УДК 517.927.6

В. В. Листопадова, канд. фіз.-мат. наук

Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ

ПРО ОДНУ БАГАТОТОЧКОВУ ЗАДАЧУ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПУ З ПАРАМЕТРАМИ

Розглядається багатоточкова задача для диференціальних рівнянь другого порядку з постійним запізненням і параметрами. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку цієї задачі і обґрунтовано застосування до неї проекційного метода.

Ключові слова: *багатоточкова задача, диференціальні рівняння, параметри, проекційний метод.*

Вступ. Математичними моделями ряду важливих задач фізики, механіки, хімії є крайові задачі для диференціальних і ітегро-диференціальних рівнянь з параметрами та їх систем. До них, зокрема, відносяться багатоточкові задачі для диференціальних рівнянь з параметрами. Вони детально досліджувалися багатьма авторами, серед яких потрібно відзначити роботи А. Ю. Лучки, М. С. Курпеля [1, 2]. Але задачі для диференціальних рівнянь нейтрального типу з параметрами вивчені ще недостатньо. Оскільки побудувати точний розв'язок таких задач в більшості випадків неможливо,то в зв'язку з цим важливого значення набуває питання побудови ефективних наближених методів їх розв'язування.

У роботі розглядається багатоточкова задача для диференціальних рівнянь другого порядку з постійним запізненням і параметрами та обґрунтовано застосування до неї проекційного методу.

Постановка задачі. Знайти функцію $y(x)$ і параметри $\lambda \in R^l$, які задовольнятимуть рівнянню:

$$\begin{aligned}(Ly)(x) \equiv y''(x) + q(x)y''(x-\Delta) + g_1(x)y'(x) + g_2(x)y(x) + \\ +g_3(x)y'(x-\Delta) + g_4(x)y(x-\Delta) = f(x) + c(x)\lambda,\ x \in (a;b)\end{aligned} \tag{1}$$

і умовам

$$y(x_s) = \alpha_s,\ \alpha_s \in R,\ s = \overline{1,m},$$

$$a = x_1 < x_2 < \ldots < x_s < \ldots < x_m = b, \tag{2}$$

$$y''(x) = y'(x) = y(x) = 0, x \in (a-\Delta; a), \tag{3}$$

де Δ — постійне запізнення, $\Delta > 0$, $f(x)$ — відома, $y(x)$ — шукана функції, $c(x)\lambda$ — скалярний добуток шуканого вектора $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l)$ і відомої векторної функції $c(x) = (c_1(x), c_2(x), \ldots, c_l(x))$, $l = m-2$.

Припустимо, що коефіцієнти $q(x), c(x), g_i(x), i=\overline{1,4}$ визначені і неперервні на $(a;b)$, $q(x)\neq 0$, при $x\in(a;c), c=a+\Delta, f\in L_2(a;b)$.

Зведення задачі до рівносильного інтегрального рівняння. Розглянемо оператори

$$\begin{aligned}(Ay)(x) &= y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_2(x)y(x)+\\ &+q(x)\{y''(x-\Delta)+a_1(x-\Delta)y'(x-\Delta)+a_2(x-\Delta)y(x-\Delta)\},\end{aligned} \tag{4}$$

$$(By)(x)=(Ay)(x)-(Ly)(x), \tag{5}$$

де коефіцієнти $a_i(x), i=\overline{1,2}$ є неперервними на $(a;b)$ функціями, підібраними так, щоб

$$\begin{gathered} q(x)a_1(x-\Delta)-g_3(x)=0,\\ q(x)a_2(x-\Delta)-g_4(x)=0, x\in(a;c).\end{gathered} \tag{6}$$

Тоді задачу (1)–(3) можна записати у вигляді

$$\begin{gathered}(Ay)(x)=f(x)+c(x)\lambda+(By)(x), x\in(a;b),\\ y(x_s)=\alpha_s, s=\overline{1,m},\\ y''(x)=y'(x)=y(x)=0, x\in(a-\Delta;a),\end{gathered} \tag{7}$$

де в силу формул (4)–(6)

$$\begin{gathered}(By)(x)=p_1(x)y(x)+p_2(x)y(x)+\\ +\begin{cases} 0, x\in(a;c)\\ p_3(x)y'(x-\Delta)+p_4(x)y(x-\Delta), x\in[c;b),\end{cases}\\ p_1(x)=a_1(x)-g_1(x), p_2(x)=a_2(x)-g_2(x),\\ p_3(x)=q(x)a_1(x-\Delta)-g_3(x), p_4(x)=q(x)a_2(x-\Delta)-g_4(x).\end{gathered} \tag{8}$$

Зробимо заміну

$$\begin{gathered}(Ay)(x)+[b(x)+q(x)b(x-\Delta)]\lambda=u(x), x\in(a;b),\\ y(x_s)=\alpha_s, s=\overline{1,m},\\ y''(x)=y'(x)=y(x)=0, x\in(a-\Delta;a),\end{gathered} \tag{9}$$

в якій $u(x)$ — нова шукана функція, $[b(x)+g(x)b(x-\Delta)]\lambda$ — скалярний добуток невідомого вектора $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_l)$ і векторної функції

$$\begin{gathered} b(x)+q(x)b(x-\Delta)=(b_1(x)+q(x)b_1(x-\Delta), b_2(x)+q(x)b_2(x-\Delta),\\ ..., b_l(x)+q(x)b_l(x-\Delta)).\end{gathered}$$

Використаємо наступне твердження.

Лема. Нехай неперервна на $(a;b)$ векторна функція $b(x)$, така що $b(x)=0, x\in(a-\Delta;a)$, підібрана так, щоб однорідна задача

$$\begin{gathered} V''(x)+a_1(x)V'(x)+a_2(x)V(x)+b(x)\mu=0,\\ V(x_s)=0, s=\overline{1,m}\end{gathered}$$

мала єдиний розв'язок $v(x)=0, \mu=0.$ Тоді існують функція $F(x,\ t)$ і вектор-стовпчик $M(t)=(M_1(t), M_2(t),...,M_l(t))$ такі, що єдиний розв'язок неоднорідної задачі (9) можна виразити формулами

$$y(x)=h(x)+\int_b^a G(x,t)u(t)dt, \tag{10}$$

$$\lambda=\delta+\int_b^a \Gamma(t)u(t)dt, \tag{11}$$

де $h(x)$ і $\delta=(\delta_1,\delta_2,...,\delta_l)$ — однозначно визначені функція і вектор.

За допомогою формул (9)–(11) задача (1)–(3) зводиться до інтегрального рівняння

$$u(x)=l(x)+\int_b^a K(x,t)u(t)dt, \tag{12}$$

в якому

$$l(x)=f(x)+(c(x)+b(x)+q(x)b(x-\Delta))\delta+(Bh)(x), \tag{13}$$

$$K(x,t)=$$
$$=(c(x)+b(x)+q(x)b(x-\Delta))\Gamma(t)+p_1(x)G'_x(x,t)+p_2(x)G(x,t)+ \tag{14}$$
$$+\begin{cases} 0, x\in(a;c), \\ p_3(x)G'_x(x-\Delta,t)+p_4(x)G(x-\Delta,t), x\in(c;b). \end{cases}$$

На основі зроблених припущень і властивостей функції Гріна з формули (14) слідує, що $l\in L_2(a;b)$ і інтегральний оператор

$$(Ku)(x)=\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{15}$$

відображає простір $L_2(a;b)$ в себе і є цілком неперервним.

Таким чином, задача (1)–(3) зводиться до інтегрального рівняння Фредгольма другого роду (12), умови існування розв'язку якого відомі [3, 4]. Отже, справедливе твердження.

Теорема 1. Якщо одиниця — регулярне значення інтегрального оператора (15), то задача (1)–(3) має єдиний розв'язок $y^*\in L_2(a;b)$, $\lambda^*\in R^l$, при довільній функції $f(x)\in L_2(a;b)$.

Побудова алгоритму проекційного методу. Застосуємо до задачі (1)–(3) проекційний метод, суть якого полягає в наступному.

Нехай $\{\varphi_i(x)\},\{\psi_i(x)\}, i=\overline{1,n}$ — задані системи лінійно-незалежних функцій з $L_2(a;b)$. Нехай система функцій $\{\eta_j(x)\}$ і система векторів $\{\nu_j\}$, $j=\overline{1,n},$ а також функція $h(x)$ і вектор δ зв'язані співвідношеннями

$$(A\eta_j)(x)+[b(x)+q(x)b(x-\Delta)]\nu_j=\varphi_j(x), x\in(a;b) \tag{16}$$

$$\eta_j(x_s)=0, s=\overline{1,m},$$

$$\eta_j''(x)=\eta_j'(x)=\eta_j(x)=0, x\in(a-\Delta,a), j=\overline{1,n},$$

$$(Ah)(x)+[b(x)+q(x)b(x-\Delta)]\delta=0, x\in(a;b), \tag{17}$$

$$h(x_s)=\alpha_s, s=\overline{1,m},$$

$$h''(x)=h'(x)=h(x)=0, x\in(a-\Delta,a).$$

Наближений розв'язок задачі (1)–(3) знаходимо у вигляді

$$y_n(x)=h(x)+\sum_{j=1}^{n}a_j\eta_j(x), \tag{18}$$

$$\lambda_n=\delta+\sum_{j=1}^{n}a_j\nu_j,$$

невідомі коефіцієнти $a_j=a_j(n), j=\overline{1,n}$ визначаємо з умови

$$\int_a^b\{f(x)+c(x)\lambda_n-(Ly_n)(x)\}\psi_i(x)dx=0, i=\overline{1,n}. \tag{19}$$

На основі формул (17)–(19) для визначення коефіцієнтів a_j одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}a_j=b_i, i=\overline{1,n}, \tag{20}$$

в якій

$$\beta_{ij}=\int_a^b\{(L\eta_j)(x)-c(x)\nu_j\}\psi_i(x)dx, \tag{21}$$

$$b_i=\int_a^b\{f(x)+c(x)\delta-(Lh)(x)\}\psi_i(x)dx. \tag{22}$$

Розглянемо нову функцію

$$u_n(x)=\sum_{j=1}^{n}a_j\varphi_j(x) \tag{23}$$

і використаємо співвідношення (16)–(18).

Тоді одержимо

$$(Ay_n)(x)+[b(x)+q(x)b(x-\Delta)]\lambda_n=u_n(x), x\in(a;b) \tag{24}$$

$$y_n(x_s)=\alpha_s, s=\overline{1,m},$$

$$y_n''(x)=y_n'(x)=y_n(x)=0, x\in(a-\Delta,a).$$

Згідно леми єдиний розв'язок задачі (24) можна записати у вигляді

$$y_n(x)=h(x)+\int_a^b G(x,t)u_n(t)dt, \tag{25}$$

$$\lambda_n=\delta+\int_a^b \Gamma(t)u_n(t)dt. \tag{26}$$

Якщо підставити співвідношення (25), (26) у формулу (19) і врахувати вирази (24), (5), (8), (12)–(14), то одержимо

$$\int_a^b \{l(x) - u_n(x) + \int_a^b K(x,t) u_n(t) dt\} \psi_i(x) dx = 0, i = \overline{1,n}. \qquad (27)$$

Висновки. Співвідношення (23), (27) — це метод Бубнова-Гальоркіна розв'язання інтегрального рівняння (12). Таким чином,збіжність метода(16)–(19) для розв'язання задачі (1)–(3) зводиться до збіжності метода Бубнова — Гальоркіна для інтегрального рівняння Фредгольма другого роду. На основі відомих критеріїв збіжності метода Бубнова-Гальоркіна [3, 5] одержуємо наступне твердження.

Теорема 2. Якщо одиниця — не є власним значенням інтегрального оператора (15), системи функцій $\{\varphi_i(x)\}, \{\psi_i(x)\}$ задовольняють умову Польського і система $\{\varphi_i(x)\}$ — повна в $L_2(a;b)$, тоді система рівнянь (20) має єдиний розв'язок і проекційний метод (16)–(19) збігається.

Список використаних джерел:

1. Курпель Н. С. Об одной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами / Н. С. Курпель, А. Г. Марусяк // Укр. мат. журн. — 1980. — № 2. — С. 223–226.
2. Лучка А.Ю. Многоточечная задача для дифференциальных уравнений с параметрами и её решение проекционно-итеративными методами / А. Ю. Лучка, А. Г. Марусяк //Динамические системы дифференциальных уравнений. — Ин-т математики АН УССР, 1986 — С. 53–68.
3. Красносельский Н. А. Приближённые решения операторных уравнений / Н. А. Красносельский, Г. М. Вайникко и др. — М. : Наука, 1969. — 456 с.
4. Кантарович Л. В. Функциональный анализ / Л. В. Кантарович, Г. П. Акилов. — М. : Наука, 1977. — 744 с.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1970. — 512 с.

Consider multi point problem for second order differential equations with deviating argument and parameters. The conditions of existence and uniqueness of solutions of this problem and projection method for it are sufficiently substantiated.

Key words: *multipoint problem, differential equations, parameters, projection method.*

Отримано: 30.03.2016