УДК 519.9

О. М. Коломис, канд. фіз.-мат. наук

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

ОЦІНКА ПОХИБКИ ЗАОКРУГЛЕННЯ АЛГОРИТМУ ОБЧИСЛЕННЯ ПЕРВИННОЇ ОЦІНКИ СПЕКТРАЛЬНОЇ ЩІЛЬНОСТІ

Наведена оцінка похибки заокруглення алгоритму обчислення первинної оцінки спектральної щільності.

Ключові слова: *первинна оцінка спектральної щільності, похибка заокруглення, швидке перетворення Фур'є.*

Вступ. Із появою алгоритму швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) було розроблено ряд обчислювальних алгоритмів прискореного розв'язання деяких задач спектрального і кореляційного аналізу випадкових процесів [1, 2]. Зокрема, побудовані ефективні за швидкодією алгоритми обчислення таких оцінок імовірнісних характеристик об'єктів керування, як оцінок згорток, кореляційних функцій, спектральних щільностей стаціонарних і деяких типів нестаціонарних випадкових процесів [2, 3].

Розглянемо ефективні за швидкодією алгоритми обчислення оцінок спектральних щільностей стаціонарних ергодичних випадкових процесів із нульовим середнім значенням. Найчастіше для їх обчислення використовують метод прямого перетворення Фур'є з використанням алгоритму ШПФ [2, 3]. Дана стаття продовжує дослідження і обґрунтування цього методу в напрямку отримання більш якісних оцінок похибок заокруглення.

Постановка задачі та алгоритм розв'язання. Нехай $x(t)$ — випадковий стаціонарний ергодичний процес з нульовим середнім значенням і задана вибірка $x_\nu = x(t_\nu)$, $\nu = \overline{0, N-1}$. Оцінка спектральної щільності визначається співвідношенням [2]

$$S_x(k) = S_x(\omega_k) = \frac{h}{N}\left|\hat{X}_k\right|^2, \; k = \overline{0, N-1}, \qquad (1)$$

де h — крок за часом, $\hat{X}_k = \hat{X}(\omega_k)$ — дискретне перетворення Фур'є (ДПФ) початкового сигналу $x(t)$, $\omega_k = k/(Nh)$, $k = \overline{0, N-1}$.

Для обчислення $\hat{X}_k$, $k = \overline{0, N-1}$ будемо використовувати алгоритм ШПФ

$$\hat{X}_k = \hat{X}(\omega_k) = \sum_{\nu=0}^{N-1} x_\nu W_N^{\nu k}, \qquad (2)$$

де $k,\nu=\overline{0,N-1}$, $W_N=e^{-i\frac{2\pi}{N}}$.

Евклідова норма оцінки похибки заокруглення алгоритму ШПФ обчислення ДПФ $\widehat{X}=\left\{\widehat{X}_k\right\}_0^{N-1}$ сигналу $x=\{x_\nu\}_0^{N-1}$, для $N=2^\gamma$, де $\gamma>0$ — ціле, для класичного правила заокруглення має вигляд [2]:

$$\left\|E_{\widehat{X}}\right\|_E<8\cdot 1{,}06\cdot\gamma\cdot 2^{-\tau}\cdot\left\|\widehat{X}\right\|_E, \tag{3}$$

де τ — кількість двійкових розрядів у мантисі числа для обчислень на комп'ютері в режимі з плаваючою комою.

Величину $S_x(k)$, $k=\overline{0,N-1}$, що визначається у вигляді співвідношення (1), називають первинною оцінкою спектральної щільності.

У роботі [4] наведено покроковий опис алгоритму, який дозволяє обчислювати (за відповідними ознаками) оцінки спектральної щільності $S_x(k)$, або $S_x^*(k)$, або $\widehat{S}_x^*(k)$, або $\widehat{S}_x(k)$, $k=\overline{0,N-1}$, згідно відповідних співвідношень [4], причому в ньому можуть бути використані вікна як для даних, так і для частот. Для оцінки точності запропонованого алгоритму обчислення оцінок спектральних щільностей дослідимо оцінку похибки заокруглення первинної оцінки спектральної щільності, що виникає при реалізації обчислювального алгоритму на комп'ютері для класичного правила заокруглення, для обчислень у режимі плаваючої коми з τ розрядами в мантисі числа.

Оцінка похибки заокруглення алгоритму обчислення $S_x(k)$, $k=\overline{0,N-1}$. Нехай $N=2^\gamma$, $\gamma>0$ — ціле, $x_\nu=x(t_\nu)$, $\nu=\overline{0,N-1}$ — вибірка стаціонарного ергодичного випадкового процесу $x(t)$ з нульовим середнім значенням, $fl(*)$ — результат обчислення виразу, який стоїть у дужках в режимі з плаваючою комою з τ розрядами у мантисі числа, $\|*\|_E$ — евклідова норма. Справедлива наступна теорема.

Теорема. Нехай $N=2^\gamma$, $\gamma>0$ — ціле, $x_\nu=x(t_\nu)$, $\nu=\overline{0,N-1}$ — вибірка стаціонарного ергодичного випадкового процесу $x(t)$ з нульовим середнім значенням. Оцінка евклідової норми похибки заокруглення обчислення первинної оцінки спектральної щільності, згідно співвідношення (1) за допомогою алгоритму ШПФ для режиму з плаваючою комою з τ розрядами у мантисі числа має вигляд

$$\left\|E_{3,S_x}\right\|_E\sim 8\cdot 1{,}06\cdot\gamma\cdot 2^{-\tau}\cdot h\cdot\|x\|_E^2\left[1+1{,}06\cdot 2^{-\tau}(16\gamma+\sqrt{N})\right]. \tag{4}$$

Доведення. Фактичним значенням оцінки спектральної щільності $S_x(k)$, $k=\overline{0,N-1}$, що визначається співвідношенням (1), при обчисленні його на комп'ютері в режимі з плаваючою комою з τ розрядами у мантисі числа буде вираз

$$fl(S_x(k)) = fl\left(\frac{h}{N}\left|\widehat{X}_k\right|^2\right) = \frac{h}{N}\left|\widehat{X}_k + E_{\widehat{X}}(k)\right|^2 (1+\varepsilon_1(k)) \le \frac{h}{N}\left(\left|\widehat{X}_k\right|^2 + E_1(k)\right), \quad (5)$$

де $E_{\widehat{X}}(k)$ — похибка заокруглення обчислення $\widehat{X}_k$ алгоритмом ШПФ, $\varepsilon_1(k)$ — похибка заокруглення, що виникає при множенні двох чисел [5]. З точністю до величини другого порядку малості відносно $\varepsilon_1(k)$ та $E_{\widehat{X}}(k)$ отримаємо:

$$E_1(k) = 2\left|\widehat{X}_k\right| \cdot \left|E_{\widehat{X}}(k)\right| + \left|\widehat{X}_k\right|^2 \varepsilon_1(k). \quad (6)$$

Позначимо $\widehat{Z}(k) = \dfrac{h}{N}[\widehat{X}_k^2 + E_1(k)]$.

Визначимо оцінку $\left\| E_{3,S_x} \right\|_E$ — похибки заокруглення обчислення $S_x(k)$, $k = \overline{0, N-1}$, з використанням алгоритму ШПФ, згідно (3)

$$\left\| E_{3,S_x} \right\|_E < 8 \cdot 1,06 \cdot \gamma \cdot 2^{-\tau} \cdot \left\|\widehat{Z}\right\|_E. \quad (7)$$

Для оцінки $\left\|\widehat{Z}\right\|_E$ під векторами $E_{\widehat{X}}$, $\widehat{X}$, x, ε_1 будемо розуміти ($N \times N$)-матриці, перші рядки яких збігаються відповідно з компонентами вказаних векторів, а решта елементів дорівнюють нулю. Тоді [5] $\left\|\widehat{Z}\right\|_E \le \dfrac{h}{N}\left(\left\|\widehat{X}\right\|_E^2 + \left\|E_1\right\|_E\right)$, де $\left\|E_1\right\|_E \le 2\left\|\widehat{X}\right\|_E \cdot \left\|E_{\widehat{X}}\right\|_E + \left\|\widehat{X}\right\|_E^2 \cdot \left\|\varepsilon_1\right\|_E$.

Враховуючи, що $\left|\varepsilon_1\right| \le 1,06 \cdot 2^{-\tau}$ і $\left\|\varepsilon_1\right\|_E \le 1,06 \cdot 2^{-\tau}\sqrt{N}$, та використовуючи (3) і той факт, що

$$\left\|\widehat{X}\right\|_E = \sqrt{N} \cdot \left\|x\right\|_E, \quad (8)$$

остаточно отримуємо

$$\left\|E_1\right\|_E < 1,06 \cdot 2^{-\tau}(16\gamma + \sqrt{N})\left\|x\right\|_E^2$$

та

$$\left\|Z\right\|_E \cong h[1 + 1,06 \cdot 2^{-\tau}(16\gamma + \sqrt{N})]\left\|x\right\|_E^2. \quad (9)$$

Підставивши (9) у співвідношення (7), отримуємо оцінку (4).

Теорема доведена.

Наслідок. З точністю до величини другого порядку малості відносно $2^{-\tau}$ виконується співвідношення

$$\left\| E_{3,S_x} \right\|_E < \cdot 8 \cdot 1,06 \cdot \gamma \cdot h \cdot 2^{-\tau} \cdot \left\|x\right\|_E^2. \quad (10)$$

Зауваження. Для обчислення ДПФ $\widehat{X}_k = \widehat{X}(\omega_k)$, $k = \overline{0, N-1}$, доцільно використовувати алгоритм ШПФ дійсного сигналу із попередньою заготовкою матриці перетворення [2, 3]. В цьому випадку немає необхідності обчислювати всі N значень ДПФ, достатньо обчислити лише перші $N/2$ значень. Для цього значення x_ν розбивають на дві послідовності $y_\nu = x_{2\nu}$, $z_\nu = x_{2\nu+1}$, $\nu = \overline{0, N/2-1}$ і створюють комплексний сигнал $V(\nu) = y_\nu + z_\nu$. Мають місце співвідношення [2]

$$I(k) = \widehat{Y}(k) + W_N^k \widehat{Z}(k), \ k = \overline{0, N/2-1}, \ I(N/2) = \widehat{Y}(0) - \widehat{Z}(0),$$

де

$$\widehat{Y}(k) = \frac{1}{2}\left(\widehat{V}(k) + \widehat{V}^*(N/2 - k)\right), \ \widehat{Z}(k) = \frac{1}{2i}\left(\widehat{V}(k) + \widehat{V}^*(N/2 - k)\right),$$

де $V^*(N/2 - k)$ величина комплексно спряжена з $V(N/2 - k)$. Застосувавши алгоритм ШПФ для обчислення $\widehat{V}(k)$, $k = \overline{0, N/2-1}$ і вказані співвідношення, отримаємо $N/2$ необхідних коефіцієнтів ДПФ $I(k)$, оскільки $I(k) = I^*(N-k)$. Такий підхід дозволяє майже вдвічі зменшити обсяг обчислювальних затрат та похибку заокруглень при обчисленні ДПФ.

Із більш детального аналізу алгоритму ШПФ випливає, що виграш за кількістю арифметичних операцій у порівнянні зі стандартним способом виходить ще більшим, оскільки багато множників вигляду W_N^{kr} мають в «метеликах» значення $\pm 1, \pm i$, завдяки чому виключаються відповідні операції множення.

Доведено, що при $N = 2^\gamma$ оцінка знизу (серед всіх алгоритмів обчислення ДПФ) кількості операцій додавання рівна $\frac{N}{2}\log_2 N$. Існують також алгоритми і програми обчислення багатовимірного ДПФ за допомогою ШПФ.

Список використаних джерел:

1. Cooley J. W., Tukey J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier Series. *Math. Comput.*, 1965, Apr., P. 257–301.
2. Задирака В. К. Теория вычисления преобразования Фурье. Киев: Наук. думка, 1983. 216 с.
3. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. Т. 2. Застосування. Київ: Наук. думка, 2011. 348 с.

4. Коломис О. М., Луц Л. В. Алгоритм обчислення оцінок спектральної щільності. *Питання оптимізації обчислень (ПОО-XLII)* : праці міжнар. наук. школи-семінару, присвяченої 85-річчю від дня народження академіка В. С. Михалевича (21-25 вересня 2015 р.). Київ: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, 2015. С. 45–46.
5. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных чисел. М.: Наука, 1970. 564 с.

The estimation of the rounding error of the algorithm for calculating the primary estimate of the spectral density are developed. are obtained.

Key words: *the primary estimate of the spectral density, rounding error, fast Fourier Transform.*

Одержано 17.02.2017

УДК 519.685.3

Г. І. Кудін, канд. фіз.-мат. наук, доцент

Київський національний університет імені Тараса Шевченка, м. Київ

ОПТИМІЗАЦІЯ ЛІНІЙНОЇ КЛАСИФІКАЦІЇ СИГНАЛІВ ЗАСОБАМИ ЗБУРЕННЯ ПСЕВДООБЕРНЕНИХ МАТРИЦЬ

З використанням засобів збурення псевдообернених матриць запропонована схема оптимізації лінійної класифікації сигналів. Алгоритми оптимального перетворення окремих компонент векторів простору ознак у ряді випадків дозволяють розв'язувати задачу класифікації залишаючись у рамках лінійної моделі. При невдачі такого підходу приводиться алгоритм кусково лінійної класифікації.

Ключові слова: *синтез систем класифікації, псевдо обернені та проекційні матриці.*

Вступ. Протягом останніх двадцяти років в України за участю наукових співробітників Інституту кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України розв'язано ряд вагомих як теоретичних, так і прикладних проблем з використанням засобів псевдообернення. У значній мірі це визначається теретичними результатами стосовно обчислень псевдообернених матриць при різнотипних збуреннях вихідних матриць. З використанням властивостей псевдообернених матриць були запропоновані [1, 2] ефективні алгоритми для розв'язування задач лінійної класифікації та кластеризації — в аналітичному вигляді були подані умови лінійної роздільності скінчених множин в евклідовому просторі, віддалі відповідності елементів скінчених множин до відповідних гіперплощин — лінійних кластерів. За умов великої розмірності просторів ознак, значних

