problems of training specialists in ICT. Conferenrence Proceedigs. — Sumy : Sumy State University, 2013. — Part 2. — P. 226–234.
8. Завялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завялов, В. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. — М. : Наука, 1980. — 352 с.

The boundary value problem for differential equation with delay is researched. Iterative scheme of finding the solution using interpolating cubic spline with defect two is constructed and explained. Numerical experiments are conducted for test boundary value problems.

Key words: *differential equations, delay, boundary value problem, approximation, spline-functions.*

Отримано: 18.02.2014

УДК 517.956.4

Т. О. Заболотько, аспірант,
С. Д. Івасишен, д-р фіз.-мат. наук, професор

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ПОВНЕ АНАЛІТИЧНЕ ОПИСАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається параболічне за Петровським рівняння довільного порядку у випадку, коли рівняння містить члени з похідними першого порядку за просторовими змінними і коефіцієнтами, які лінійно зростають на нескінченності як функції цих змінних, а інші коефіцієнти не залежать від просторових змінних. Для такого рівняння дається повне аналітичне описання фундаментального розв'язку задачі Коші.

Ключові слова: *параболічне рівняння зі зростаючими коефіцієнтами, фундаментальний розв'язок, задача Коші, повне аналітичне описання.*

Вступ. При математичному моделюванні деяких реальних процесів виникають параболічні рівняння з різними особливостями і виродженнями, зокрема рівняння зі зростаючими на нескінченності коефіцієнтами. Так, наприклад, для нормальних марковських процесів рівняннями Фоккера-Планка-Колмогорова є параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти сталі [1, с.177–179].

Важливим поняттям для таких рівнянь і, взагалі, для всіх параболічних рівнянь є фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), точна інформація про який дозволяє одержувати досить точні результати в теорії задачі Коші та навіть теорії крайових задач. У монографіях [2; 3] підсумовано результати, що стосуються побудови, властивостей і застосувань ФРЗК для загальних параболічних за І. Г. Петровським і за С. Д. Ейдельманом рівнянь з обмеженими коефіцієнтами, а також деяких рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів. Якщо результати для ФРЗК для рівнянь з обмеженими коефіцієнтами досить точні, то не такими вони є у випадку зростаючих коефіцієнтів. У статті [4] для деяких рівнянь типу Фоккера-Планка-Колмогорова нормального марковського процесу знайдено ФРЗК в явному вигляді, на основі якого встановлено його точні властивості.

У цій статті розглядається параболічне за І. Г. Петровським рівняння довільного порядку, в якому присутні члени зі зростаючими коефіцієнтами при похідних першого порядку такі, як у [4], а інші коефіцієнти можуть залежати лише від часової змінної. Для такого рівняння дається повне аналітичне описання ФРЗК.

1. Позначення, припущення та означення. Користуватимемося такими позначеннями: n, b — задані натуральні числа; i — уявна одиниця; $\mathbb{Z}_+^n$ — сукупність усіх n-вимірних мультиіндексів $k := (k_1, ..., k_n)$; $|k| := k_1 + ... + k_n$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$; T — задане додатне число, $\Pi_{(\tau,\mathrm{T}]} := (\tau, \mathrm{T}] \times \mathbb{R}^n$, якщо $\tau \in [0, \mathrm{T})$; $\partial_x^k := \partial_{x_1}^{k_1} ... \partial_{x_n}^{k_n}$, $\partial_{x_j}^{k_j} := \dfrac{\partial^{k_j}}{\partial x_j^{k_j}}$,

$x^k := x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}$, $|x| := \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right)^{1/2}$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$, а $x := (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$;

$(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в $\mathbb{R}^n$;

$$F_{x \to \sigma}[f] := \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i(x, \sigma)\} f(x)\, dx, \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

і

$$F_{\sigma \to x}^{-1}[g] := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x, \sigma)\} g(\sigma)\, d\sigma, x \in \mathbb{R}^n,$$

відповідно пряме й обернене перетворення Фур'є; $\mathbb{C}^n$ — n-вимірний комплексний простір.

Будемо розглядати рівняння вигляду

$$\begin{aligned} L(t, \partial_t, \partial_x) u(t,x) := \partial_t u(t,x) - \sum_{|k| \le 2b} a_k(t) \partial_x^k u(t,x) - \\ -a \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j} \left(x_j u(t,x) \right) = 0, (t,x) \in \Pi_{(0,\mathrm{T}]}, \end{aligned} \qquad (21)$$

за таких припущень:

α) рівняння (1) рівномірно параболічне за І. Г. Петровським на $\left[0,\mathrm{T}\right]$, тобто існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $t \in \left[0,\mathrm{T}\right]$ і довільних $\sigma \in \mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=2b} a_k\left(t\right)\left(i\sigma\right)^k \le -\delta\left|\sigma\right|^{2b}; \tag{22}$$

β) коефіцієнти $a_k, |k| \le 2b$ є комплекснозначними неперервними на $\left[0,\mathrm{T}\right]$ функціями, а a — дійсна стала.

Означення. ФРЗК для рівняння (1) називається функція $G\left(t,x;\tau,\xi\right)$, $0 \le \tau < t \le \mathrm{T}, \left\{x,\xi\right\} \subset \mathbb{R}^n$, яка є розв’язком у сенсі теорії узагальнених функцій задачі

$$L\left(t,\partial_t,\partial_x\right)G\left(t,x;\tau,\xi\right)=0, \tau<t,$$

$$G\left(t,x;\tau,\xi\right)|_{t=\tau}=\delta_\xi\left(x\right), x \in \mathbb{R}^n,$$

де τ — довільне число з $\left[0,\mathrm{T}\right)$ і ξ — довільна точка з $\mathbb{R}^n$, $\delta_\xi\left(x\right)$ — дельта-функція Дірака, що зосереджена в точці ξ.

2. Побудова ФРЗК. Для довільно фіксованого числа $\tau \in \left[0,\mathrm{T}\right)$ розглянемо задачу Коші

$$L\left(t,\partial_t,\partial_x\right)u\left(t,x\right)=0, \left(t,x\right) \in \Pi_{\left(\tau,\mathrm{T}\right]}, \tag{23}$$

$$u\left(t,x\right)|_{t=\tau}=\varphi\left(x\right), x \in \mathbb{R}^n, \tag{24}$$

в якій φ — нескінченно диференційовна й фінітна функція, для неї існує перетворення Фур’є

$$\psi\left(\sigma\right):=\left(F_{x\to\sigma}\left[\varphi\right]\right)\left(\sigma\right), \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{25}$$

Розв'язок задачі (3), (4) шукаємо у вигляді

$$u\left(t,x\right)=\left(F^{-1}_{\sigma\to x}\left[\upsilon\left(t,\sigma\right)\right]\right)\left(t,x\right), \left(t,x\right) \in \Pi_{\left(\tau,\mathrm{T}\right]}, \tag{26}$$

де υ — невідома функція.

Підставивши вираз (6) у (3), (4) та скориставшись властивостями перетворення Фур'є, для функції υ одержимо задачу

$$\partial_t\upsilon\left(t,\sigma\right)+a\sum_{j=1}^{n}\sigma_j\partial_{\sigma_j}\upsilon\left(t,\sigma\right)=\sum_{|k|\le 2b} a_k\left(t\right)\left(i\sigma\right)^k\upsilon\left(t,\sigma\right),$$

$$\left(t,\sigma\right) \in \Pi_{\left(\tau,\mathrm{T}\right]}, \tag{27}$$

$$\upsilon\left(t,\sigma\right)|_{t=\tau}=\psi\left(\sigma\right), \sigma \in \mathbb{R}^n. \tag{28}$$

Рівняння (7) — це лінійне неоднорідне рівняння з частинними похідними першого порядку. Задача Коші для такого рівняння розв'язується методом характеристик, згідно з яким відповідна йому система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\sigma_1}{a\sigma_1} = \ldots = \frac{d\sigma_n}{a\sigma_n} = \frac{d\upsilon}{\sum\limits_{|k|\le 2b} a_k\left(t\right)\left(i\sigma\right)^k \upsilon}. \tag{29}$$

Вона містить $n+1$ рівнянь. Знайдемо $n+1$ незалежних перших інтегралів цієї системи.

З рівнянь $\dfrac{d\sigma_j}{a\sigma_j} = dt,\ j \in \{1,\ldots,\mathrm{n}\}$, маємо

$$\sigma_j = C_j e^{at},\ j \in \{1,\ldots,n\}, \tag{30}$$

а з рівняння $\dfrac{d\upsilon}{\sum\limits_{|k|\le 2b} a_k\left(t\right)\left(i\sigma\right)^k \upsilon} = dt$ одержуємо

$$\upsilon = C_0 \exp\left\{\sum_{|k|\le 2b} \int_\tau^t a_k\left(\theta\right)\left(i\sigma\right)^k d\theta\right\}. \tag{31}$$

З рівностей (10) і (11) випливає, що незалежними першими інтегралами системи (9) є

$$\upsilon \exp\left\{-\sum_{|k|\le 2b} \int_\tau^t a_k\left(\theta\right)\left(i\sigma\right)^k d\theta\right\} = C_0, \tag{32}$$

$$\sigma_j e^{-at} = C_j,\ j \in \{1,\ldots,n\}. \tag{33}$$

Нехай $\overline{\sigma}$ і $\overline{\upsilon}$ — значення при $t=\tau$ відповідно σ і υ. Тоді з (10) і (11) маємо

$$\overline{\sigma_j} = C_j e^{a\tau},\ j \in \{1,\ldots,n\}, \overline{\upsilon} = C_0,$$

але згідно з (8) $\overline{\upsilon} = \psi\left(\overline{\sigma}\right)$, тому

$$C_0 = \psi(\overline{\sigma}) = \psi\left(\overline{C}e^{a\tau}\right),$$

де $\overline{C} := \left(C_1,\ldots,C_n\right)$.

На підставі (12) і (13) одержуємо

$$\upsilon\left(t,\sigma\right) = \exp\left\{\sum_{|k|\le 2b} \int_\tau^t a_k\left(\theta\right)\left(i\overline{C}e^{a\theta}\right)^k d\theta\right\}\psi\left(\overline{C}e^{a\tau}\right) =$$

$$= \exp\left\{ \sum_{|k|\le 2b} \int_{\tau}^{t} a_k(\theta)\left(ie^{-a(t-\theta)}\sigma\right)^k d\theta \right\} \psi\left(e^{-a(t-\tau)}\sigma\right),$$

$$t \ge \tau, \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

Тоді за допомогою (6) маємо

$$u(t,x) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ i(x,\sigma) + \sum_{|k|\le 2b} \int_{\tau}^{t} a_k(\theta)\left(ie^{-a(t-\theta)}\sigma\right)^k d\theta \right\} \psi\left(e^{-a(t-\tau)}\sigma\right) d\sigma,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(\tau,\mathrm{T}]}.$$

Зробимо заміну змінних інтегрування за формулами $e^{-a(t-\tau)}\sigma_j = = \eta_j$, $j \in \{1,...,n\}$, і врахувавши, що $d\sigma = e^{na(t-\tau)} d\eta$, де $\eta := (\eta_1,...,\eta_n)$, одержимо рівність

$$u(t,x) =$$

$$= (2\pi)^{-n} e^{na(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ i\left(e^{a(t-\tau)}x,\eta\right) + \sum_{|k|\le 2b} \int_{\tau}^{t} a_k(\theta) e^{|k|a(\theta-\tau)} d\theta (i\eta)^k \right\} \psi(\eta) d\eta,$$

$$(t,x) \in \Pi_{(\tau,\mathrm{T}]}.$$

Скориставшись виразом (5) (узявши в ньому замість σ і x відповідно η і ξ) та змінивши порядок інтегрування, прийдемо до формули

$$u(t,x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t,x;\tau,\xi)\varphi(\xi) d\xi, (t,x) \in \Pi_{(\tau,\mathrm{T})}, \tag{34}$$

в якій

$$G(t,x;\tau,\xi) := (2\pi)^{-n} e^{na(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left\{ i\left(e^{a(t-\tau)}x - \xi, \eta\right) + \right.$$
$$\left. + \sum_{|k|\le 2b} \int_{\tau}^{t} a_k(\theta) e^{|k|a(\theta-\tau)} d\theta (i\eta)^k \right\} d\eta, 0 \le \tau < t \le \mathrm{T}, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n. \tag{35}$$

Перейшовши в інтегралі (15) від змінної інтегрування η до нової змінної σ за допомогою рівності $\eta = \left(q(t-\tau)\right)^{-1/(2b)} \sigma$, де

$$q(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{2ab}\left(e^{2abt} - 1\right), a \ne 0, \\ t, a = 0, \end{cases} \qquad t \ge 0, \tag{36}$$

одержимо

$$G(t,x;\tau,\xi) := e^{na(t-\tau)}\left(q(t-\tau)\right)^{-n/(2b)} \times$$
$$\times\left(F^{-1}_{\sigma\to z}\left[V(t,\tau,\sigma)\right]\right)(t,\tau,z)\big|_{z=Q(t-\tau,x,\xi)}, \qquad (37)$$
$$0\le\tau<t\le \mathrm{T}, \{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n.$$

Тут

$$V(t,\tau,\sigma) := V_0(t,\tau,\sigma)V_1(t,\tau,\sigma), 0\le\tau<t\le\mathrm{T}, \sigma\in\mathbb{R}^n, \qquad (38)$$

$$V_0(t,\tau,\sigma) := \exp\left\{\sum_{|k|=2b}\int_\tau^t a_k(\theta)e^{2ab(\theta-\tau)}d\theta\left(q(t-\tau)\right)^{-1}(i\sigma)^k\right\},$$

$$V_1(t,\tau,\sigma) := \exp\left\{\sum_{|k|<2b}\int_\tau^t a_k(\theta)e^{a|k|(\theta-\tau)}d\theta\left(q(t-\tau)\right)^{-|k|/(2b)}(i\sigma)^k\right\},$$

$$Q(t,x,\xi) := \left(e^{at}x-\xi\right)\left(q(t)\right)^{-1/(2b)}.$$

Із способу виведення формул (14) і (17) випливає, що функція G є ФРЗК для рівняння (1) і її аналітичні властивості визначаються відповідними властивостями функції V і оберненого перетворення Фур'є.

3. Властивості функції V. Спочатку оцінимо функцію V_0. Для цього скористаємося умовою (2), з якої випливає нерівність

$$\mathrm{Re}\sum_{|k|=2b}\int_\tau^t a_k(\theta)e^{2ab(\theta-\tau)}d\theta\left(q(t-\tau)\right)^{-1}(i\sigma)^k \le$$

$$\le -\delta\int_\tau^t e^{2ab(\theta-\tau)}d\theta\left(q(t-\tau)\right)^{-1}|\sigma|^{2b} = -\delta|\sigma|^{2b},$$

$$0\le\tau<t\le\mathrm{T}, \sigma\in\mathbb{R}^n.$$

За допомогою цієї нерівності маємо оцінку

$$\left|V_0(t,\tau,\sigma)\right| \le \exp\left\{-\delta|\sigma|^{2b}\right\}, 0\le\tau<t\le\mathrm{T}, \sigma\in\mathbb{R}^n. \qquad (39)$$

Знайдемо ще оцінку $\left|V_0(t,\tau,\sigma+i\gamma)\right|$, $0\le\tau<t\le\mathrm{T}, \{\sigma,\gamma\}\subset\mathbb{R}^n$, де

$$\left|V_0(t,\tau,\sigma+i\gamma)\right| = \left|V_0(t,\tau,\sigma)\right|\exp\left\{\mathrm{P}_0(t,\tau,\sigma,\gamma)\right\}, \qquad (40)$$

$$\mathrm{P}_0(t,\tau,\sigma,\gamma) = \sum_{(k,l)} C_k^l\int_\tau^t a_k(\theta)e^{2ab(\theta-\tau)}d\theta\left(q(t-\tau)\right)^{-1} i^{|k|}\sigma^{k-l}\gamma^l.$$

Тут підсумовування проводиться за всіма мультиіндексами $\{k,l\}\subset\mathbb{Z}^n_+$ такими, що $|k|=2b$ і $0<l\le k$.

Врахувавши обмеженість коефіцієнтів a_k, $|k|=2b$, оцінимо

$$\mathrm{P}_0\left(t,\tau,\sigma,\gamma\right)\le c\sum_{(k,l)}\int_{\tau}^{t}e^{2ab(\theta-\tau)}d\theta\left(q\left(t-\tau\right)\right)^{-1}\left|\sigma\right|^{|k-l|}\left|\gamma\right|^{|l|}=c\sum_{(k,l)}\left|\sigma\right|^{|k-l|}\left|\gamma\right|^{|l|}.$$

Нехай ε — деяке досить мале додатне число (його величина буде вказана нижче). Розглянемо такі два випадки:

1) $|\gamma|\le\varepsilon|\sigma|$,

2) $|\sigma|<\varepsilon^{-1}|\gamma|$.

У випадку 1) маємо

$$\left|\mathrm{P}_0\left(t,\tau,\sigma,\gamma\right)\right|\le c\varepsilon\left|\sigma\right|^{2b}$$

та на підставі (19) і (20) одержуємо нерівність

$$\left|V_0\left(t,\tau,\sigma+i\gamma\right)\right|\le\exp\left\{-\left(\delta-c\varepsilon\right)\left|\sigma\right|^{2b}\right\}=\exp\left\{-\delta_0\left|\sigma\right|^{2b}\right\},\qquad(41)$$

якщо ε вибрати так, щоб $\delta-c\varepsilon=:\delta_0>0.$

У випадку 2) існує така стала c_0, що

$$\left|\mathrm{P}_0\left(t,\tau,\sigma,\gamma\right)\right|\le c_0\left|\gamma\right|^{2b}$$

і, отже, в цьому випадку

$$\left|V_0\left(t,\tau,\sigma+i\gamma\right)\right|\le\exp\left\{-\delta\left|\sigma\right|^{2b}+c_0\left|\gamma\right|^{2b}\right\}.\qquad(42)$$

З нерівностей (21) і (22) випливає оцінка

$$\left|V_0\left(t,\tau,\sigma+i\gamma\right)\right|\le\exp\left\{-\delta_0\left|\sigma\right|^{2b}+c_0\left|\gamma\right|^{2b}\right\},$$

$$0\le\tau<t\le\mathrm{T},\left\{\sigma,\gamma\right\}\subset\mathbb{R}^n.\qquad(43)$$

Оцінимо функцію V_1. Використовуючи обмеженість функцій a_k, $|k|<2b,$ для $0\le\tau<t\le\mathrm{T}$ і $\{\sigma,\gamma\}\subset\mathbb{R}^n$ маємо

$$\left|V_1\left(t,\tau,\sigma+i\gamma\right)\right|\le\exp\left\{c\sum_{|k|<2b}\int_{\tau}^{t}e^{a|k|(\theta-\tau)}d\theta\left(q\left(t-\tau\right)\right)^{-|k|/(2b)}\left(\left|\sigma\right|+\left|\gamma\right|\right)^{|k|}\right\}.\qquad(44)$$

Оскільки при $0\le\tau\le\theta\le t\le\mathrm{T}$ і $|k|<2b$

$$e^{-a\left(2b-|k|\right)(\theta-\tau)}\le e^{|a|\left(2b-|k|\right)(t-\tau)}\le e^{2|a|b\mathrm{T}},$$

$$q\left(t-\tau\right)\le\begin{cases}\dfrac{1}{2ab}\left(e^{2ab\mathrm{T}}-1\right)\le\dfrac{1}{2ab}e^{2ab\mathrm{T}},\ a>0,\\[2mm] \dfrac{1}{2|a|b}\left(1-e^{2ab(t-\tau)}\right)\le\dfrac{1}{2|a|b}\le\dfrac{1}{2|a|b}e^{2|a|b\mathrm{T}},a<0,\\[2mm] \mathrm{T},a=0,\end{cases}$$

то

$$\int_{\tau}^{t} e^{a|k|(\theta-\tau)} d\theta \left(q\left(t-\tau\right)\right)^{-|k|/(2b)} =$$

$$= \int_{\tau}^{t} e^{2ab(\theta-\tau)-a(2b-|k|)(\theta-\tau)} d\theta \left(q\left(t-\tau\right)\right)^{-|k|/(2b)} \leq$$

$$\leq e^{2|a|b\mathrm{T}} \int_{\tau}^{t} e^{2ab(\theta-\tau)} d\theta \left(q\left(t-\tau\right)\right)^{-|k|/(2b)} = e^{2|a|b\mathrm{T}} \left(q\left(t-\tau\right)\right)^{1-|k|/(2b)} \leq \tag{45}$$

$$\leq e^{2|a|b\mathrm{T}} q\left(t-\tau\right) = c_{\mathrm{T}},$$

де $c_{\mathrm{T}} := \begin{cases} \dfrac{e^{4|a|b\mathrm{T}}}{2|a|b}, a \neq 0, \\ \mathrm{T}, a = 0, \end{cases}$ якщо $q\left(t-\tau\right) > 1,$ і $c_{\mathrm{T}} := e^{2|a|b\mathrm{T}},$ якщо $q\left(t-\tau\right) \leq 1.$

Якщо ε — задане додатне число, то існує число $N_{\varepsilon} > 1$ таке, що для всіх $|\sigma| + |\gamma| > N_{\varepsilon}$ і $|k| < 2b$

$$\left(|\sigma| + |\gamma|\right)^{|k|} \leq 2^{1-2b} \varepsilon \left(|\sigma| + |\gamma|\right)^{2b} \leq 2^{1-2b} \varepsilon 2^{2b-1} \left(|\sigma|^{2b} + |\gamma|^{2b}\right).$$

Якщо $|\sigma| + |\gamma| \leq N_{\varepsilon},$ то $\left(|\sigma| + |\gamma|\right)^{|k|} \leq N_{\varepsilon}^{|k|} \leq N_{\varepsilon}^{2b}.$ Отже, для довільних $|\sigma| + |\gamma|$ маємо

$$\left(|\sigma| + |\gamma|\right)^{|k|} \leq N_{\varepsilon}^{2b} + \varepsilon \left(|\sigma|^{2b} + |\gamma|^{2b}\right). \tag{46}$$

Позначимо через r число всіх мультиіндексів $k \in \mathbb{Z}_{+}^{n}$ таких, що $|k| < 2b.$ Використовуючи нерівності (24)–(26), одержуємо

$$\left|V_1\left(t, \tau, \sigma + i\gamma\right)\right| \leq \exp\left\{rcc_{\mathrm{T}} \left(N_{\varepsilon}^{2b} + \varepsilon \left(|\sigma|^{2b} + |\gamma|^{2b}\right)\right)\right\} =$$
$$= C_{\varepsilon} \exp\left\{rcc_{\mathrm{T}} \varepsilon \left(|\sigma|^{2b} + |\gamma|^{2b}\right)\right\}, \tag{47}$$

де $C_{\varepsilon} := \exp\left\{rcc_{\mathrm{T}} N_{\varepsilon}^{2b}\right\}.$ Виберемо ε таким, щоб $\delta_0 - rcc_{\mathrm{T}}\varepsilon =: \delta_1 > 0,$ де δ_0 — стала з оцінки (23). Тоді з (18), (23) і (27) випливає оцінка

$$\left|V\left(t, \tau, \sigma + i\gamma\right)\right| \leq C \exp\left\{-\delta_1 |\sigma|^{2b} + c_1 |\gamma|^{2b}\right\},$$
$$0 \leq \tau < t \leq \mathrm{T}, \left\{\sigma, \gamma\right\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{48}$$

Для мультиіндексів $\{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ покладемо

$$P_{kl}(\sigma) := (i\sigma)^k (-i\sigma)^l, \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

З оцінки (28) безпосередньо випливає, що для довільних $\{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ справджуються оцінки

$$\left| P_{kl}(\sigma + i\gamma) V(t,\tau,\sigma + i\gamma) \right| \le C_{kl} \exp\left\{ -\delta_2 |\sigma|^{2b} + c_2 |\gamma|^{2b} \right\},$$
$$0 \le \tau < t \le \mathrm{T}, \{\sigma,\gamma\} \subset \mathbb{R}^n, \tag{49}$$

де $0 < \delta_2 < \delta_1, c_2 > c_1$.

Отже, функції V і $P_{kl}V$, як видно з їх явних виразів та одержаних оцінок (28) і (29), допускають аналітичне продовження з простору $\mathbb{R}^n$ у простір $\mathbb{C}^n$ до цілих функцій порядку зростання $2b$ в $\mathbb{C}^n$ і такого ж порядку спадання в $\mathbb{R}^n$.

4. Властивості ФРЗК. Диференціюванням рівності (17) за змінними x і ξ одержуємо рівності

$$\partial_x^k \partial_\xi^l G(t,x;\tau,\xi) = e^{(n+|k|)a(t-\tau)} \left(q(t-\tau)\right)^{-(n+|k|+|l|)/(2b)} \times$$
$$\times \left(F_{\sigma \to z}^{-1} \left[P_{kl}(\sigma) V(t,\tau,\sigma) \right] \right)(t,\tau,z)|_{z=Q(t-\tau,x,\xi)}, \tag{50}$$
$$0 \le \tau < t \le \mathrm{T}, \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Використовуючи рівності (17) і (30) та встановлені в пункті 3 властивості V і $P_{kl}V$, за допомогою леми 1.1 з [3, с. 28] про перетворення Фур'є цілих функцій, одержуємо повне аналітичне описання ФРЗК, яке наведено в наступній теоремі.

Теорема. Якщо для рівняння (1) виконуються умови α) і β) з пункту 1, то правильні такі твердження:

1) для рівняння (1) існує ФРЗК G;
2) функція G та її похідні за x і ξ допускають аналітичні продовження в простір $\mathbb{C}^n$, які мають вигляд

$$\partial_x^k \partial_\xi^l G(t,x+iy;\tau,\xi+i\eta) = e^{(n+|k|)a(t-\tau)} \times$$
$$\times \left(q(t-\tau)\right)^{-(n+|k|+|l|)/(2b)} \Omega_{kl}(t,\tau,z)|_{z=Q(t-\tau,x,\xi)+iQ(t-\tau,y,\eta)},$$
$$0 \le \tau < t \le \mathrm{T}, \{x,y,\xi,\eta\} \subset \mathbb{R}^n, \{k,l\} \subset \mathbb{Z}_+^n,$$

де $\Omega_{kl}(t,\tau,z), z \in \mathbb{C}^n$, при фіксованих t і τ є цілими функціями від z порядку зростання $q := 2b/(2b-1)$ і того самого порядку спадання при $z = x \in \mathbb{R}^n$;

3) справджуються оцінки

$$\left|\partial_x^k \partial_\xi^l G\left(t, x+iy; \tau, \xi+i\eta\right)\right| \le C_{kl} e^{\left(n+|k|\right)a\left(t-\tau\right)} \times$$

$$\times\left(q\left(t-\tau\right)\right)^{-\left(n+|k|+|l|\right)/(2b)} E_c\left(t-\tau, x, \xi\right) E_{-c'}\left(t-\tau, \mathrm{y}, \eta\right),$$

$$0 \le \tau < t \le \mathrm{T}, \left\{x, y, \xi, \eta\right\} \subset \mathbb{R}^n, \left\{k, l\right\} \subset \mathbb{Z}_+^n,$$

де $E_c\left(t, x, \xi\right) := \exp\left\{-c\left|Q\left(t, x, \xi\right)\right|^q\right\}$, C_{kl}, c і c' — додатні сталі, що залежать лише від чисел $n, a, b, \mathrm{T}, \max\limits_{t\in[0,\mathrm{T}], |k|\le 2b}\left|a_k\left(t\right)\right|$ і сталої δ з умовою (2);

4) правильна формула

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G\left(t, x; \tau, \xi\right) d\xi = \exp\left\{na\left(t-\tau\right) + \int\limits_\tau^t a_0\left(\theta\right) d\theta\right\},$$

$$0 \le \tau < t \le \mathrm{T}, x \in \mathbb{R}^n. \qquad (51)$$

На підставі сказаного перед формулюванням теореми потребує доведення лише рівність (31). В інтегралі з цієї рівності використаємо формулу (17) і здійснимо заміну змінної інтегрування ξ за допомогою формули $Q\left(t-\tau, x, \xi\right) = \eta$. Тоді одержимо

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} G\left(t, x; \tau, \xi\right) d\xi = e^{na\left(t-\tau\right)} F_{\eta\to 0}\left[F^{-1}_{\sigma\to\eta}\left[V\left(t, \tau, \sigma\right)\right]\right] =$$

$$= e^{na\left(t-\tau\right)} V\left(t, \tau, 0\right) = \exp\left\{na\left(t-\tau\right) + \int\limits_\tau^t a_0\left(\theta\right) d\theta\right\}.$$

Висновки. Вищенаведені результати дозволяють довести для рівняння (1) точні теореми про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків. Вони також можуть використовуватися для побудови та вивчення властивостей ФРЗК для рівняння вигляду (1) у випадку, коли коефіцієнти a_k залежать від усіх змінних t і x .

Список використаних джерел:

1. Тихонов В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. — М. : Сов. радио, 1977. — 488 с.
2. Эйдельман С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 443 с.
3. Eidelman S. D. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei // Operator Theory: Adv. and Appl. — 2004. — Vol. 152. — 390 p.
4. Заболотько Т. О. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосу-

вання / Т. О. Заболотько, С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: Математика : зб. наук. пр. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2012. — Т. 2, № 2–3. — С. 81–89.

The survey considers the arbitrary order equation parabolic in the sense of Petrovsky when equation contains members with the first order derivatives of spatial variables and linearly increasing coefficients as functions of this variables and other coefficients don’t depend on spatial variables. A complete analytical description of a fundamental solution of the Cauchy problem is given for such equation.

Key words: *parabolic equation with increasing coefficients, fundamental solution, Cauchy problem, complete analytical description.*

Отримано: 11.03.2014

УДК 517.947

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук, професор

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам’янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ ШАРІ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв’язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано точний аналітичний розв’язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндричному шарі.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв’язки.*

Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в теперішній час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, хімії, біології, медицини, економіки, техніки та сучасних технологій.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види вироджeностей і особливостей) та геометрії області (гладкість межі, наявність кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв’язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та пе-

