УДК 519.612

В. С. Абрамчук*, канд. фіз.-мат. наук,
І. В. Абрамчук,** старший викладач

*Вінницький державний педагогічний університет
імені М. Коцюбинського, м. Вінниця,
**Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Запропоновано метод розв'язування різницевих рівнянь $A\vec{x}=\vec{b}$, $A=H+S+V$, що виникають при дискретизації двовимірних крайових задач еліптичного типу. Алгоритм розв'язування об'єднує ітераційний процес з прямими методами розв'язання рівнянь $S_i\vec{x}_i=d_i$, $i=N/m$, де стрічкова $2m+1$ — діагональна матриця S_i з високою точністю наближає A і має мінімальну ширину, N — число рядків матриці A.

Ключові слова: *різницеве еліптичне рівняння, перетворення структури матриці, розклад Холецького.*

Вступ. У роботах [1–4] наведено відомості щодо розв'язування модельного різницевого рівняння Пуассона на сітці $N\times N$ (число змінних $n=N^2$). У таблиці 1 подані ресурси для часу і пам'яті, які необхідні для розв'язання рівняння із заданою точністю в умовах відсутності похибок заокруглення, що потребує певної застороги [2]. Більш глибокий аналіз показує, що наведені методи потребують удосконалення, оскільки недостатньо досліджений вплив структури матриці на швидкість збіжності, не сформульовані критерії, за яких метод мав би оптимальну швидкість збіжності. Наведені в таблиці 1 показники з ростом розмірності сіткової матриці для простору $\mathbb{R}^2$ і ,особливо, при переході в простір $\mathbb{R}^n$, $n\geq 3$, втрачають свій зміст, оскільки швидкість збіжності сповільнюється, бо методи не налаштовані на структуру дискретного оператора на заданому шаблоні і зростає залежність точності розв'язку від накопичення похибок обчислень. Перехід від модельного різницевого рівняння Пуассона до різницевих апроксимацій диференціальних еліптичних рівнянь гідродинаміки і тепломасоперенесення [3; 4] ще більше поглиблює різницю між теоретичними показниками, наведеними в таблиці 1, і реальними обчисленнями.

Постановка проблеми. Нехай еліптичний диференціальний оператор дискретизується на рівномірній квадратній сітці простору $\mathbb{R}^2$ за шаблоном «хрест».

Обґрунтувати, що існує така структура матриці A різницевого рівняння, для якої стрічкова матриця S з високою точністю апроксимує матрицю $A = H + S + V$ при мінімальній ширині стрічки S.

Постановка задачі.

1. Розробити метод, що поєднує в собі ітераційний процес з прямими методами розв'язання підзадач для різницевих рівнянь еліптичного типу.
2. Розробити алгоритм швидкого розв'язування різницевого рівняння еліптичного типу.

Щоб побудувати ефективні методи розв'язування різницевих еліптичних рівнянь, узагальнимо поняття: «ітераційні процеси Якобі і Гаусса-Зейделя» та розкриємо зміст « $A(S,m)$ — перетворення матриці A шляхом упорядкування вузлів сіткової матриці C ».

Розглянемо ітераційний метод

$$\vec{x}^{(k+1)} = W\,\vec{x}^{(k)} + \vec{f}, \qquad (1)$$

узгоджений з системою $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\textbf{\textit{rank}}\, A = n$, $W \in M_n(\mathbb{R})$, $\textbf{\textit{rank}}\, W = n$, $\vec{x}^* = A^{-1}\vec{b}$, $\vec{x}^* = W\,\vec{x}^* + \vec{f}$. Розіб'ємо матрицю A на складові: $A = S + H + V$, де $S[n \times n]$ — стрічкова матриця, складена з $2m+1$ діагоналей матриці A, $m < n$; $H[n \times n]$ ($V[n \times n]$) — матриці, складені з елементів матриці A, що знаходяться нижче (вище) стрічкової матриці S. Розбиття $A = S + H + V$ показане на рисунку 1, O — матриця з нульових елементів.

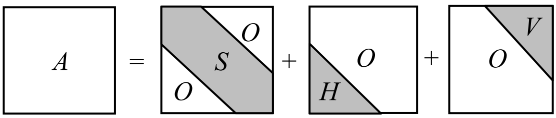

Рис. 1. *Розбиття матриці для застосування комбінованого методу*

Таблиця 1

Порівняльна складність розв'язання рівняння Пуассона на сітці $N \times N$ $(n = N^2)$. У стовпчику 4 позначено: П — прямий, I — ітераційний методи

1. Метод	2. Час	3. Пам'ять	4
Холецького для щільно заповнених матриць	n^3	n^2	П
Явного обертання	n^2	n^2	П
Холецького для стрічкових матриць	n^2	$n^{3/2}$	П
Якобі	n^2	n	I
Гаусса-Зейделя	n^2	n	I
Холецького для розріджених матриць	$n^{3/2}$	$n \log n$	П

Продовження таблиці 1

Спряжених градієнтів	$n^{3/2}$	n	I
Послідовної верхньої релаксації	$n^{3/2}$	n	I
Чебишевського прискорення з SSOR	$n^{5/4}$	n	I
Швидке перетворення Фур'є	$n \log n$	n	П
Блочна циклічна редукція	$n \log n$	n	П
Багатосітковий	n	n	I
Нижня оцінка	n	n	

Означення 1. Розбиття $H+S+V=A$ матриці A назвемо розбиттям з «переважанням стрічкової матриці S з числом діагоналей $2m+1$», якщо

$$W = I - S^{-1}A \tag{2}$$

і спектральний радіус $\rho(W) < 1-\varepsilon$, де $0<\varepsilon<1$.

Означення 2. Ітераційний процес (1) назвемо процесом Якобі, якщо

$$W = -S^{-1}(H+V),\ \vec{f} = S^{-1}\vec{b}\ ; \tag{3}$$

процесом Зейделя, якщо

$$W = -(H+S)^{-1}V\ ,\ \vec{f} = (H+S)^{-1}\vec{b}\ ; \tag{4}$$

процесом Гаусса-Зейделя (або комбінованим методом), якщо система

$$S\,\vec{x}^{(k+1)} = -(H+V)\vec{x}^{(k)} + \vec{b} = \vec{d}^{(k)} \tag{5}$$

на кожному k-му кроці розв'язується прямим методом, наприклад, гаусовим виключенням, якщо матриця S довільна невироджена, або розкладом Холецького, якщо матриця S симетрична і додатно визначена.

Якщо матриці H, S, V розбиті на блоки H_i, S_i, V_i, $i=0,1,...,t$ (H_0, V_t — нуль матриці), то ітераційний процес (5) можна реалізувати з уточненням

$$S_i\,\vec{u}_i^{(k+1)} = -H_i\vec{v}_i^{(k+1)} - V_i\vec{w}_i^{(k)} + \vec{f}_i\,,\ i=0,1,...,t\,, \tag{6}$$

де вектори $\vec{u}_i$, $\vec{v}_i$, $\vec{w}_i$ складові вектора $\vec{x}$, що відповідають i-му розбиттю матриці A.

Означення 3. $A(S,m)$ — перетворенням матриці A різницевого рівняння називається таке упорядкування вузлів сіткової матриці $C(N)$, яке не змінює ні коефіцієнтів матриці A, ні її властивостей, але змінює структуру матриці A так, що стрічкова матриця S мінімальної півширини $m+1$ найкраще наближає матрицю $A=H+S+V$ (N — число вузлів сіткової матриці).

Щоб виявити як впливає упорядкування вузлів сіткової матриці C на структуру матриці A і які є спільні закономірності для різницевих еліптичних рівнянь, розглянемо задачі у просторі $\mathbb{R}^2$.

1. Модельна задача [1]. Чисельно розв'язати крайову задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)\,,\ (x,y)\in D \tag{7}$$

з крайовою умовою

$$u(x,y)=g(x,y)\,,\ (x,y)\in\Gamma_D\,, \tag{8}$$

де D — квадратна (або прямокутна) область, Γ_D — контур області D, $g(x,y)$ — кусково-неперервна функція на Γ_D, f — неперервна на D.

2. Узагальнена задача Діріхле [1]: чисельно розв'язати крайову задачу Діріхле для рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(B\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(C\frac{\partial u}{\partial y}\right)+Fu=G\,,\ (x,y)\in D \tag{9}$$

з крайовою умовою

$$u(x,y)=g(x,y)\,,\ (x,y)\in\Gamma_D\,, \tag{10}$$

де B,C — додатні, два рази диференційовні функції по x і y в області D; $F\le 0$, F та G — неперервні функції в області D, g — кусково-неперевна на границі області D, D — квадратна або прямокутна область. При дискретизації еліптичного рівняння (7) або (9) на рівномірній квадратній сітці за шаблоном «хрест» дістанемо різницеве рівняння $A\vec{x}=\vec{b}$ з симетричною додатно визначеною матрицею [1].

3. Чисельно розв'язати еліптичне рівняння, наприклад, стаціонарне конвективно-дифузійне [3; 4]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho ru\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho qu\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\gamma\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\gamma\frac{\partial u}{\partial y}\right)+V_pu+V_c\,,\ (x,y)\in D \tag{11}$$

з крайовою умовою

$$q_1\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}=q_2u+q_3\,,\ (x,y)\in\Gamma_D\,, \tag{12}$$

де $\left(r,q\right)$ — компоненти поля швидкості, γ — коефіцієнт дифузії, ρ — густина середовища, $\left(V_p\left(<0\right),V_c\right)$ — джерела, що породжують u, $\vec{n}$ — нормаль до поверхні Γ_D, q_1,q_2,q_3 — кусково-неперервні функції змінних x,y.

Спільним для всіх трьох задач є те, що матриці різницевих рівнянь є додатно визначеними. Відповідно до структури сіткової матриці C, змінюється структура матриці A, але зв'язки для шаблону «хрест» залишаються незмінними.

На рисунках 2–6 показані різні схеми упорядкування вузлів двомірної прямокутної (квадратної) сітки та відповідні матриці різницевого рівняння. Для простоти зображень використовуються різницеві рівняння для модельного рівняння (7).

Швидкість збіжності методу Гаусса-Зейделя визначається за формулою $\left\|\vec{\varepsilon}^{(k+1)}\right\|_2 \leq \left\|S^{-1}(N+V)\right\|_2 \left\|\vec{\varepsilon}^{(k)}\right\|_2$ і залежатиме від структури матриці A. Для аналізу швидкості збіжності модифікованого методу Гаусса-Зейделя розв'язання різницевого рівняння розглянемо кожну із структур (рисунки 2–6) упорядкування вузлів сіткової матриці. Не нульовим елементам відповідають заштриховані квадрати.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

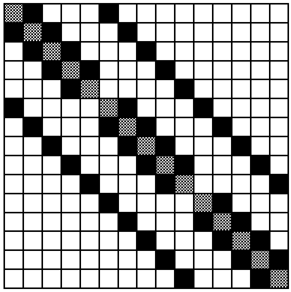

Рис. 2. *Точкове природне впорядкування*

1	9	2	10
11	3	12	4
5	13	6	14
15	7	16	8

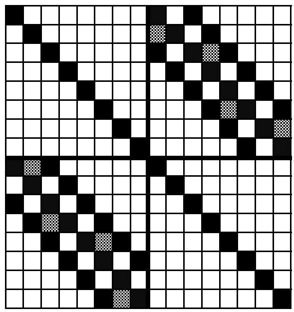

Рис. 3. *Чорно-біле точкове впорядкування*

1	2	3	4
9	10	11	12
5	6	7	8
13	14	15	16

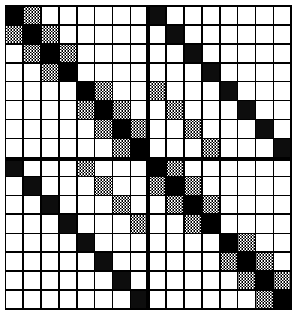

Рис. 4. *Чорно-біле впорядкування по лініям*

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15

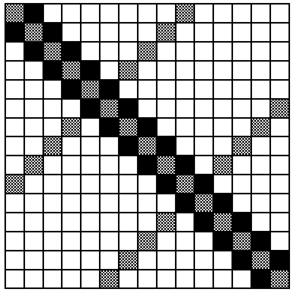

Рис. 5. *Хвильове послідовне впорядкування*

1	4	7	10
2	5	8	11
3	6	9	12
13	16	19	22
14	17	20	23
15	18	21	24

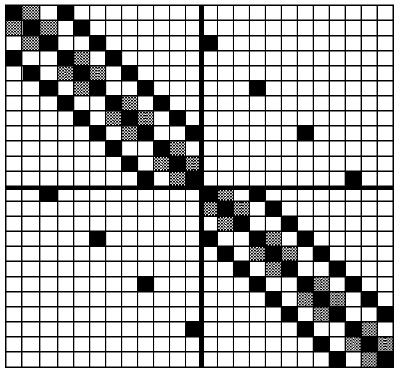

Рис. 6. *Смугове поперечне впорядкування*

Структури впорядкування вузлів сіткової матриці різницевого рівняння.

Чорно-біле точкове впорядкування вузлів сіткової матриці прямокутної області (рис. 3) — вектор змінних $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $n = N^2$, упорядкований з двох векторів $\vec{u}_1, \vec{u}_2$: $\vec{x} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)^T$, що відповідають «чорним і білим» вузлам [1]. Відповідно до упорядкування вектора змінних $\vec{x}$, матриця A розбивається на блоки; $S_i = D_i$, $i = 1,2$, — однодіагональні матриці, матриця $S^{-1} = (S_1 \oplus S_2)^{-1}$ слабко наближає A^{-1}, тому модифікований метод Гаусса-Зейделя не має високої швидкості збіжності.

Чорно-біле впорядкування вузлів сіткової матриці *по лініям* (горизонтальним або вертикальним, рисунок 4) — вектор змінних $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $n = N^2$, розбитий на два підвектора $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ (матриця A приймає блочну структуру) [1]. Матриці S_i, $i = 1,2$, для задач (7)–(10) тридіагональні симетричні додатно визначені і можуть бути розкладеними на множники L_i, L_i^T методом Холецького до початку ітерацій; $V_i = H_i^T$ — трикутні матриці, що мають по дві ненульові діагоналі [1]. Швидкість збіжності прискорюється модифікованим блочним методом Гаусса-Зейделя (6). Покладемо: $S_i = L_i \cdot L_i^T$, матриці L_i, $i = 1,2$ — дводіагональні; матриці $S_i^{-1} = (L_i^{-1})^T \cdot L_i^{-1}$, $i = 1,2$ — тридіагональні; $S_1^{-1} H = X_1$ — нижня матриця Хессенберга, $S_2^{-1} V = X_2$ — верхня матриця Хессенберга. Система рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ еквівалентна системі:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_1} &= -X_1 \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{f_1}, \overrightarrow{f_1} = S_1^{-1} \overrightarrow{b_1}, \\ \overrightarrow{u_2} &= -X_2 \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{f_2}, \overrightarrow{f_2} = S_2^{-1} \overrightarrow{b_2}, \\ \vec{x} &= (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})^T, \vec{b} = (\overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2})^T. \end{aligned} \tag{13}$$

Модифікований ітераційний метод Гаусса-Зейделя можна записати у вигляді послідовних процедур:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{u_1}^{(k+1)} &= -X_1 \overrightarrow{u_2}^{(k)} + \overrightarrow{f_1}, \\ \overrightarrow{u_2}^{(k+1)} &= -X_2 \overrightarrow{u_1}^{(k+1)} + \overrightarrow{f_2}. \end{aligned} \tag{14}$$

Зазначимо, що в ітераційному процесі (14) немає потреби обчислювати хессенбергові матриці X_1, X_2. Якщо матриця S несиметрична (задача (11), (12)), то використовується LU розклад.

Природне впорядкування по лініям (рисунок 2) — матриця S для задач (7)–(10) — тридіагональна симетрична додатно визначена (при необхідності можна розбити на блоки); розклад Холецького $S = L \cdot L^T$; $V = H^T$ — діагональні матриці [1]. Модифікований ітераційний процес Якобі матиме вигляд

$$\vec{x}^{(k+1)} = -S^{-1}(H+V)\vec{x}^{(k)} + S^{-1}\vec{b}$$

(можна застосувати блочний метод Гаусса-Зейделя, розбивши матрицю A на блоки, відповідно до розбиття сіткової матриці по лініям).

Хвильове впорядкування по лініям (рис. 5) — модифікує природне впорядкування, матриця S для задач (7–10) — тридіагональна симетрична додатно визначена. Це дає можливість записати рекурентну формулу виключення Гаусса, що позбавляє необхідності зберігати у явному вигляді множники Холецького.

Має місце.

Лема. Виключення Гаусса в тридіагональній матриці різницевого модельного рівняння для задачі (7), (8), при хвильовому впорядкування вузлів сіткової матриці по лініям, зводить матрицю до дводіагональної з головною одиничною діагоналлю і верхньою наддіагоналлю, складеною з елементів послідовності

$$(a_{i,i+1})_{i=1}^{n} : a_{1,2} = -\frac{1}{4}, \ \forall i \in [1; n-1] \ a_{i+1,i+2} = -1 \Big/ \left(4 + \frac{1}{a_{i,i+1}}\right). \tag{15}$$

Послідовність $(a_{i,i+1})_{i=1}^{\infty}$ збігається до числа $1/(2+\sqrt{3})$.

Зазначимо, що елементи послідовності $(-a_{i,i+1})$ визначають перетворення розширеної матриці $\left(A,\vec{b}\right)$.

Оскільки елементи діагоналей матриці S складені з постійних коефіцієнтів, то виключення Гаусса приводить до рекурентних співвідношень: $z_{n+1}=4-\dfrac{1}{z_n}, z_1=4$. Застосуємо принцип стиснутих відображень до рівняння $x=\varphi(x)=4-\dfrac{1}{x},\ x_0=4;\quad \varphi'(z)=+\dfrac{1}{z^2}<1$ для $z>2$. Перейшовши в послідовності $x_{n+1}=4-\dfrac{1}{x_n}$ до границі для $n\to\infty$, дістанемо $z=4-\dfrac{1}{z}$, $z+\dfrac{1}{z}-2=2\Rightarrow\left(\sqrt{z}-\dfrac{1}{\sqrt{z}}\right)^2=2\Rightarrow$ $\sqrt{z}-\dfrac{1}{\sqrt{z}}=\pm\sqrt{2}\Rightarrow z=2+\sqrt{3}$.

Алгоритм розв'язання різницевого модельного рівняння для задачі (7), (8) при хвильовому впорядкуванні вузлів сітки.

Виключення Гаусса приводить до перетворення матриці $\left(A,\vec{b}\right)$ за правилами:

1. Для $i=1$ покласти $z_1=4$, розділити не нульові елементи першого рядка на $z_1=4$.
2. Для $\forall i=1,2,...,n$ обчислити $z_i=4-\dfrac{1}{z_{i-1}}$; покласти

$$a_{i,i-1}=0,\ a_{i,i}=1,\ a_{i,i+1}=-\frac{1}{z_i},\ a_{n,n+1}=0.$$

Інші не нульові елементи i-го рядка матриці $(A,\vec{b})$ розділити на z_i.

3. Метод Якобі для наближеного розв'язання різницевого рівняння Пуассона зведеться на k-му кроці до зворотної прогонки для дводіагональної матриці.

Ітераційний метод Якобі виявився ефективним при почергових прогонках по сітці: зверху-вниз, знизу-вгору, зліва-направо, з правої сторони — на ліво. У загальному для задачі (9), (10), розклад $L\cdot L^T$ тридіагональної матриці S буде залежати від коефіцієнтів диференціального оператора.

Смугове поперечне впорядкування вузлів сіткової матриці прямокутної області $N \times M$ (рисунок 6) — вектор змінних $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ розмірності $n = N \times M$, розбитий на $\frac{N}{m}$ частин, де $m \geq 3$ — кількість рядків у кожній смузі.

Узагальнимо метод (6) розв'язування різницевого рівняння на квадратній сітці, розділеній на смуги з $m \geq 3$ рядків і поперечним упорядкуванням змінних.

Має місце.

Теорема. Для модельного різницевого рівняння для задачі (7), (8) кожній смузі сіткової матриці $C[N \times M]$ відповідає рівняння

$$D\vec{u}_i = H\vec{v}_i + H^T\vec{w}_i + \vec{f}_i, \; i \in [1:N/m]$$

з блочними матрицями $D_i = D$, $H_i = H_i^T = H$ розмірностей $[mM \times mM]$.

Матриця D — симетрична додатно визначена, $2m+1$ - на діагональ якої збігається з діагоналями матриці A; матриці $H^T = H$ мають по одній ненульовій діагоналі (нижню та верхню), кожна з яких містить лише M ненульових елементів, рівних -1. На рисунку 7 показана блочна структура матриці Пуассона. Для узагальненої задачі (9), (10) блочні матриці D_i, H_i можуть приймати різні значення. Якщо матриця A додатно визначена, але не симетрична (задача (11), (12)), то і блочні матриці також не симетричні (або не всі є симетричними, тоді використовується LU — розклад стрічкової матриці S).

Кожна стрічкова матриця $D[mM \times mM]$ (у загальному матриця D_i), $m \geq 3$, має $(m-2)M$ рядків (стовпців), що складаються з елементів матриці A. З ростом числа m зростає число діагоналей матриці D, а отже і заповненість матриці L у розкладі Холецького $D = L \cdot L^T$. Тому найбільш раціональним співвідношенням між прискоренням швидкості збіжності наближень (6) і числом обчислень у матриці L є вибір $m = 4,5$. Для доведення теореми досить застосувати правило природного впорядкування по лініям [1].

$$A = \begin{bmatrix} D & H^T & 0 & & \\ H & D & H^T & 0 & \\ 0 & H & D & H^T & \\ & . & . & . & \\ & & 0 & H & D \end{bmatrix}$$

***Рис.** 7. Блочна структура матриці Пуассона*

Алгоритм розв'язування різницевого модельного рівняння для задачі (7), (8) при смуговому впорядкуванні вузлів сіткової матриці. У відповідності до структури матриці A (рис. 7) матимемо рівняння

$$\begin{gathered} D u_1^{(k+1)} = -H^T \vec{w}_1^{(k)} + \vec{f}_1 = \vec{d}_1^{(k+1)}, \\ \forall i = 2,...,t-1, \quad D u_i^{(k+1)} = -H\, \vec{v}_i^{(k+1)} - H^T \vec{w}_i^{(k)} + \vec{f}_i = \vec{d}_i^{(k+1)}, \\ D u_t^{(k+1)} = -H\, \vec{v}_t^{(k+1)} = \vec{d}_t^{(k+1)}, \ t = \frac{N}{m}. \end{gathered} \quad (16)$$

Скористаємось розкладом матриці $D = L \cdot L^T$, позначивши $L^T \vec{u}_i^{(k+1)} = \vec{y}_i^{(k+1)}$, матимемо для всіх $i \in [1:t]$:

$$L^T \vec{y}_j^{(k+1)} = \vec{d}_j^{(k+1)}, \ \vec{y}_j^{(k+1)} = L^{-1} \vec{d}_j^{(k+1)}, \ \forall j \in [1:t] \text{ (пряма прогонка),}$$

$$\vec{u}_j^{(k+1)} = L^{-T} \vec{y}_j^{(k+1)}, \forall j \in [1:t] \text{ (зворотна прогонка).}$$

Розклад $D = L \cdot L^T$ здійснюється до початку ітераційного процесу. Якщо матриця A є матрицею еліптичного різницевого рівняння для задачі (9), (10), то множники Холецького розкладу діагональних симетричних матриць D_i будуть, у загальному, різними. Якщо матриця S додатно визначена, але не симетрична (задача 11), (12)), то необхідно виконати LU - розклад.

Зазначимо, що крім послідовного смугового впорядкування вузлів сіткової матриці, можна задавати шахове (чорно-біле) смугове впорядкування.

Розклад Холецького додатно визначеної стрічкової симетричної матриці D з $2m+1$ -єю діагоналлю. При розкладі діагональних блоків D_i методом Холецького $D_i = L_i \cdot L_i^T$, послідовне обчислення рядків матриці L_i вимагає знаходження лише $m+1$ елементів у кожному рядку, затрати на обчислення яких становлять не більше $\frac{m(m+1)}{2}$ арифметичних операцій. Тому розклад Холецького, який можна виконувати до початку ітераційного процесу, є швидким і має мінімальне накопичення обчислювальних похибок.

Точність наближення матриці A різницевого рівняння еліптичного типу матрицею S. Нехай $[N_1 \times N_2]$ — розмірність сіткової матриці C різницевого еліптичного рівняння при дискретизації диференціального рівняння (7) (або (9), (10)) на шаблоні «хрест». І нехай вузли сіткової матриці C упорядковані по смугам шириною m. Тоді матриця $A \in M_n$, $n = N_1 \cdot N_2$ апроксимується матрицею S так, що

$p = \left(N_1 \cdot \left(1 - \frac{2}{m} \right) + 2 \right) N_2$ рядків (стовпців) матриці A збігаються з рядками (стовпцями) матриці S, а решта рядків A відрізняються лише одним не нульовим елементом від рядків (стовпців) матриці S. Матриця $W = I - S^{-1}A$ матиме $\left(N_1 \cdot \left(1 - \frac{2}{m} \right) + 2 \right) N_2$ нульових власних значень, що є необхідною умовою прискорення швидкості збіжності комбінованого методу. З формули $p = \left(N_1 \cdot \left(1 - \frac{2}{m} \right) + 2 \right) N_2$ випливає, що для $m \geq 4$ число $p > \frac{N_1 N_2}{2}$ (більше половини розмірності матриці A і не залежить від того, чи буде сіткова матриця квадратною, чи прямокутною, чи довільної форми вміщеної у прямокутник, а також не залежить від того, для якого з рівнянь (7), (9), (11) виконується дискретизація на шаблоні «хрест»).

Висновки. При смуговому поперечному впорядкуванні змінних діагональна матриця $S = \sum_{i=1}^{N/n} \oplus D_i$ є найкращим наближенням до матриці A, порівняно з, широко дослідженими способами впорядкування змінних, природним (рис. 2) та чорно-білим (шаховим) (рис. 3, 4).

Метод (6) з смуговим упорядкуванням змінних, порівняно з відомими методами розв'язування різницевих еліптичних рівнянь, має такі переваги:

- процедура (6) прискорює збіжність послідовності наближень до розв'язку двомірного різницевого еліптичного рівняння, оскільки неявний переобумовлювач — блочно-діагональна матриця S з високою точністю наближає матрицю A;
- алгоритм (6) швидко поширює інформацію на всі вузли сітки за N/m кроків, $m \geq 3$;
- алгоритм (6) швидко уточнює наближення $\vec{x}^{(k+1)}$, оскільки розклад $L_i \cdot L_i^T$ матриці D_i здійснюється до початку ітераційного процесу і обробляє розріджену стрічкову матрицю з півшириною $m+1$;
- алгоритм (6) не залежить від крайових умов Діріхле;
- алгоритм (6) легко адаптується до області Ω_0 зі складним профілем, шляхом вміщення в область простої структури Ω і присвоєнням розв'язку на доповненні $C_{\Omega \setminus \Omega_0}$ фіксованого значення (наприклад, нульового);

- декомпозиція вузлів сіткової матриці при поперечно-смуговому впорядкуванні максимально використовує інформацію про всі внутрішні вузли смуги і граничні умови, що відображає фундаментальну основу еліптичних рівнянь [3; 4];
- алгоритм розв'язування різницевих еліптичних рівнянь великих розмірностей можна ефективно реалізувати на паралельних обчислювачах, досить одночасно обробляти смуги сіткової матриці зверху-вниз (від початкової смуги до середньої) і знизу-вгору (від кінцевої смуги до середньої), зліва-направо (від вертикальної лівої смуги до середньої), справа-наліво (від вертикальної правої до середньої).

Узагальнимо метод (6) на розв'язування тривимірного рівняння Пуассона. Нехай розв'язується задача Діріхле для рівняння Пуассона на прямокутному паралелепіпеді з розмірністю сіткової матриці $N \times M \times K$. Виділимо з тримірної сіткової матриці паралелепіпед розмірності $\left[m \times m \times K\right]$ і виконаємо упорядкування вздовж осі OZ. Таку комірку скорочено будемо називати $\left(i, j\right)$ — блоком або шаблоном $\left[i \times j\right]$.

Легко довести, що стрічкова матриця S збігається з матрицею A для більшої половини рядків (стовбців), якщо блоки мають розмірність $\left[m \times m\right] = \left[8 \times 8\right]$ (матриця S стане 129-ти діагональною). Більш раціональним способом упорядкування сіткової матриці у просторах $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, є кольорове упорядкування [5].

Результати та перспективи подальшого дослідження.

1. Для розв'язання еліптичного різницевого рівняння розроблений комбінований ітераційний метод, який використовує перетворення структури матриці рівняння і забезпечує щоб стрічкова складова S матриці A мала мінімальну ширину і апроксимувала A з високою точністю.
2. Розроблені алгоритми є швидкозбіжними, оскільки використовують неявний переобумовлювач — матрицю S.
3. Результати, отримані для задач еліптичного типу у просторі $\mathbb{R}^2$, можуть бути застосовані для наближеного розв'язування рівнянь параболічного і гіперболічного типів.

Список використаних джерел:

1. Хейгеман Л. Прикладные итерационные методы / Л. Хейгеман, Д. Янг ; пер. с англ. — М. : Мир, 1986. — 448 с.
2. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра / Дж. Деммель. — М. : Мир, 2001. — 429 с.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. — М. : Энергоатомиздат, 1984. — 125 с.

4. Зверев В. Г. Модифицированный полилинейный метод решения разностных эллиптических уравнений / В. Г. Зверев // ЖВМ и МФ. — 1998. — Т. 38, № 9. — С. 1553–1562.
5. Абрамчук В. С. Итерационные методы направленного поиска решения систем $Ax = f$ с сингулярно-естественным упорядочением переменных / В. С. Абрамчук // Доп. НАН України. — 1996. — № 8. — С. 4–8.

A method of solving difference equations $A\vec{x} = \vec{b}$, $A = H + S + V$ that arise in discretization of two-dimensional elliptic boundary value problems. Solution algorithm brings together an iterative process with direct methods of solving equations $S_i\vec{x}_i = d_i$, $i = N/m$, where S_i is $2m+1$ band-diagonal matrix that approaches A with high precision and has a minimum width, N — number of rows of the matrix A.

Key words: *elliptic difference equation, transform the structure of the matrix, Cholesky factorization.*

Отримано: 20.02.2014

УДК 517.97

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ІСНУВАННЯ ДОЗВУКОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМІ НЕЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗАНИХ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. Одержано результат про існування дозвукових періодичних біжучих хвиль для таких систем.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, дозвукові періодичні біжучі хвилі.*

Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m)-го осцилятора в момент часу t. Передбачається, що кожний осцилятор нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд