9. Неня О. І. Дослідження згасання розв'язків рівняння Макі-Гласса з імпульсною дією / О. І. Неня // Нелінійні коливання. — 2013. — Вип. 16, № 4. — С. 511–517.

The Mackey-Glass equation is considered, with variable coefficients, nonconstant delay and impulsive action at fixed times. Based on the Razumikhin type theorems the conditions of exponential stability are presented for positive solutions for this equation.

Key words: *functional-differential equation, impulsive action, exponential stability.*

Отримано: 12.02.2014

УДК 517.956

В. А. Літовченко, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Г. М. Унгурян, магістр

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ КОЕФІЦІЄНТАМИ ОБМЕЖЕНОЇ ГЛАДКОСТІ

Побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші та досліджено його властивості для одного класу параболічних рівнянь типу Шилова із змінними коефіцієнтами обмеженої гладкості та невід'ємним родом.

Ключові слова: *задача Коші, фундаментальний розв'язок, параболічність за Шиловим.*

Вступ. Параболічні за Г. Є. Шиловим рівняння з частинними похідними, на відміну від параболічних за І. Г. Петровським рівнянь, взагалі кажучи, не є стійкими в сенсі параболічності до зміни своїх коефіцієнтів, навіть тих, що знаходяться при нульовій похідній [1].

У [2] Я. І. Житомирський означує досить широкий клас параболічних систем типу Шилова із залежними від просторової змінної молодшими коефіцієнтами, який охоплює параболічні за Шиловим системи. Для таких систем методом послідовних наближень, без використання фундаментального розв'язку, встановлено коректну розв'язність задачі Коші в класі достатньо гладких обмежених початкових функцій. Подальше дослідження задачі Коші для систем з цього класу потребує побудови фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) та всебічного її вивчення.

Розвиваючи класичні методи теорії параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, у [3] здійснено повний аналітичний опис ФРЗК

 © В. А. Літовченко, Г. М. Унгурян, 2014

для параболічних рівнянь типу Шилова з невід'ємним родом й обмеженими нескінченно диференційовними за просторовою змінною коефіцієнтами та досліджено його основні властивості.

У цій статті, результати, одержані в [3] поширюються на випадок параболічних рівнянь типу Шилова з невід'ємним родом, коефіцієнти яких стосовно просторової змінної мають обмежений ступінь гладкості.

1. Постановка задачі. Нехай $\mathbb{N}$ — множина натуральних чисел, $\mathbb{N}_m := \{1,\ldots,m\}$, $m \in \mathbb{N}$; T — фіксоване додатне число; $\mathbb{R}^n$ — дійсний евклідів простір розмірності $n \geq 1$ з нормою $\|\cdot\|$; $\mathbb{Z}_+^n$ — множина всіх n-вимірних мультиіндексів; i — уявна одиниця; $|z_*| := |z_1| + \ldots + |z_n|$, якщо

$$z := \left(z_{1,}\ldots z_n\right) \in \mathbb{R}^n,\ \Pi_M := \left\{(t;x) \mid t\epsilon M, x\epsilon\mathbb{R}^n\right\}, M \subset \mathbb{R}^1,$$

$$\Pi_T^2 := \left\{(t,x;\tau,\xi) \mid 0 \leq \tau < t \leq T,\ \{x,\xi\} \subset \mathbb{R}^n\right\}.$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\partial_t u(t;x) = \sum_{|k|_* \leq p} a_k(t;x) i^{|k|_*} \partial_x^k u(t;x),\ (t;x)\epsilon\Pi_{(0;T]}, \tag{1}$$

порядку p права частина якого допускає зображення

$$\sum_{|k|_* \leq p} a_k(t;x)\ i^{|k|_*} \partial_x^k u(t;x) = \left\{P_0(t;i\partial_x) + P_1(t,x;i\partial_x)\right\} u(t;x),$$

де $P_0(t;i\partial_x) := \sum_{|k|_* \leq p} a_{0,k}(t) i^{|k|_*} \partial_x^k$, $P_1(t,x;i\partial_x) := \sum_{|k|_* \leq p_1} a_{1,k}(t) i^{|k|_*} \partial_x^k$, причому відповідне рівняння

$$\partial_t u(t;x) = P_0(t,i\partial_x) u(t;x),\ (t;x) \in \Pi_{(0;T]}, \tag{2}$$

є параболічним за Шиловим з показником параболічності h, $0 < h \leq p$, зведеним порядком p_0 й невід'ємним родом μ, $0 \leq \mu \leq 1$ [4].

Для рівняння (1) припускатимемо таке виконання наступних умов:

A) $0 \leq p_1 < h - n(1 - h\mu / p_0)$;

B) коефіцієнти є неперервними стосовно змінної t, диференційовними до порядку α^* включно стосовно просторової змінної x обмеженими в шарі $\Pi_{[0,\mathrm{T}]}$ функціями.

Позначимо ФРЗК для рівняння (2) через $G(t,\tau;\cdot)$, $t \in (\tau,T]$. Властивості цього розв'язку детально досліджено в [5], де, зокрема, встановлено, що

$$\forall T>0\ \forall \tau\in\left[0;T\right)\ \exists\delta>0\ \forall k\in\mathbb{Z}_{+}^{n}\ \exists c>0\ \forall t\in\left(\tau;T\right]\ \forall x\in\mathbb{R}^{n}:$$

$$\left|\partial_x^k G\left(t,\tau;x\right)\right|\le c\left(t-\tau\right)^{-\frac{n+|k|_*}{h}}e^{-\delta\left(\frac{\|x\|}{\left(t-\tau\right)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\ \alpha:=\mu/p_0,\ \mu\ge0. \tag{3}$$

Означення. ФРЗК для рівняння (1) назвемо функцію $Z\left(t,x;\tau,\xi\right)$, визначену для всіх $\left(t;x\right)\in\Pi_{\left(\tau;T\right]}$ і залежну від параметричної точки $\left(\tau;\xi\right)\in\Pi_{\left(0;T\right]}$ таку, що:

1) Z як функція $\left(t;x\right)$ задовольняє рівняння (1) в шарі $\Pi_{\left(\tau;T\right]}$;
2) виконується граничне співвідношення

$$Z\left(t,x;\tau,\cdot\right)\xrightarrow[t\to\tau+0]{}\delta\left(\cdot-x\right)$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі розподілів Л. Шварца (тут $\delta\left(\cdot\right)$ — дельта-функція Дірака).

Задача полягає у побудові та дослідженні властивостей функції $Z\left(t,x;\tau,\xi\right)$.

2. Побудова та дослідження властивостей фундаментального розв'язку. Шукатимемо ФРЗК для рівняння (1) у вигляді

$$\begin{aligned}Z\left(t,x;\tau,\xi\right)&=G\left(t,\tau;x-\xi\right)+\int_{\tau}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}G\left(t,\beta,x-y\right)\Phi\left(\beta,y;\tau,\xi\right)dy\equiv\\&\equiv G\left(t,\tau;x-\xi\right)+W\left(t,x;\tau,\xi\right),\left(t,x;\tau,\xi\right)\in\Pi_T^2\end{aligned} \tag{4}$$

де G — ФРЗК для рівняння (2), а Φ — деяка функція, вибір якої здійснюється так, щоб функція Z була розв'язком рівняння (1) стосовно змінних t і x. Для знаходження Φ класичним способом одержуємо інтегральне рівняння

$$\Phi\left(t,x;\tau,\xi\right)=K\left(t,x;\tau,\xi\right)+\int_{\tau}^{t}d\beta\int_{\mathbb{R}^n}K\left(t,x;\beta,y\right)\Phi\left(\beta,y;\tau,\xi\right)dy, \tag{5}$$

в якому

$$K\left(t,x;\tau,\xi\right):=P_1\left(t,x;i\partial_x\right)G\left(t,\tau;x-\xi\right).$$

Розв'язуючи це рівняння методом послідовних наближень, дістанемо такий формальний розв'язок:

$$\Phi\left(t,x;\tau,\xi\right)=\sum_{l=1}^{\infty}K_l\left(t,x;\tau,\xi\right),\ \left(t,x;\tau,\xi\right)\in\Pi_T^2, \tag{6}$$

де $K_1:=K$, а

$$K_l\left(t,x;\tau,\xi\right) := \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1\left(t,x;\beta,y\right) K_{l-1}\left(\beta,y;\tau,\xi\right) dy, \quad l > 1.$$

Для встановлення збіжності ряду (6) та обґрунтування коректності здійснених раніше перетворень, дослідимо властивості повторних ядер K_l.

Врахувавши обмеженість коефіцієнтів рівняння (1) та умову А) і розмірковуючи так, як при оцінюванні відповідних повторних ядер K_l у [3], одержимо існування такого номера l_* та додатніх сталих c_*, δ_* і E, що для всіх $\left(t,x;\tau,\xi\right) \in \Pi_T^2$ виконуються оцінки:

$$\left|K_l\left(t,x;\tau,\xi\right)\right| \le c_*\left(t-\tau\right)^{l\alpha_0-(1+\alpha n)} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad l \in \mathbb{N}_{l_*-1}; \tag{7}$$

$$\left|K_{l_*+l}\left(t,x;\tau,\xi\right)\right| \le c_*\left(E\left(t-\tau\right)^{\alpha_0}\right)^l e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}} \prod_{j=0}^{l-1} B\left(\alpha_0; 1+j\alpha_0\right), \tag{8}$$

$$\alpha_0 := 1+\alpha n - \frac{n+p_1}{n}, \quad l \ge 0,$$

а $B(\cdot;\cdot)$ — бета-функція Ейлера.

Властивості бета-функцій та оцінки (7) і (8) обґрунтовують правильність наступного твердження.

Лема 1. Функціональний ряд (6) є абсолютно та рівномірно збіжним рядом на множині Π_T^2 для суми якого справджується нерівність

$$\left|\Phi\left(t,x;\tau,\xi\right)\right| \le c_0\left(1-\tau\right)^{\alpha_0-(1+\alpha n)} e^{-\delta_*\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

(тут константа c_0 залежить лише від T).

Наслідок 1. Функція Φ, яка визначається рівністю (6), є звичайним розв'язком інтегрального рівняння (5).

Твердження цього наслідку випливає із структури рівняння (5) та зображення (6) функції Φ, якщо врахувати рівність

$$\int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K\left(t,x;\beta,y\right)\left(\sum_{l=1}^\infty K_l\left(\beta,y;\tau,\xi\right)\right) dy =$$

$$= \sum_{l=1}^\infty \int_\tau^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1\left(t,x;\beta,y\right) K_l\left(\beta,y;\tau,\xi\right) dy.$$

Правильність цієї рівності випливає з одержаних оцінок повторних ядер, леми 1 та відповідної теореми про почленне інтегрування функціональних рядів.

Твердження леми 1 разом із оцінкою (3) забезпечують для всіх $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ і $0\le\tau<t\le T$ абсолютну збіжність інтеграла, яким визначається потенціал W з рівності (4). Таким чином, функція $Z(t,x;\tau,\xi)$ коректно визначена формулою (4) на всій множині Π_T^2.

Щоб дослідити властивості гладкості функції Z, оцінимо похідні повторних ядер K_l.

Оскільки,

$$K_1(t,x;\tau,\xi)=P_1\left(t,x;i\partial_{(x-\xi)}\right)G(t,\tau;x-\xi),$$

то врахувавши умову В) та оцінку (3), одержимо, що для всіх $\{q,r\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $|q|_*\le\alpha_*$, виконується оцінка

$$\left|\partial_x^q\partial_\xi^r K_1(t,x;\tau,\xi)\right|\le c_{q,r}(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+|r+q|_*}{h}}e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\quad (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2,$$

при $l>1$ оцінювання $\left|\partial_x^q\partial_\xi^r K_l(t,x;\tau,\xi)\right|$ зводиться до оцінок виразів

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_1(t,x;\tau,\eta+\xi)\right|,\ \left|\partial_x^q K_1(t,x;\tau,x-z)\right|,$$
$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_{l-1}(t,x-z;\tau,\xi)\right|,\ \left|\partial_\xi^r K_{l-1}(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right|.$$

Урахувавши умову В) і оцінку (3), для всіх $\{q,r\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $|q|_*\le\alpha_*$, $\{x,\eta,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $t\in(\tau;T]$ і $\tau\in[0;T)$ маємо:

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_1(t,x;\tau,\eta+\xi)\right|\le c_{r,q}(t-\tau)^{-\frac{n+p_1+|r+q|_*}{h}}e^{-\delta\left(\frac{\|x-\eta-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}};\qquad(9)$$

$$\left|\partial_x^q K_1(t,x;\tau,x-\xi)\right|\le c_q(t-\tau)^{-\frac{n+p_1}{h}}e^{-\delta\left(\frac{\|\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}.\qquad(10)$$

Оцінюючи вираз $\left|\partial_\xi^r K_l(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right|$, прийдемо до нерівностей

$$\left|\partial_\xi^r K_l(t,\eta+\xi;\tau,\xi)\right|\le$$

$$\le c_{l,r}(\varepsilon)\left(\prod_{j=1}^{l-1}B(\alpha_0;j\alpha_0)\right)(t-\tau)^{(l-1)\alpha_0-\frac{n+p_1}{h}}e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\qquad(11)$$

які виконуються для всіх $\{\eta,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $|r|_*\le\alpha_*$, $t\in(\tau;T]$, $\tau\in[0;T)$, $\varepsilon\in(0;1)$ і $l\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, а відтак і до існування такого номера l_*, при якому

$$\left|\partial_\xi^r K_{l_*}\left(t,\eta+\xi;\tau,\xi\right)\right|\le c_{l_*,r}\left(\varepsilon\right)\left(\prod_{j=1}^{l_*-1}B\left(\alpha_0;j\alpha_0\right)\right)e^{-\delta\left(1-\left(l_*-1\right)\varepsilon\right)\left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},$$

(тут величини $c_{l,r}\left(\varepsilon\right)>0$ не залежать від змінних t, τ, η і ξ, які змінюються вищезазначеним способом).

Оскільки

$$\partial_\xi^r\partial_x^q K_l\left(t,x;\tau,\eta+\varsigma\right)=\partial_\varsigma^r\partial_x^q K_l\left(\mathrm{t},x;\tau,\varsigma\right)\Big|_{\varsigma=\eta+\xi},$$

$$\partial_\xi^r\partial_x^q K_l\left(t,x-z;\tau,\xi\right)=\partial_\xi^r\partial_y^q K_l\left(\mathrm{t},\mathrm{y};\tau,\xi\right)\Big|_{y=x-z},$$

то вирази $\partial_\xi^r\partial_x^q K_l\left(t,x;\tau,\eta+\xi\right)$, $\partial_\xi^r\partial_x^q K_l\left(t,x-z;\tau,\xi\right)$, $\partial_\xi^r\partial_x^q K_l\left(t,x;\tau,\xi\right)$ є однотипними. Тому враховуючи оцінки (9)–(11), матимемо:

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_l\left(t,x;\tau,\xi\right)\right|\le c_{l,\varepsilon}^{r,q}\left(t-\tau\right)^{l\alpha_0-\left(1+\alpha n+\frac{|r+q|_*}{h}\right)}\times$$
$$\times e^{-\delta\left(1-(l-1)\varepsilon\right)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\left(\prod_{j=1}^{l-1}B\left(\alpha_0;j\alpha_0\right)\right), \qquad (12)$$

для всіх $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $|r|_*\le\alpha_*$, $|q|_*\le\alpha_*$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, $0\le\tau<t\le T$, $\varepsilon\in(0;1)$ і $l\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Перейдемо тепер до знаходження оцінок виразу $\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_l\left(t,x;\tau,\xi\right)\right|$, придатних для встановлення диференційовності функції Φ за просторовими змінними. З попередньої нерівності приходимо до існування такого номера l^*, при якому

$$\left|\partial_\xi^r\partial_x^q K_{l^*}\left(t,x;\tau,\xi\right)\right|\le c_{l^*,\varepsilon}^{r,q}e^{-\delta\left(1-\left(l^*-1\right)\varepsilon\right)\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\left(\prod_{j=1}^{l^*-1}B\left(\alpha_0;j\alpha_0\right)\right),$$

$$|r|_*\le\alpha_*,\ |q|_*\le\alpha_*,\ \left(t,x;\tau,\xi\right)\in\varPi_T^2.$$

Тоді з (11) і (12), розмірковуючи як при одержанні оцінки (8), переконуємося в існуванні додатних сталих E і K таких, що для всіх $\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_+^n$, $|r|_*\le\alpha_*$, $|q|_*\le\alpha_*$ $l\ge l_+$, $\{x,\xi,\eta\}\subset\mathbb{R}^n$ та $0\le\tau<t\le T$

$$\left|\partial_{\xi}^{r}\partial_{x}^{q}K_{l}\left(t,x;\tau,\xi\right)\right|\le$$

$$\le c_{*}e^{-\delta_{*}\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\left(EK^{\frac{|r+q|_{*}}{h}}\right)^{l}\left(t-\tau\right)^{l\alpha_{0}-\frac{|r+q|_{*}}{h}}\left(\prod_{j=1}^{l-1}B\left(\alpha_{0};1+j\alpha_{0}\right)\right), \qquad (13)$$

$$\left|\partial_{\xi}^{r}K_{l}\left(t,\eta+\xi;\tau,\xi\right)\right|\le c_{*}e^{-\delta_{*}\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}\left(E\left(t-\tau^{\alpha_{0}}\right)\right)^{l}\left(\prod_{j=1}^{l-1}B\left(\alpha_{0};1+j\alpha_{0}\right)\right), \qquad (14)$$

де $l_{+}:=\max\left\{l_{*},l^{*}\right\}$.

Одержані оцінки (11)–(14) дозволяють встановити рівномірну збіжність стосовно просторових змінних функціональних рядів

$$\sum_{l=1}^{\infty}\partial_{\xi}^{r}\partial_{x}^{q}K_{l}\left(t,x;\tau,\xi\right),\ \ \sum_{l=1}^{\infty}\partial_{\xi}^{r}K_{l}\left(t,x+\xi;\tau,\xi\right),$$

при $|r|_{*}\le\alpha_{*}$, $|q|_{*}\le\alpha_{*}$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^{n}$ і $0\le\tau<t\le T$ та одержати оцінки їхніх сум і, у такий спосіб, обґрунтувати правильність наступного допоміжного твердження.

Лема 2. Функція $\Phi\left(t,x;\tau,\xi\right)$ на множині Π_{T}^{2} за кожною із просторових змінних x і ξ має частинні похідні до порядку α_{*} включно, причому правильними є такі оцінки:

$$\left|\partial_{\xi}^{r}\partial_{x}^{q}\Phi\left(t,x;\tau,\xi\right)\right|\le c_{1}\left(t-\tau\right)^{\alpha_{0}-\left(1-\alpha n+\frac{|r+q|_{*}}{h}\right)}e^{-\delta_{*}\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \qquad (15)$$

$$\left|\partial_{\xi}^{r}\Phi\left(t,x+\xi;\tau,\xi\right)\right|\le c_{2}\left(t-\tau\right)^{\alpha_{0}-(1-\alpha n)}e^{-\delta_{*}\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \qquad (16)$$

(тут $|r|_{*}\le\alpha_{*}$, $|q|_{*}\le\alpha_{*}$, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^{n}$, $0\le\tau<t\le T$, а оціночні сталі c_{1}, c_{2} і δ_{*} не залежать від t, τ, x і ξ).

Теорема 1. Функція $Z\left(t,x;\tau,\xi\right)$ на множині Π_{T}^{2} за кожною із змінних x і ξ є диференційовною до порядку α_{*} включно, причому $\forall\delta>0\ \ \forall\{r,q\}\subset\mathbb{Z}_{+}^{n}\ \ |r|_{*}\le\alpha_{*},\ |q|_{*}\le\alpha_{*},\ \exists c>0\ \ \forall\left(t,x;\tau,\xi\right)\in\Pi_{T}^{2}$:

$$\left|\partial_{\xi}^{r}\partial_{x}^{q}Z\left(t,x;\tau,\xi\right)\right|\le c\left(t-\tau\right)^{-\frac{n+|r+q|_{*}}{h}}e^{-\delta\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \qquad (17)$$

Доведення. Питання про диференційовність функції Z за просторовими змінними зводиться до питання про можливість диференціювати за цими змінними під знаком інтеграла в об'ємному потенціалі W. Тому досить встановити рівномірну стосовно змінних x і ξ, $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$, збіжність інтеграла

$$I_*(t,x;\tau,\xi):=\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_\xi^r\partial_x^q\big(G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)\big)dy,$$
$$0\le\tau<t\le T,\ \ |r|_*\le\alpha_*,\ \ |q|_*\le\alpha_*.$$

Урахувавши оцінки (5), (15) і (16), дістанемо

$$\left|I_*(t,x;\tau,\xi)\right|\le c_3(t-\tau)^{\alpha_0-\frac{n+|r+q|_*}{h}}e^{-\frac{\delta}{2}\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\ \ (t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2,\ (18)$$

де $|r|_*\le\alpha_*$, $|q|_*\le\alpha_*$, константа $c_3>0$ не залежить від t, τ, x і ξ.

Звідси одержуємо рівномірну стосовно змінних x і ξ збіжність інтеграла I_*, а відтак, і диференційовність за цими змінними функції $Z(t,x;\tau,\xi)$ до зазначеного порядку α_* на площині Π_T^2.

Оцінка (17) безпосередньо випливає з нерівностей (3) і (18).

Теорему доведено.

Наслідок 2. Якщо $\alpha_*\ge p$, то для всіх t і τ, $0\le\tau<t\le T$, а також $\{x,\xi\}\subset\mathbb{R}^n$ виконується рівність

$$\left\{P_0(t;i\partial_x)+P_1(t,x;i\partial_x)\right\}W(t,x;\tau,\xi)=\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\left\{P_0(t;i\partial_x)+P_1(t,x;i\partial_x)\right\}\times$$
$$\times G(t,\beta;x-y)\Big)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy.$$

Перейдемо до дослідження властивостей гладкості функції $Z(t,x;\tau,\xi)$ стосовно змінних t і τ.

Лема 3. Об'ємний потенціал W є диференційованою функцією за змінною t на $(\tau;T]$ такою, що для $(t,x;\tau,\xi)\in\Pi_T^2$

$$\partial_t W(t,x;\tau,\xi)=\Phi(t,x;\tau,\xi)+\int_\tau^t d\beta\int_{\mathbb{R}^n}\partial_t G(t,\beta;x-y)\Phi(\beta,y;\tau,\xi)dy.$$

Доведення. Згідно з означенням похідної

$$\partial_t W(t,x;\tau,\xi)=\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{\Delta}\left\{\int_\tau^{t+\Delta}\widetilde{V_\beta}(t+\Delta,x;\tau,\xi)d\beta-\int_\tau^t\widetilde{V_\beta}(t,x;\tau,\xi)d\beta\right\},$$

де

$$\widetilde{V_\beta}\left(t,x;\tau,\xi\right):=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G\left(t,\beta;x-y\right)\Phi\left(\beta,y;\tau,\xi\right)dy,$$

тому доведення диференційовності $W\left(t,x;\tau,\xi\right)$ за змінною t зводиться до встановлення існування границі з правої частини цієї рівності. Ця границя існуватиме, якщо існуватимуть рівні між собою відповідні односторонні границі

$$I_\pm:=\lim_{\Delta\to+0}\frac{1}{\pm\Delta}\left\{\int\limits_\tau^{t\pm\Delta}\widetilde{V_\beta}\left(t\pm\Delta,x;\tau,\xi\right)d\beta-\int\limits_\tau^t\widetilde{V_\beta}\left(t,x;\tau,\xi\right)d\beta\right\}.$$

Безпосередньо з оцінки

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left|\partial_t G\left(t,\beta;x-y\right)\Phi\left(\beta,y;\tau,\xi\right)\right|dy\le$$

$$\le c\left(t-\tau\right)^{-\alpha n}\left(t-\beta\right)^{\alpha n-\frac{n+p}{h}}\left(\beta-\tau\right)^{\alpha_0-1}e^{-\delta_0\left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}},\tag{19}$$

$$0\le\tau<\beta<t\le T,\ \left\{x,y\right\}\subset\mathbb{R}^n,$$

яка одержується з нерівності (3), твердження леми 1 й того, що функція G є розв'язком рівняння (2), дістаємо диференційовність функції $\widetilde{V_\beta}\left(t,x;\tau,\xi\right)$ за змінною t у кожній точці проміжку $\left(\beta;T\right]$, $\beta>\tau$, та виконання такої рівності:

$$\partial_t\widetilde{V_\beta}\left(t,x;\tau,\xi\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}\left(\partial_t G\left(t,\beta;x-y\right)\right)\Phi\left(\beta,y;\tau,\xi\right)dy,\tag{20}$$

при $0\le\tau<\beta<t\le T$, $\left\{x,y\right\}\subset\mathbb{R}^n$.

Далі, скориставшись тим, що

$$\frac{1}{\pm\Delta}\int\limits_t^{t\pm\Delta}\widetilde{V_\beta}\left(t\pm\Delta,x;\tau,\xi\right)d\beta=\widetilde{V_{t\pm\theta\Delta}}\left(t\pm\Delta,x;\tau,\xi\right)\xrightarrow[\pm\Delta\to0]{}\Phi\left(t,x;\tau,\xi\right),$$

$$\frac{1}{\pm\Delta}\int\limits_\tau^t\left(\widetilde{V_\beta}\left(t\pm\Delta,x;\tau,\xi\right)-\widetilde{V_\beta}\left(t,x;\tau,\xi\right)\right)d\beta=\int\limits_\tau^t\partial_t\widetilde{V_\beta}\left(t\pm\theta\Delta,x;\tau,\xi\right)d\beta,\ \ \theta\in\left(0;1\right),$$

а також, очевидним зображенням

$$\frac{1}{\pm\Delta}\left\{\int\limits_\tau^{t\pm\Delta}\widetilde{V_\beta}\left(t\pm\Delta,x;\tau,\xi\right)d\beta-\int\limits_\tau^t\widetilde{V_\beta}\left(t,x;\tau,\xi\right)d\beta\right\}=\frac{1}{\pm\Delta}\times$$

$$\times\left\{\int\limits_t^{t\pm\Delta}\widetilde{V_\beta}\left(t\pm\Delta,x;\tau,\xi\right)d\beta+\int\limits_\tau^t\left(\widetilde{V_\beta}\left(t\pm\Delta,x;\tau,\xi\right)-\widetilde{V_\beta}\left(t,x;\tau,\xi\right)\right)d\beta\right\},$$

одержуємо, що

$$I_{\pm} = \Phi\left(t,x;\tau,\xi\right) + \lim_{\Delta\to+0}\int_{\tau}^{t}\partial_t \widetilde{V_\beta}\left(t\pm\theta\Delta,x,\tau,\xi\right)d\beta,\;\; \theta\in\left(0;1\right).$$

Урахувавши тепер рівність (20), приходимо до висновку, що для доведення вихідної леми досить обґрунтувати правильність рівності

$$\lim_{\Delta\to0}\int_{\tau}^{t}\partial_t \widetilde{V_\beta}\left(t+\Delta,x;\tau,\xi\right)d\beta = \int_{\tau}^{t}\left(\lim_{\Delta\to0}\partial_t \widetilde{V_\beta}\left(t+\Delta,x;\tau,\xi\right)\right)d\beta. \qquad (21)$$

Оцінимо підінтегральний вираз із лівої частини цієї рівності. Скориставшись ще раз рівністю (20), а також тим, що G — розв'язок рівняння (2), оцінками (19), (3) і (15), виділяючи скрізь залежність від Δ, одержимо

$$\left|\int_{\tau}^{t}\partial_t \widetilde{V_\beta}\left(t+\Delta,x;\tau,\xi\right)d\beta\right| \le c\left(t-\tau\right)^{2\alpha_0-\left(1+\alpha n+\frac{p}{h}\right)},$$

$$0\le\tau<t\le T,\;\; 0<\left|\Delta\right|<\left(t-\tau\right)/2,\;\; \left\{x,\xi\right\}\subset\mathbb{R}^n,$$

де додатна стала c не залежить від Δ. Ця оцінка характеризує рівномірну збіжність інтеграла з лівої частини рівності (21) та забезпечує виконання цієї рівності.

Лема доведена.

Теорема 2. Для функції Z виконується граничне співвідношення

$$Z\left(t,x;\tau,\cdot\right)\xrightarrow[t\to\tau+0]{}\delta\left(\cdot-x\right)$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі $S^{/}$.

Доведення. Зваживши на те, що функція G є ФРЗК для рівняння (2), приходимо до висновку, що доведення потребує лише граничне співвідношення

$$\left\langle W\left(t,x;\tau,\cdot\right),\varphi\left(\cdot\right)\right\rangle\xrightarrow[t\to\tau+0]{}0,\; 0\le\tau<t\le T,\; x\in\mathbb{R}^n,\; \varphi\in S. \qquad (22)$$

Безпосередньо із структури потенціала W переконуємося, що співвідношення (22) виконується, якщо існуватиме така додатна стала c_0, що для всіх $\beta\in\left[\tau;t\right]$, $0\le\tau<t\le T$ і $y\in\mathbb{R}^n$

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n}\overline{\Phi\left(\beta,y;\tau,\xi\right)}\varphi\left(\xi\right)d\xi\right|\le c_0, \qquad (23)$$

(тут риска зверху, означає комплексну спряженість).

Таким чином, доведення теореми 2 звелося до встановлення оцінки (23).

Використовуючи структуру (6) функції Φ та нерівність

$$\left|J_l\left(\beta,\tau,y\right)\right| := \left|\int_{\mathbb{R}^n}\overline{K_l\left(\beta,y;\tau,\xi\right)}\varphi\left(\xi\right)d\xi\right|\le c_l,\;\; \varphi\in S,$$

$$\beta \in [\tau, t], \; 0 \le \tau < t \le T, \;\; y \in \mathbb{R}^n,$$

яка встановлюється шляхом поєднання одержаних раніше оцінок повторних ядер K_l із властивостями елементів простору S швидко спадних гладких на $\mathbb{R}^n$ функції, зважаючи при цьому на існування такого номера l_*, що

$$\left| \sum_{l=l_*+1}^{\infty} K_l(t, x; \tau, \xi) \right| \le c_* e^{-\delta_0 \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^{\alpha}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \; \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \; 0 \le \tau < t \le T,$$

(див. обґрунтування правильності твердження леми 1), знаходимо, що для всіх $\varphi \in S$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\Phi(\beta, y; \tau, \xi)} \varphi(\xi) d\xi \right| \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{l_*} |J_l(\beta, \tau, y)| + \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{l=l_*+1}^{\infty} K_l(\beta, y; \tau, \xi) \right| |\varphi(\xi)| d\xi \le$$

$$\le \sum_{l=1}^{l_*} c_l + c_* \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)| d\xi \equiv c_0 < +\infty, \beta \in [\tau, \mathrm{t}], 0 \le \tau < t \le T, y \in \mathbb{R}^n,$$

де константа c_0 не залежить від β, τ, t і y.

Отже, оцінка (23) виконується.

Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай виконуються умови А) і В), тоді при $\alpha_* \ge p$ функція Z, що визначається рівністю (4), є ФРЗК для рівняння (1).

Доведення. Зважаючи на рівності (5) та

$$\partial_t G(t, \tau; x) = P_0(t, i\partial_x) G(t, \tau; x),$$

лему 3 і наслідок 2, для всіх $(t; x) \in \Pi_{(\tau;T]}$, $\tau \in [0, T)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, одержуємо

$$\partial_t Z(t, x; \tau, \xi) =$$

$$= \partial_t G(t, \tau; x-\xi) + \partial_t W(t, x; \tau, \xi) = P_0(t; i\partial_x) G(t, \tau; x-\xi) +$$

$$+ \Phi(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^{t} d\beta \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t G(t, \beta; x-y)) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy =$$

$$= \{ P_0(t; i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x) \} G(t, \tau; x-\xi) +$$

$$+ \{ P_0(t; i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x) \} W(t, x; \tau, \xi) =$$

$$= \{ P_0(t; i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x) \} Z(t, x; \tau, \xi).$$

Таким чином, функція $Z(t,x;\tau,\xi)$, як функція змінних $(t;x)$ на $\Pi_{(\tau;T]}$ є звичайним розв'язком рівняння (1) у кожній фіксованій точці $(\tau;\xi)\in\Pi_{[0,T)}$.

Якщо врахувати при цьому твердження теореми 2, то прийдемо до висновку, що для функції Z виконуються всі умови з означення ФРЗК для рівняння (1).

Теорему доведено.

Висновок. Для параболічних типу Шилова рівнянь (1) зі змінними молодшими коефіцієнтами існує ФРЗК за умови, що гладкість цих коефіцієнтів є не нижчою ніж порядок p рівняння (1).

Однак, слід зазначити, що розглянутий тут клас рівнянь (1) охоплює параболічні за Петровським рівняння зі сталими або залежними лише від часу коефіцієнтами групи старших членів. А, як відомо, (див., наприклад, [7]) ФРЗК для таких рівнянь існує за мінімальніших умов на гладкість молодших коефіцієнтів.

Список використаних джерел:

1. Хоу-синь У. Об определении параболичности систем уравнений в частных производных / У. Хоу-синь // Успехи мат.наук. — 1960. — Т. 15, № 6. — С. 157–161.
2. Житомирский Я. И. Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами / Я. И. Житомирский // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1959. — Т. 23. — С. 925–932.
3. Довжицька І. М. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами / І. М. Довжицька, В. А. Літовченко // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. праць. — Чернівці : Рута, 2010. — Вип. 528. Математика. — С. 43–50.
4. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 274 с.
5. Литовченко В. А. Задача Коши для параболических по Шилову уравнений / В. А. Литовченко // Сиб. мат. журн. — 2004. — Т. 45, № 4. — С. 809–821.
6. Гельфанд И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 307 с.
7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — М. : Мир, 1968. — 427 с.

We built the fundamental solution of the Caushy problem and investigated its properties for a class of Shilov parabolic equations with variable coefficients bounded smooth and integral form.

Key words: *the Caushy problem, the fundamental solution, parabolic after Shilov.*

Отримано: 12.03.2014