\beta)=\frac{\pi(b_1(\beta))}{sh(\pi(b_1(\beta)))}(\left[\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(\beta)\right]^2+$$

$$+\left[\omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;2}(\beta)\right]^2)=\frac{2\pi\beta\lambda_*^{2\alpha_1}b_1(\beta)}{(sh\pi b_1)^2\,\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\beta)}.$$

Визначимо функцію

$$R^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\varepsilon,\beta,\lambda)=V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}{}'(\varepsilon,\lambda)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(\varepsilon,\beta)-V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}(\varepsilon,\lambda)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2;1}{}'(\varepsilon,\beta).$$

У результаті елементарних перетворень знаходимо для функції $R^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\varepsilon,\beta,\lambda)$ асимптотичний вираз:

$$R^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\varepsilon,\beta,\lambda)\approx\frac{1}{2}\frac{\lambda_*^{-2\alpha_1}\varepsilon^{-(2\alpha_1+1)}sh(\pi b_1(\beta))sh(\pi b_1(\lambda))}{\pi b_1(\beta)\pi b_1(\lambda)}\times$$

$$\times\Big\{G^{(\mu)}_{\nu,\alpha_2;1}(\beta,\lambda)q^+(\beta,\lambda)\cos\left[q^-(\beta,\lambda)\ln x\right]+$$

$$+G^{(\lambda)}_{\nu,\alpha_2;2}(\beta,\lambda)q^-(\beta,\lambda)\cos\left[q^+(\beta,\lambda)\ln x\right]-$$

$$-G^{(\lambda)}_{\nu,\alpha_2;3}(\beta,\lambda)q^-(\beta,\lambda)\sin\left[q^+(\beta,\lambda)\ln x\right]+$$

$$-G^{(\lambda)}_{\nu,\alpha_2;4}(\beta,\lambda)q^+(\beta,\lambda)\sin\left[q^-(\beta,\lambda)\ln x\right]\Big\},$$

$$q^{\pm}(\beta,\lambda)=b_1(\beta)\pm b_1(\lambda);\beta^2-\lambda^2=$$

$$=\beta^2+k_1^2-(\lambda^2+k_1^2)=b_1^2(\beta)-b_1^2(\lambda);x=2^{-1}\lambda_*\varepsilon.$$

Припустимо, що функція $y(\lambda)$ неперервна, абсолютно сумовна й має обмежену варіацію на $(0,\infty)$. Обчислимо невласний подвійний інтеграл

$$I=\int\limits_0^{R_4}\int\limits_0^{\infty}y(\lambda)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(r,\lambda)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(r,\beta)\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\lambda)\sigma(r)dr. \qquad (40)$$

За означенням збіжності невласного інтегралу маємо:

$$I=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{\infty}y(\lambda)(\int\limits_{\varepsilon}^{R_4}V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(r,\beta)V^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(r,\lambda)\sigma(r)dr)\Omega^{(\alpha)}_{\nu,\alpha_2}(\lambda)d\lambda=$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\infty y(\lambda) \left\{ -\frac{\varepsilon^{2\alpha_1+1} R_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\varepsilon,\beta,\lambda)}{b_1^2(\beta) - b_1^2(\lambda)} \right\} \Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\lambda) d\lambda \approx -\frac{1}{2} \frac{\lambda_*^{2\alpha_1} sh(\pi b_1(\beta))}{\pi b_1(\beta)} \times$$

$$\times \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_0^\infty \frac{y(\lambda)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}}{\left|\Gamma(1+ib_1(\lambda))\right|^2} \frac{G_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(\beta,\lambda)}{b_1(\beta) - b_1(\lambda)} \cos\left[q^-(\beta,\lambda) \ln x \right] d\lambda + \right.$$

$$+ \int_0^\infty \frac{y(\lambda)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)} G_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(\beta,\lambda)}{\left|\Gamma(1+ib_1(\lambda))\right|^2 q^+(\beta,\lambda)} \cos\left[q^+(\beta,\lambda) \ln x \right] d\lambda -$$

$$- \int_0^\infty \frac{y(\lambda)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}}{\left|\Gamma(1+ib_1(\lambda))\right|^2} \frac{G_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(\beta,\lambda)}{q^+(\beta,\lambda)} \times \sin\left[q^+(\beta,\lambda) \ln x \right] d\lambda +$$

$$\left. + \int_0^\infty \frac{y(\lambda)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}}{\left|\Gamma(1+ib_1(\lambda))\right|^2} G_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(\beta,\lambda) \frac{\sin\left[(b_1(\beta) - b_1(\lambda)) \ln x \right] d\lambda}{b_1(\beta) - b_1(\lambda)} \right\} \equiv$$

$$\equiv -\frac{1 \cdot \lambda_*^{-\alpha_1}}{2\left|\Gamma(1+ib_1(\beta))\right|^2} \lim_{\varepsilon \to 0} \left[I_1(\beta,x) + I_2(\beta,x) - I_3(\beta,x) + I_4(\beta,x) \right].$$

Внаслідок леми Рімана [9]

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_m(\beta,x) \equiv \lim_{\varepsilon \to 0} I_m(\beta, 2^{-1} a_* \varepsilon) = 0, m = \overline{1,3}. \tag{42}$$

Внаслідок леми Діріхле [9]

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ -\frac{\pi}{2} \frac{\lambda_*^{2\alpha_1} sh(\pi b_1(\beta))}{\pi b_1(\beta)} \int_0^\infty y(\lambda)\Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\lambda) G_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(\beta,\lambda) \times \right.$$
$$(\left|\Gamma(1+ib_1(\lambda))\right|^2)^{-1} \times \frac{1}{\pi} \frac{\sin\left[(b_1(\lambda) - b_1(\beta)) \right] \ln(2^{-1}\lambda_* \varepsilon)}{b_1(\lambda) - b_1(\beta)} d\lambda = y(\beta), \tag{43}$$

якщо $\beta = \lambda \in (0,\infty)$, і дорівнює нулю, якщо $\beta = \lambda \notin (0,\infty)$

Висновок: $I = y(\beta)$, якщо $\beta \in (0,\infty)$ та $I = 0$, якщо $\beta \notin (0,\infty)$.

Нехай функція

$$g(r) = \int_0^\infty y(\beta) V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r,\beta) \Omega_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\beta) d\beta. \tag{44}$$

Помножимо рівність (44) на вираз $V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r,\lambda)\sigma(r)dr$ і проінтегруємо по r від $r = 0$ до $r = R_4$. Внаслідок рівності (43) одержуємо, що

$$\int_0^{R_4} g(r) V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(r,\lambda) \sigma(r) dr = y(\lambda) \equiv I(\lambda). \tag{45}$$

Підставивши згідно формули (45) функцію

$$y(\beta) = \int_0^{R_4} g(\rho) V_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}(\rho,\beta)\sigma(\rho)d\rho$$

у рівність (44), приходимо до інтегрального зображення (33).

Доведення теореми завершено.

Зауваження. Якщо вектор-функція $g(r)$ кусково-неперервна, то в лівій частині рівності (33) треба замінити $g(r)$ на $\frac{1}{2}\left[g(r+0)+g(r-0)\right]$.

Визначимо величини та функції:

$$d_1 = a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1} : c_{11,} d_2 = a_2^2\sigma_2 : c_{12}, d_3 = a_3^2\sigma_3 R_3^{2\alpha_2+1} : c_{13};$$

$$\tilde{g}_1(\beta) = \int_0^{R_1} g_1(r) V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)\sigma_1 r^{2\alpha_1-1}dr, \quad \tilde{g}_2(\beta) = \int_{R_1}^{R_2} g_2(r) V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta)\sigma_2 dr,$$

$$\tilde{g}_3(\beta) = \int_{R_2}^{R_3} g_3(r) V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta)\sigma_3 r^{2\alpha_2+1}dr,$$

$$\tilde{g}_4(\beta) = \int_{R_3}^{R_4} g_4(r) V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta)\sigma_4 r^{2\alpha_3-1}dr,$$

$$\mathrm{Z}_{\nu,\alpha_{2;};i2}^{(\mu),k}(\beta) = (\alpha_{i2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{i2}^k) V_{\nu,\alpha_2;k+1}^{(\alpha)}(r,\beta)\Big|_{r=R_k}; i=1,2; k=\overline{1,3}.$$

В основі застосування правил (31), (32) до розв’язання відповідних задач знаходиться основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$.

Теорема 2 (про основну тотожність). Якщо вектор-функція

$$f(r) = \left\{B_{\alpha_1}\left[g_1(r)\right]; g_2''(r); B_{\nu,\alpha_1}\left[g_3(r)\right]; B_{\alpha_3}^*\left[g_4(r)\right]\right\}$$

неперервна на I_3, а функції $g_j(r)$ задовольняють крайові умови

$$\begin{gathered} \lim_{r\to 0}\left[r^{2\alpha_1+1}(g_1'(r)V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)} - g_1(r)V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)\,\prime})\right] = 0, \\ (\alpha_{22}^4 \frac{d}{dr} + \beta_{22}^4) g_4(r)\Big|_{r=R_4} = g_R, \end{gathered} \tag{46}$$

та умови спряження

$$\left[(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k) g_k(r) - (\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k) g_{k+1}(r)\right]\Bigg|_{r=R_k} = \omega_{jk}, j=1,2; k=\overline{1,3}, \tag{47}$$

то має місце основна тотожність інтегрального перетворення ГДО $M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}$, визначеного рівністю (1):

$$H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[g(r)\right]\right]=-\beta^2\tilde{g}(\beta)-$$
$$-\sum_{i=1}^{4}k_1^2\tilde{g}_i(\beta)+(\alpha_{22}^4)^{-1}V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(R_4,\beta)a_4^2\sigma_4R_4^{2\alpha_3+1}g_R+ \quad (48)$$
$$+\sum_{k=1}^{3}d_k\left[Z_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha);k}(\beta)\omega_{2k}-Z_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha);k}(\beta)\omega_{1k}\right].$$

Доведення. Згідно правила (31) маємо:

$$H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[g(r)\right]\right]=\int_0^{R_1}(a_1^2B_{\alpha_1}\left[g_1(r)\right])V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)\sigma_1r^{2\alpha_1-1}dr+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}(a_2^2\frac{d^2g_2}{dr^2})V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta)\sigma_2dr+\int_{R_2}^{R_3}(a_3^2B_{\nu,\alpha_2}\left[g_3(r)\right])V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta)\sigma_3r^{2\alpha_2+1}dr+ \quad (49)$$
$$+\int_{R_3}^{R_4}(a_4^2B_{\alpha_3}^{*}\left[g_4(r)\right])V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(r,\beta)\sigma_4r^{2\alpha_3-1}dr.$$

Проінтегруємо в (49) під знаками інтегралів два рази:

$$H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[g(r)\right]\right]=\left[a_1^2\sigma_1r^{2\alpha_1+1}(g_1'V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}-g_1V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)\prime})\right]\Big|_0^{R_1}+$$
$$+\int_0^{R_1}g_2(r)(a_1^2B_{\alpha_1}V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)})\sigma_2r^{2\alpha_1-1}dr+(a_2^2\sigma_2(g_2'V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}-g_2V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)\prime})\Big|_{R_1}^{R_2}+$$
$$+\int_{R_1}^{R_2}g_2(r)(a_2^2\frac{d^2}{dr^2}V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)})\sigma_2dr+[(a_3^2\sigma_3r^{2\alpha_2+1}\times \quad (50)$$
$$\times(g_3'V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}-g_3V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)\prime})]\Big|_{R_2}^{R_3}+\int_{R_2}^{R_3}g_3(r)(a_3^2B_{\nu,\alpha_2}V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)})\sigma_3r^{2\alpha_2+1}dr+$$
$$+[a_4^2\sigma_4r^{2\alpha_3+1}\times(g_4'V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}-g_4V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)\prime})]\Big|_{R_3}^{R_4}+\int_0^{R_1}g_4(r)(a_4^2B_{\alpha_3}^{*}V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)})\sigma_4r^{2\alpha_3-1}dr.$$

В силу умови обмеження в точці $r=0$ маємо:

$$\lim_{r\to 0}\left[a_1^2\sigma_1r^{2\alpha_1+1}(\frac{dg_1}{dr}V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)-g_1(r)\frac{dV_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}}{dr})\right]=0. \quad (51)$$

В силу крайової умови в точці $r=R_4$ маємо:

$$a_4^2\sigma_4 R_4^{2\alpha_3+1}(\frac{dg_4}{dr}V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(r,\beta)-g_4\,\frac{dV_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}}{dr})\Big|_{r=R_4}=$$

$$=a_4^2\sigma_4 R_4^{2\alpha_3+1}[(\alpha_{22}^4)^{-1}(\alpha_{22}^4\,\frac{dg_4}{dr}\times V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(r,\beta)-\alpha_{22}^4 g_4\,\frac{dV_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}}{dr})]\Big|_{r=R_4}= \quad (52)$$

$$=a_4^2\sigma_4 R_4^{2\alpha_3+1}(\alpha_{22}^4)^{-1}V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(R_4,\beta)[(\alpha_{22}^4\,\frac{d}{dr}+\beta_{22}^4)g_4(r)]\Big|_{r=R_4}+$$

$$+a_4^2\sigma_4 R_4^{2\alpha_3+1}(\alpha_{22}^4)^{-1}g_4(R_4)\cdot 0=(\alpha_{22}^4)^{-1}V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(R_4,\beta)a_4^2\sigma_4 R_4^{2\alpha_3+1}g_R.$$

Із диференціальних тотожностей

$$\left[a_1^2 B_{\alpha_1}+(\beta^2+k_1^2)\right]V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)=0,\left[a_2^2\,\frac{d^2}{dr^2}+(\beta^2+k_2^2)\right]V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta)=0,$$

$$\left[a_3^2 B_{\nu,\alpha_2}+(\beta^2+k_3^2)\right]V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta)=0,\left[a_4^2 B_{\alpha_3}^*+(\beta^2+k_4^2)\right]V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(r,\beta)=0$$

знаходимо, що

$$\begin{aligned}
&a_1^2 B_{\alpha_1}\left[V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)\right]=-V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}(r,\beta)(\beta^2+k_1^2),\\
&a_2^2\,\frac{d^2}{dr^2}\left[V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta)\right]=-(\beta^2+k_2^2)V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}(r,\beta),\\
&a_3^2 B_{\nu,\alpha_2}\left[V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta)\right]=-(\beta^2+k_3^2)V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)}(r,\beta),\\
&a_4^2 B_{\alpha_3}^*\left[V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(r,\beta)\right]=-(\beta^2+k_4^2)V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(r,\beta).
\end{aligned} \quad (53)$$

Скористаємося базовою тотожністю (10):

$$g_k'(R_k)V_{\nu,\alpha_2;k}^{(\alpha)}(R_k,\beta)-g_k(R_k)\frac{dV_{\nu,\alpha_2;k}^{(\alpha)}}{dr}\Bigg|_{r=R_k}=\frac{c_{2k}}{c_{1k}}[g_{k+1}'(R_k)V_{\nu,\alpha_2;k+1}^{(\alpha)}(R_k,\beta)-$$

$$-g_{k+1}(R_k)\frac{dV_{\nu,\alpha_2;k+1}^{(\alpha)}}{dr}]+\frac{1}{c_{1k}}[Z_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha),k}(\beta)\omega_{2k}-Z_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha),k}(\beta)\omega_{1k}]. \quad (54)$$

В точці $r=R_1$ при $k=1$ маємо:

$$a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}(g_1'V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)}-g_1V_{\nu,\alpha_2;1}^{(\alpha)'})\Big|_{r=R_1}-a_2^2\sigma_2(g_2'V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}-g_2V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)'})\Big|_{r=R_1}=$$

$$=(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\,\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2)(g_2'V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)}-g_2V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)'})\Big|_{r=R_1}+a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}c_{11}^{-1}\times \quad (55)$$

$$\times(Z_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha),1}(\beta)\omega_{21}-Z_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha),1}(\beta)\omega_{11})=d_1\left[Z_{\nu,\alpha_{2;12}}^{(\alpha),1}(\beta)\omega_{21}-Z_{\nu,\alpha_{2;22}}^{(\alpha),1}(\beta)\omega_{11}\right],$$

тому, що в силу вибору чисел σ_1 та σ_2 вираз

$$(a_1^2\sigma_1 R_1^{2\alpha_1+1}\,\frac{c_{21}}{c_{11}}-a_2^2\sigma_2)=\frac{c_{21}}{c_{11}}R_1^{2\alpha_1+1}-R_1^{2\alpha_1+1}\,\frac{c_{21}}{c_{11}}=R_1^{2\alpha_1+1}\,\frac{c_{21}}{c_{11}}(1-1)\equiv 0.$$

У точці $r = R_2$ при $k = 2$ маємо:

$$a_2^2\sigma_2(g_2'V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)} - g_2V_{\nu,\alpha_2;2}^{(\alpha)'})\Big|_{r=R_2} - a_3^2\sigma_3R_2^{2\alpha_2+1}(g_3'V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)} - g_3V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)'})\Big|_{r=R_2} =$$
$$= (a_2^2\sigma_2\frac{c_{22}}{c_{12}} - a_3^2\sigma_3R_2^{2\alpha_2+1})(g_3'V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)} - g_3V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)'})\Big|_{r=R_2} +$$
$$+a_2^2\sigma_2c_{12}^{-1}(\mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha),1}(\beta)\omega_{22} - \mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha),1}(\beta)\omega_{12}) = \tag{56}$$
$$= d_2\left[\mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha),1}(\beta)\omega_{22} - \mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha),1}(\beta)\omega_{12}\right],$$

тому, що в силу вибору чисел σ_2 та σ_3 вираз

$$a_2^2\sigma_2\frac{c_{22}}{c_{12}} - a_3^2\sigma_3R_2^{2\alpha_2+1} = \frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{22}}{c_{12}}R_1^{2\alpha_1+1} - \frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}R_2^{2\alpha_2+1} \equiv 0.$$

У точці $r = R_3$ при $k = 3$ маємо:

$$a_3^2\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}(g_3'V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)} - g_3V_{\nu,\alpha_2;3}^{(\alpha)'})\Big|_{r=R_3} -$$
$$-a_4^2\sigma_4R_3^{2\alpha_3+1}(g_4'V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)} - g_4V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)'})\Big|_{r=R_3} =$$
$$= (a_3^2\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}\frac{c_{23}}{c_{13}} - a_4^2\sigma_4R_3^{2\alpha_3+1})\times \tag{57}$$
$$\times(g_4'V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)} - g_4V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)'})\Big|_{r=R_3} + a_3^2\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}c_{13}^{-1}\times$$
$$\times(\mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha),3}(\beta)\omega_{23} - \mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha),3}(\beta)\omega_{13}) =$$
$$= d_3(\mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha),3}(\beta)\omega_{23} - \mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha),3}(\beta)\omega_{13}),$$

тому, що в силу вибору чисел σ_3 та σ_4 вираз

$$a_3^2\sigma_3R_3^{2\alpha_2+1}\frac{c_{23}}{c_{13}} - a_4^2\sigma_4R_3^{2\alpha_3+1} = \frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}R_3^{2\alpha_2+1}\frac{c_{23}}{c_{13}} -$$
$$-\frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{c_{23}}{c_{13}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}\frac{R_3^{2\alpha_2+1}}{R_3^{2\alpha_2+1}}R_3^{2\alpha_3+1} = \frac{c_{21}}{c_{11}}\frac{c_{22}}{c_{12}}\frac{c_{23}}{c_{13}}\frac{R_1^{2\alpha_1+1}}{R_2^{2\alpha_2+1}}R_3^{2\alpha_2+1}(1-1) \equiv 0.$$

Підставивши одержані функціональні залежності (51)—(57) в рівність (50), одержуємо:

$$H_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[M_{\nu,\alpha_2}^{(\alpha)}\left[g(r)\right]\right] = (\alpha_{22}^4)^{-1}V_{\nu,\alpha_2;4}^{(\alpha)}(R_4,\beta)a_4^2\sigma_4R_4^{2\alpha_3+1}g_R +$$
$$+\sum_{k=1}^{3}d_k\left[\mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;12}^{(\alpha);k}(\beta)\omega_{2k} - \mathrm{Z}_{\nu,\alpha_2;22}^{(\alpha);k}(\beta)\omega_{1k}\right] - \sum_{i=1}^{4}(\beta^2 + k_i^2)\tilde{g}_i(\beta). \tag{58}$$

Оскільки

$$\sum_{i=1}^{4}(\beta^2+k_i^2)\tilde{g}_i(\beta)=\beta^2\sum_{i=1}^{4}\tilde{g}_i(\beta)+\sum_{i=1}^{4}k_i^2\tilde{g}_i(\beta)=\beta^2\tilde{g}(\beta)+\sum_{i=1}^{4}k_i^2\tilde{g}_i(\beta),$$

то рівність (58) співпадає з рівністю (48).

Доведення теореми завершено.

Висновок. Побудовані правила (31), (32) та (48) складають математичний апарат для розв'язання відповідних задач математичної фізики неоднорідних середовищ.

Список використаних джерел:

1. Ленюк М. П. Інтегральні перетворення типу Конторовича-Лєбєдєва / М. П. Ленюк, Г. І. Міхалевська. — Чернівці : Прут, 2002. — 280 с.
2. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Физматгиз, 1959. — 468 с.
3. Ленюк М. П. Исследование основных краевых задач для диссипативного волнового уравнения Бесселя / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 62 с. — (Препринт / АН УССР. Ин-т математики, 83.3).
4. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
5. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Бесселя, Лежандра). Частина 1 / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2004. — 384 с.
6. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. — М. : Наука, 1971. — 432 с.
7. Ленюк М. П. Гібридні інтегральні перетворення (Фур'є, Ейлера, Бесселя, Лежандра). Частина 2. / М. П. Ленюк, М. І. Шинкарик. — Тернопіль : Економ. думка, 2011. — 384 с.
8. Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и призведений / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. — М. : Наука, 1971. — 1108 с.
9. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3-х т. / Г. М. Фихтенгольц. — М. : Наука, 1969. — Т.3. — 656 с.

The method of delta-like sequence (Dirichlet kernel) introduced a hybrid integral transformations generated by the segment with three points coupling hybrid differential operator (Kontorovich-Lebedev)-Fourier-Bessel-Euler.

Key words: *hybrid differential operator hybrid integral transformation, spectrum, spectral function, the main identity.*

Отримано: 21.04.2013