УДК 517.946

А. П. Громик*, канд. техн. наук,
І. М. Конет**, д-р фіз.-мат. наук, професор
Т. М. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук

*Подільський державний аграрно-технічний університет, м. Кам’янець-Подільський,
**Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЗОБРАЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ В НЕОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНО-КРУГОВОМУ ПРОСТОРІ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв’язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому просторі з порожниною.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв’язки.*

Вступ. Теорія гіперболічних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними, зокрема рівнянь математичної фізики, — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в цей час інтенсивно розвивається завдяки численним застосуванням її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ механіки, фізики, техніки, новітніх технологій.

Вагомі результати з теорії задачі Коші та крайових задач для рівнянь гіперболічного типу одержано у працях Адамара Ж. [1], Гордінга Л. [2], Митропольського Ю. О., Хоми Г. П., Громяка М. І. [3], Самойленка А. М., Ткача Б. П. [4], Смирнова М. М. [5], Чернятина В. А. [6] та ін.

Відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить як від властивостей коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей), так і від геометрії області (гладкість межі, наявність кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків і розвинуто методи побудови розв’язків крайових і мішаних задач для лінійних, квазілінійних та деяких нелінійних рівнянь різних типів (гіперболічних, параболічних, еліптичних) в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач в сенсі Адамара.

Водночас багато важливих прикладних задач термомеханіки, теплофізики, дифузії, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань механічних систем приводять до крайових і мішаних задач не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [7, 8].

Для досить широкого класу лінійних крайових задач у кусково-однорідних середовищах ефективним методом побудови їх точних розв’язків виявився метод гібридних інтегральних перетворень, що породжені гібридними диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [9–11].

У цій статті, яка є логічним продовженням [12], методом гібридних інтегральних перетворень побудовано точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому просторі з циліндричною порожниною.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t,r,\varphi,z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j),\ R_0 > 0, R_{n+1} = +\infty;$$
$$\varphi \in [0; 2\pi); z \in (-\infty; +\infty)\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними гіперболічного типу 2-го порядку [13]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \tag{1}$$
$$+ \chi_j^2 u_j = f_j(t,r,\varphi,z);\ r \in I_j;\ j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j\big|_{t=0} = g_j^1(r,\varphi,z);\quad \frac{\partial u_j}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_j^2(r,\varphi,z);\quad r \in I_j;\quad j = \overline{1, n+1} \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Bigg|_{r=R_0} = g_0(t,\varphi,z);\quad \frac{\partial^s u_{n+1}}{\partial r^s}\Bigg|_{r=+\infty} = 0;\quad s = 0,1; \tag{3}$$

$$\frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\Bigg|_{z=-\infty} = 0;\quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s}\Bigg|_{z=+\infty} = 0;\quad s = 0,1 \tag{4}$$

та умовами спряження [11]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^{k}\right)u_k-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^{k}\right)u_{k+1}\right]\Bigg|_{r=R_k}=0;\ j=1,2;\ k=\overline{1,n}, \tag{5}$$

де a_{rj}, $a_{\varphi j}$, a_{zj}, χ_j, α_{js}^{k}, β_{js}^{k} — деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk}=\alpha_{2j}^{k}\beta_{1j}^{k}-\alpha_{1j}^{k}\beta_{2j}^{k}\neq 0;\ c_{1k}\cdot c_{2k}>0;\ \alpha_{11}^{0}\le 0,\ \beta_{11}^{0}\ge 0;\ \left|\alpha_{11}^{0}\right|+\beta_{11}^{0}\neq 0;$$

$$f(t,r,\varphi,z)=\left\{f_1(t,r,\varphi,z),f_2(t,r,\varphi,z),\ldots,f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\right\};$$

$$g^1(r,\varphi,z)=\left\{g_1^1(r,\varphi,z),g_2^1(r,\varphi,z),\ldots,g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\right\};$$

$$g^2(r,\varphi,z)=\left\{g_1^2(r,\varphi,z),g_2^2(r,\varphi,z),\ldots,g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\right\};$$

$g_0(t,\varphi,z)$ — задані обмежені неперервні функції;

$u(t,r,\varphi,z)=\left\{u_1(t,r,\varphi,z),u_2(t,r,\varphi,z),\ldots,u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\right\}$ — шукана функція.

Основна частина. Припустимо, що розв'язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [14–16].

До задачі (1)–(5) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є на декартовій осі $(-\infty;+\infty)$ щодо змінної z [14]:

$$F\left[g(z)\right]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(z)\exp(-i\sigma z)dz\equiv\tilde{g}(\sigma),\ i=\sqrt{-1}\ , \tag{6}$$

$$F^{-1}\left[\tilde{g}(\sigma)\right]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\tilde{g}(\sigma)\exp(i\sigma z)d\sigma\equiv g(z), \tag{7}$$

$$F\left[\frac{d^2g}{dz^2}\right]=-\sigma^2F[g(z)]\equiv-\sigma^2\tilde{g}(\sigma). \tag{8}$$

Інтегральний оператор F за правилом (6) внаслідок тотожності (8) тривимірній початково-крайовій задачі спряження (1)–(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D'=\left\{(t,r,\varphi);t>0;r\in I_n^{+};\varphi\in[0;2\pi)\right\}$ 2π-періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_j}{\partial t^2}-\left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{a_{\varphi j}^2}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\tilde{u}_j+\left(a_{zj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde{u}_j= \\ =\tilde{f}_j(t,r,\varphi,\sigma);\ r\in I_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{9}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_j\Big|_{t=0}=\tilde{g}_j^1(r,\varphi,\sigma);\;\; \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial t}\Bigg|_{t=0}=\tilde{g}_j^2(r,\varphi,\sigma);\;\; r\in I_j;\;\; j=\overline{1,n+1};\quad (10)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0\right)\tilde{u}_1\Bigg|_{r=R_0}=\tilde{g}_0(t,\varphi,\sigma);\;\; \frac{\partial^s \tilde{u}_{n+1}}{\partial r^s}\Bigg|_{r=+\infty}=0;\;\; s=0,1\quad (11)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z}+\beta_{j1}^k\right)\tilde{u}_k-\left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^k\right)\tilde{u}_{k+1}\right]\Bigg|_{r=R_k}=0;\;\; j=1,2;\;\; k=\overline{1,n}.\quad (12)$$

До задачі (9)–(12) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [15]:

$$F_m\left[g(\varphi)\right]=\int\limits_0^{2\pi}g(\varphi)\exp(-im\varphi)d\varphi\equiv g_m,\quad (13)$$

$$F_m^{-1}[g_m]=\frac{\mathrm{Re}}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m g_m\exp(im\varphi)\equiv g(\varphi),\quad (14)$$

$$F_m\left[\frac{d^2g}{d\varphi^2}\right]=-m^2F_m[g(\varphi)]\equiv -m^2g_m,\quad (15)$$

де $\mathrm{Re}(\cdots)$ — дійсна частина виразу $(\cdots)$ щодо φ; $\varepsilon_0=1$, $\varepsilon_k=2$; $k=1,2,3\ldots$

Інтегральний оператор F_m за правилом (13), внаслідок тотожності (15) двовимірній початково-крайовій задачі спряження (9)–(12) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D''=\left\{(t,r);t>0;r\in I_n^+\right\}$ розв'язку сепаратної системи диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2\tilde{u}_{jm}}{\partial t^2}-a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu_{jm}^2}{r^2}\right)\tilde{u}_{jm}+\left(a_{zj}^2\sigma^2+\chi_j^2\right)\tilde{u}_{jm}=$$
$$=\tilde{f}_{jm}(t,r,\sigma);\; r\in I_j;\; j=\overline{1,n+1};\; \nu_{jm}=a_{\varphi j}m/a_{rj}\quad (16)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm}\Big|_{t=0}=\tilde{g}_{jm}^1(r,\sigma);\;\; \frac{\partial\tilde{u}_{jm}}{\partial t}\Bigg|_{t=0}=\tilde{g}_{jm}^2(r,\sigma);\;\; r\in I_j;\;\; j=\overline{1,n+1},\quad (17)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{11}^0\right)\tilde{u}_{1m}\Bigg|_{r=R_0}=\tilde{g}_{0m}(t,\sigma);\;\; \frac{\partial^s\tilde{u}_{n+1,m}}{\partial r^s}\Bigg|_{r=+\infty}=0;\;\; s=0,1\quad (18)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j1}^{k}\right)\tilde{u}_{km}-\left(\alpha_{j2}^{k}\frac{\partial}{\partial r}+\beta_{j2}^{k}\right)\tilde{u}_{k+1,m}\right]\Bigg|_{r=R_k}=0;\ j=1,2;\ k=\overline{1,n}. \quad (19)$$

До задачі (16)–(19) застосуємо гібридне інтегральне перетворення типу Вебера на полярній осі I_n^+ з n точками спряження щодо змінної r [16]:

$$H_{(n)}\left[f(r)\right]=\int\limits_{R_0}^{+\infty} f(r)V(r,\lambda)\sigma(r)rdr\equiv\tilde{f}(\lambda), \quad (20)$$

$$H_{(n)}^{-1}\left[\tilde{f}(\lambda)\right]=\int\limits_{0}^{+\infty}\tilde{f}(\lambda)V(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\equiv f(r), \quad (21)$$

$$\begin{aligned}H_{(n)}\left[B_{(m)}[f(r)]\right]=-\lambda^2\tilde{f}(\lambda)-\sum_{k=1}^{n+1}\gamma_k^2\int\limits_{R_{k-1}}^{R_k} f(r)V_k(r,\lambda)\sigma_k rdr-\\ -a_1^2R_0\sigma_1\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(R_0,\lambda)\left(\alpha_{11}^0\frac{df}{dr}+\beta_{11}^0 f\right)\Bigg|_{r=R_0}.\end{aligned} \quad (22)$$

У формулах (20)–(22) беруть участь, виписані в [16], спектральна функція $V(r,\lambda)$, вагова функція $\sigma(r)$, спектральна щільність $\Omega(\lambda)$ та гібридний диференціальний оператор Бесселя

$$B_{(m)}=\sum_{k=1}^{n}a_{rk}^2\theta(r-R_{k-1})\theta(R_k-r)B_{\nu_{km}}+a_{r,n+1}^2\theta(r-R_n)B_{\nu_{n+1,m}},$$

де $B_{\nu_{km}}=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{\nu_{km}^2}{r^2}$ — оператор Бесселя, $\theta(x)$ — одинична функція Гевісайда.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (16) та початкові умови (17) у матричній формі

$$\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{r1}^2B_{\nu_{1m}}+q_1^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{1m}\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{r2}^2B_{\nu_{2m}}+q_2^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{2m}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-a_{r,n+1}^2B_{\nu_{n+1,m}}+q_{n+1}^2(\sigma)\right)\tilde{u}_{n+1,m}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{f}_{1m}(t,r,\sigma)\\ \tilde{f}_{2m}(t,r,\sigma)\\ \cdots\cdots\\ \tilde{f}_{n+1,m}(t,r,\sigma)\end{bmatrix}, \quad (23)$$

$$\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}^1_{1m}(r,\sigma) \\ \tilde{g}^1_{2m}(r,\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{g}^1_{n+1,m}(r,\sigma) \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m}(t,r,\sigma) \\ \tilde{u}_{2m}(t,r,\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{u}_{n+1,m}(t,r,\sigma) \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}^2_{1m}(r,\sigma) \\ \tilde{g}^2_{2m}(r,\sigma) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tilde{g}^2_{n+1,m}(r,\sigma) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

де $q_j^2(\sigma) = a_{zj}^2\sigma^2 + \chi_j^2;\ \ j = \overline{1, n+1}.$

Інтегральний оператор $H_{(n)}$, який діє за формулою (20), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$H_{(n)}[\cdots] = \left[\int\limits_{R_0}^{R_1} \cdots V_1(r,\lambda)\sigma_1 r dr \qquad \int\limits_{R_1}^{R_2} \cdots V_2(r,\lambda)\sigma_2 r dr \right.$$
$$\left. \int\limits_{R_{n-1}}^{R_n} \cdots V_n(r,\lambda)\sigma_n r dr \qquad \int\limits_{R_n}^{+\infty} \cdots V_{n+1}(r,\lambda)\sigma_{n+1} r dr \right] \tag{25}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (23), (24). Внаслідок тотожності (22) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda^2 + \gamma_j^2 + q_j^2(\sigma)\right)\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{f}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) -$$
$$-a_1^2 R_0 \sigma_1 \left(\alpha_{11}^0\right)^{-1} V_1(R_0,\lambda)\tilde{g}_{0m}(t,\sigma), \tag{26}$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^1_{jm}(\lambda,\sigma);$$

$$\left.\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma)\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^2_{jm}(\lambda,\sigma), \tag{27}$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr;\ \ j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{\tilde{f}}_{jm}(t,\lambda,\sigma) = \int\limits_{R_{j-1}}^{R_j} \tilde{f}_{jm}(t,r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr,\ \ j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{\tilde{g}}^{s}_{jm}(\lambda,\sigma)=\int\limits_{R_{j-1}}^{R_j}\tilde{g}^{s}_{jm}(r,\sigma)V_j(r,\lambda)\sigma_j r dr;\quad s=1,2;\ j=\overline{1,n+1}.$$

Припустимо, не зменшуючи загальності розв'язку задачі, що $\max\left\{q_1^2,q_2^2,...,q_{n+1}^2\right\}=q_1^2$ і покладемо всюди $\gamma_j^2=q_1^2-q_j^2;\ j=\overline{1,n+1}$. Задача Коші (26), (27) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{\tilde{u}}_m}{dt^2}+\Delta^2(\lambda,\sigma)\tilde{\tilde{u}}_m=\tilde{\tilde{f}}_m(t,\lambda,\sigma)-a_1^2R_0\sigma_1\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(R_0,\lambda)\tilde{g}_{0m}(t,\sigma),\quad (28)$$

$$\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)\Big|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}^1_m(\lambda,\sigma);\ \ \frac{d\tilde{\tilde{u}}_m}{dt}\bigg|_{t=0}=\tilde{\tilde{g}}^2_m(\lambda,\sigma),\qquad (29)$$

де

$$\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{u}}_{jm}(t,\lambda,\sigma);\ \ \tilde{\tilde{f}}_m(t,\lambda,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{f}}_{jm}(t,\lambda,\sigma),$$

$$\tilde{\tilde{g}}^1_m(\lambda,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^1_{jm}(\lambda,\sigma),\ \ \tilde{\tilde{g}}^2_m(\lambda,\sigma)=\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{\tilde{g}}^2_{jm}(\lambda,\sigma),$$

$$\Delta^2(\lambda,\sigma)=\lambda^2+q_{z1}^2\sigma^2+\chi_1^2.$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком задачі (28), (29) є функція

$$\begin{aligned}\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)&=\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}\tilde{\tilde{g}}^2_m(\lambda,\sigma)+\frac{d}{dt}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}\tilde{\tilde{g}}^1_m(\lambda,\sigma)+\\&+\int\limits_0^t\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)(t-\tau))}{\Delta(\lambda,\sigma)}\left[\tilde{\tilde{f}}_m(\tau,\lambda,\sigma)-a_1^2R_0\sigma_1\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(R_0,\lambda)\tilde{g}_{0m}(t,\sigma)\right]d\tau.\end{aligned}\qquad (30)$$

Оскільки суперпозиція операторів $H_{(n)}$ та $H_{(n)}^{-1}$ є одиничним оператором, то оператор $H_{(n)}^{-1}$ зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$H_{(n)}^{-1}\left[\cdots\right]=\begin{bmatrix}\int\limits_0^{+\infty}\cdots V_1(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\\ \int\limits_0^{+\infty}\cdots V_2(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \int\limits_0^{+\infty}\cdots V_{n+1}(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda\end{bmatrix}\qquad (31)$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (31) до матриці-елемента $\left[\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)\right]$, де функція $\tilde{\tilde{u}}_m(t,\lambda,\sigma)$ визначена формулою (30). Одержуємо єдиний розв'язок одновимірної гіперболічної початково-крайової задачі спряження (16)–(19):

$$\tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)=\int_0^{+\infty}\left[\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}\tilde{\tilde{g}}_m^2(\lambda,\sigma)+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}\tilde{\tilde{g}}_m^1(\lambda,\sigma)\right]\times$$

$$\times V_j(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda+\int_0^t\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)(t-\tau))}{\Delta(\lambda,\sigma)}\left[\tilde{\tilde{f}}_m(\tau,\lambda,\sigma)-\right. \tag{32}$$

$$\left.-a_1^2R_0\sigma_1\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}V_1(R_0,\lambda)\tilde{g}_{0m}(t,\sigma)\right]\times V_j(r,\lambda)\Omega(\lambda)d\lambda d\tau;\quad j=\overline{1,n+1}.$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm}(t,r,\sigma)$, визначених формулами (32), обернені оператори F^{-1} та F_m^{-1}, і виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_j(t,r,\varphi,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jk}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z-\xi)f_k(\tau,\rho,\alpha,\xi)\times$$

$$\times\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho d\tau+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z-\xi)g_k^1(\rho,\alpha,\xi)\times$$

$$\times\sigma_k\rho d\xi d\alpha d\rho+\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_{k-1}}^{R_k}\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z-\xi)g_k^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\times \tag{33}$$

$$\times\rho d\xi d\alpha d\rho+\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}W_{jr}(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z-\xi)g_0(\tau,\alpha,\xi)d\xi d\alpha d\tau;\,j=\overline{1,n+1},$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

У формулах (33) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z)=\frac{1}{2\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m\left(\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\sigma)t)}{\Delta(\lambda,\sigma)}\times\right.$$

$$\left.\times V_j(r,\lambda)V_k(\rho,\lambda)\Omega(\lambda)\cos(\sigma z)d\lambda d\sigma\right)\cos(m\varphi)$$

матриці впливу (функції впливу) та радіальні функції Гріна

$$W_{jr}(t,r,\varphi,z)=-a_1^2R_0\sigma_1\left(\alpha_{11}^0\right)^{-1}E_{j1}(t,r,R_0,\varphi,z)$$

розглянутої задачі.

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z)$ і радіальних функцій Гріна $W_{jr}(t,r,\varphi,z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (33), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (4) та умови спряження (5) в сенсі теорії узагальнених функцій [17].

Єдиність розв'язку (33) випливає із його структури (інтегрального зображення) та єдиності головних розв'язків (функцій впливу і функцій Гріна) задачі (1)-(5).

Методами з [17, 18] можна довести, що при відповідних умовах на вихідні дані, формули (33) визначають обмежений класичний розв'язок гіперболічної початково-крайової задачі спряження (1)–(5).

Підсумком викладеного вище є така теорема.

Теорема. Якщо функції $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^1(r,\varphi,z)$, $g_j^2(r,\varphi,z)$ задовольняють умови:

1) двічі неперервно диференційовні за кожною змінною;
2) мають обмежену варіацію за геометричними змінними;
3) абсолютно сумовні за змінною z на $(-\infty;+\infty)$;
4) абсолютно сумовні з ваговою функцією $\rho(r) = r\sigma(r)$ за змінною r на I_n^+;
5) справджують умови спряження, а функція $g_0(t,\varphi,z)$ двічі неперервно диференційовна за кожною змінною, має обмежену варіацію за геометричними змінними, абсолютно сумовна за змінною z на $(-\infty;+\infty)$, то гіперболічна початково-крайова задача спряження (1)–(5) має єдиний обмежений класичний розв'язок, який визначається за формулами (33).

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{\varphi j} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (33) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)–(5) в ізотропному кусково-однорідному циліндрично-круговому просторі з порожниною.

Зауваження 2. Параметри α_{11}^0, β_{11}^0 дозволяють виділяти із формул (33) розв'язки початково-крайових задач спряження у випадках задання на радіальній поверхні $r = R_0$ крайової умови 1-го роду ($\alpha_{11}^0 = 0$, $\beta_{11}^0 = 1$), 2-го роду ($\alpha_{11}^0 = -1$, $\beta_{11}^0 = 0$) та 3-го роду ($\alpha_{11}^0 = -1$, $\beta_{11}^0 \equiv h > 0$).

Зауваження 3. Аналіз розв’язку (33) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^1(r,\varphi,z)$, $g_j^2(r,\varphi,z)$, $g_0(t,\varphi,z)$ проводиться безпосередньо із загальних структур.

Зауваження 4. У випадку $\chi_j \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

Зауваження 5. У випадку $\alpha_{11}^k = 0$, $\beta_{11}^k = 1$; $\alpha_{12}^k = 0$, $\beta_{12}^k = 1$; $\alpha_{21}^k = E_1^k$, $\beta_{21}^k = 0$; $\alpha_{22}^k = E_2^k$, $\beta_{22}^k = 0$, де E_1^k, E_2^k — модулі Юнга ($k = \overline{1,n},$) умови спряження (5) збігаються з умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках 4, 5 (при $f_j(t,r,\varphi,z) \equiv 0$) розглянута гіперболічна крайова задача є математичною моделлю вільних коливних процесів у кусково-однорідному циліндрично-круговому просторі з порожниною.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв’язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв’язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндрично-круговому просторі з порожниною. Одержаний розв’язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М. : Наука. 1978. — 352 с.
2. Гординг Л. Задача Коши для гиперболических уравнений / Л. Гординг. — М. : ИЛ, 1961. — 122 с.
3. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома. М. И. Громяк. — К. : Наук. думка. 1991. — 232 с.
4. Самойленко А. М. Численно-аналитические методы в теории периодических решений уравнений с частными производными / А. М. Самойленко, Б. П. Ткач. — К. : Наук. думка, 1992. — 208 с.
5. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. — М. : Наука, 1962. — 292 с.
6. Чернятин В. А. Обоснование метода Фурье в смешанной задаче для уравнений в частных производных / В. А. Чернятин. — М. : Изд-во МГУ, 1991. — 112 с.

7. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
8. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
9. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
10. Громик А. П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2011. — 200 с.
11. Конет І. М. Гіперболічні крайові математичної фізики в кусково-однорідних просторових середовищах / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2013. — 120 с.
12. Громик А. П. Інтегральне зображення розв'язку гіперболічної крайової задачі в неоднорідному циліндрично-круговому просторі / А. П. Громик, І. М. Конет, Т. М. Пилипюк // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. пр. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана огієнка, 2015. — Вип. 12. — С. 27-37.
13. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К. : Либідь, 2006. — 424 с.
14. Снеддон И. Преобразования Фурье / И. Снеддон. — М. : ИЛ, 1955. — 668 с.
15. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат, 1956. — 204 с.
16. Быблив О. Я. Гибридные интегральные преобразования Вебера для кусочно-однородной полярной оси / О. Я. Быблив, М. П. Ленюк // Изв. вузов. Математика. — 1987. — №7. — С. 3–11.
17. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
18. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз, 1958. — 274 с.

By the method of integral and hybrid integrated transforms, in combination with the method of the main solutions (influence functions and Green functions) the integral image of exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in piecewise homogeneous cylindrical-circular space with the cavity is obtained for the first time.

Key words: *hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conjugate conditions, integral transforms, the main solutions.*

Отримано: 29.03.2016