УДК 519.64;519.65

Л. В. Луц, канд. фіз.-мат. наук,
В. К. Задірака, д-р фіз.-мат. наук, професор, академік НАН України
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

НАБЛИЖЕНЕ ІНТЕГРУВАННЯ ШВИДКООСЦИЛЮЮЧИХ ФУНКЦІЙ З ВИЯВЛЕННЯМ І УТОЧНЕННЯМ АПРІОРНОЇ ІНФОРМАЦІЇ

Наведений алгоритм виявлення та уточнення вихідної інформації про підінтегральну функцію для задачі наближеного інтегрування швидкоосцилюючих функцій.

Ключові слова: *апріорна інформація, класи функцій, інтеграли від швидкоосцилюючих функцій.*

Вступ. При розв'язуванні багатьох класів задач обчислювальної та прикладної математики виникає необхідність в обчисленні інтегралів вигляду

$$I(\omega)=\int_a^b f(x)\begin{Bmatrix} e^{-i\omega x} \\ \sin\omega x \\ \cos\omega x \end{Bmatrix}\cos\omega x\,dx, \qquad (1)$$

де $f(x)\in F$, F — множина функцій, визначених на відрізку $[a,b]$. Інформація про функцію $f(x)$ задана не більше ніж N значеннями інформаційного оператора, наприклад, значеннями функції $f(x)$ не більше ніж в N вузлових точках $\{x_\nu\}_0^{N-1}$ з відрізку $[a,b]$, ω — довільне дійсне число ($|\omega|\geq 2\pi(b-a)$).

Практично важливим є розгляд випадку, коли $\{x_i\}_0^{N-1}$ і $\{f_i\}_0^{N-1}=\{f(x_i)\}_0^{N-1}$ фіксовані (наприклад, випадок, коли функція задана таблицею значень з її області визначення). Такий спосіб представлення вхідної інформації веде до значного звуження відповідного класу F на інтерполяційні класи F_N. Також розглядатимемо класи $F_{N,\varepsilon}$, які відповідають наближеному заданню вихідної інформації з області $\left|\tilde{f}_i-f_i\right|\leq\varepsilon$, $i=\overline{0,N-1}$.

Постановка задачі. Нехай задача $P(I)$ розв'язується алгоритмом $A(X)$ на ЕОМ $c(Y)$, $c(Y)$ — модель комп'ютера, $c(Y)\in C(Y)$

($C(Y)$ — клас моделей комп'ютерів), I, X, Y — скінченні множини (вектори) параметрів, від яких істотно залежать відповідно P, A, C [1].

Загальну ситуацію побудови обчислювальних алгоритмів (о.а.), що дозволяють обчислювати інтеграли (1) з точністю ε ($\varepsilon > 0$) при обмежених обчислювальних ресурсах, можна описати наступним чином.

Потрібно розробити або вибрати серед відомих таку о.а.-програму $a \in A(\varepsilon, I, X, Y)$, де $A(\varepsilon, I, X, Y)$ — множина о.а. — програм, орієнтованих на розв'язання задачі обчислення інтегралів $I_j(\omega)$, $j = \overline{1,3}$, яка забезпечує при вибраній архітектурі комп'ютера $c(Y)$ обчислення $I_j(\omega)$, $j = \overline{1,3}$ із заданими характеристиками якості:

$$E(I, X, Y) \le \varepsilon, \tag{2}$$

$$T(I, X, Y, \varepsilon) \le T_0(\varepsilon), \tag{3}$$

$$M(I, X, Y, \varepsilon) \le M_0(\varepsilon), \tag{4}$$

де ε, T_0, M_0 — задані числа. Наближений розв'язок задачі (1), що задовольняє умові (2), називається ε-розв'язком. О.а. — програма, яка задовольняє умовам (2)–(3), називається T-ефективною.

Оскільки характеристики $E(I, X, Y)$, $T(I, X, Y, \varepsilon)$, $M(I, X, Y, \varepsilon)$, як правило, точно не відомі, то розглядаються деякі оцінки цих характеристик. Отримання якісних апріорних оцінок, зокрема, оцінок точності E та її складової — похибки методу, є одним з вагомих резервів оптимізації обчислень для покращення якості о.а.-програм розв'язування задачі наближеного інтегрування швидкоосцилюючих функцій (1). В цьому сенсі дуже складно переоцінити важливість виявлення та уточнення апріорної інформації про задачу, оскільки:

1) чим якісніша інформація про задачу, тим якісніший наближений розв'язок, на який ми можемо розраховувати;
2) максимальне використання усієї наявної інформації про задачу дає змогу звузити клас задач, що розв'язуються, і тим самим підвищує потенційну спроможність чисельного методу;
3) чим точніша вихідна інформація, тим точніші оцінки похибки і менша область невизначеності наближеного розв'язку;
4) на аналізі оцінок похибки ґрунтується комп'ютерна технологія розв'язування задач із заданими характеристиками якості за точністю і швидкодією.

У даній роботі розглянемо алгоритм, який дозволяє, використовуючи дискретну інформацію про підінтегральну функцію $f(x)$, зробити певні висновки про її властивості, занурити її у відповідний клас F, а також звузити цей клас за рахунок більш точного визначення його параметрів, таких як порядок диференційованості, показник Гельдера чи константа Ліпшиця. Для побудови алгоритму, використаємо результати роботи [2].

Припустимо, що інформація про функцію $f(x)$ задана N значеннями функції $f_\nu = f(x_\nu)$ у вузлах сітки

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{N-1} = b\ .$$

Для спрощення викладок припустимо, що сітка Δ — рівномірна, $N = 2^\gamma + 1$, крок $h = (b-a)/N$.

Задамо послідовність сіток

$$\Delta^\lambda : a = x_0^\lambda < x_1^\lambda < \ldots < x_{N_\lambda - 1}^\lambda = b\,,$$

які складені із вузлів сітки Δ і задовільняють умовам:

$$N_\lambda = 2^\lambda + 1\,,\ \lambda = \overline{1,\gamma}\,,\ N_\gamma = N\,,\ \Delta^\gamma = \Delta\,.$$

Тоді для кожної з сіток послідовності задані f_ν^λ — значення функції $f(x)$, $x \in [a,b]$, у вузлах сітки Δ^λ, $f_\nu^\lambda = f(x_\nu^\lambda)$.

Спираючись на результати роботи [3], можна стверджувати, що існує метод побудови апроксиманта $S_\lambda(x)$ за значеннями $f(x)$ у вузлах сітки Δ^λ, такий, що наближає функцію $f(x)$, яка має на відрізку $[a,b]$ неперервну похідну порядку m з модулем неперервності $\omega(f^{(m)}, h_\lambda)$ з похибкою

$$E(f, S_\lambda) = \max_{x \in [a,b]} \left| f(x) - S_\lambda(x) \right| \le O({h_\lambda}^m \cdot \omega(f^{(m)}, h_\lambda))\,, \tag{5}$$

де h_λ — крок сітки Δ_λ.

Припустимо також, що

$$\omega(f^{(m)}, h_\lambda) = O({h_\lambda}^\alpha)\,,\ 0 < \alpha \le 1\,. \tag{6}$$

Тоді вираз (5) можна представити як

$$E(f, S_\lambda) \le O({h_\lambda}^{m+\alpha})\,. \tag{7}$$

У роботі [3] доведено, що співвідношення (7) виконується, наприклад, для похибки $E(f, S_\lambda)$ відновлення функції $f(x)$ інтерполяційним сплайном $S_\lambda(x)$. Позначивши $\beta = m + \alpha$, вираз (7) при досить малому h_λ можна наближено записати як

$$E(f, S_\lambda) \approx C{h_\lambda}^\beta\,, \tag{8}$$

де C — деяка константа.

Із співвідношення (8) випливає очевидна наближена рівність

$$\frac{E(f, S_\lambda)}{E(f, S_{\lambda+1})} \approx \left(\frac{h_\lambda}{h_{\lambda+1}} \right)^\beta,$$

з якої можна отримати оцінку β_λ величини β:

$$\beta_\lambda = \frac{\log[E(f,S_\lambda)/E(f,S_{\lambda+1})]}{\log(h_\lambda / h_{\lambda+1})}. \tag{9}$$

При $\lambda = 1,2,...,\gamma$, отримаємо послідовність β_1, β_2, … , β_γ оцінок для β. Шляхом виявлення тенденції у поведінці послідовності β_λ, $\lambda = 1,2,...,\gamma$, можна наближено визначити β.

Нехай для деяких членів послідовності β_λ виконується нерівність

$$\left|\beta_{\lambda_1+s} - \beta_{\lambda_1}\right| \le \delta_1, \tag{10}$$

де s — деяке ціле додатнє число, δ_1 — досить мала додатня величина. Ця нерівність з деякою вірогідністю говорить про те, що величини β_λ застабілізувалися і за наближене значення β можна прийняти $\tilde{\beta} = \beta_{\lambda_1+s}$. Якщо не вдається встановити нерівність (10), то це може бути пов'язане, по-перше, з тим, що якісь із припущень (5)–(7) не виконуються; по-друге, з похибкою вхідних даних та заокруглень; по-третє, з тим, що вхідної інформації недостатньо для виявлення тенденції, наприклад, N не достатньо велике. Ці висновки можна використати для визначення подальших напрямків продовження дослідження.

Вище припускалося, що вхідні дані задачі точно. Нехай тепер

$$\left|f_\nu^\lambda - f(x_\nu^\lambda)\right| < \varepsilon_\nu,\ \nu = \overline{1,N_\lambda},\ \varepsilon_\nu > 0,\ \varepsilon = \max_\nu \varepsilon_\nu. \tag{11}$$

Позначимо $S_{\lambda,\varepsilon}(x)$ — функцію, побудовану за наближеними вхідними даними тим же методом, що і функція $S_\lambda(x)$. Тоді похибка наближення функції $f(x)$ за допомогою функції $S_{\lambda,\varepsilon}(x)$ обмежена сумою похибки методу наближення $f(x)$ функцією $S_\lambda(x)$ і похибки, що виникає у наслідок неточності задання вихідних даних:

$$E(f,S_{\lambda,\varepsilon}) \le E(f,S_\lambda) + E(S_\lambda, S_{\lambda,\varepsilon}).$$

З результатів роботи [3] випливає, що у випадку, коли $f(x)$ має на відрізку $[a, b]$ неперервну похідну порядку m, яка задовільняє умовам (5)–(6), і за апроксимант береться інтерполяційний сплайн з рівновідданеними вузлами на скінченному відрізку $S_\lambda(x)$, то побудований за наближеними значеннями функції $f(x)$ сплайн $S_{\lambda,\varepsilon}(x)$ відрізняється від $S_\lambda(x)$ у вузлах сітки на величини, що не перевищують ε і при цьому

$$E(S_\lambda, S_{\lambda,\varepsilon}) \le O(\varepsilon),\ E(f,S_{\lambda,\varepsilon}) \le O(h_\lambda^{m+\alpha}) + O(\varepsilon).$$

Оптимальною за порядком точності сіткою при заданому ε є сітка з кроком $h_\lambda = O(\varepsilon^{1/(m+\alpha)})$. У цьому випадку $E(f,S_{\lambda,\varepsilon}) \le O(\varepsilon)$.

Наведемо покроковий опис розглянутого алгоритму.

Алгоритм виявлення та уточнення вихідної інформації.

Крок 1. На відрізку $[a,b]$ будуємо рівномірні (з кроками h_i) сітки $\Delta^i : a = x_0^i < x_1^i < ... < x_{N_i-1}^i = b$, кількість вузлів яких $N_i = 2^i + 1$, $i = i_0, i_0+1, ..., \gamma$, де початкове значення i_0 та кінцеве γ — задані, $i_0 << \gamma$.

Крок 2. Як апроксимант функції $f(x)$ використаємо локальний параболічний сплайн $S_i(x)$. Як сказано вище, для нього виконується співвідношення (8).

Обчислюємо наближене значення $E(f, S_i)$ за формулою:

$$E(f, S_i) = \max_{k,j} \left| f(z_{k,j}^i) - S_i(z_{k,j}^i) \right|,$$

де $z_{k,j}^i = x_k^i + j\dfrac{h_i}{n_i}$, $k = \overline{0, N_i - 1}$, $j = \overline{1, n_i}$, n_i — задане.

Крок 3. За формулою (9) обчислюємо оцінки β_i. Перевіряємо співвідношення

$$\left| \beta_i - \beta_{i-1} \right| \le \overline{\delta}, \tag{12}$$

де $\overline{\delta}$ — задане.

Якщо для деякого $i = l$, $l < \gamma$ нерівність (12) виконується, то переходимо на крок 4.

Якщо серед членів послідовності $\{\beta_i\}$, $i = i_0, i_0+1, ..., \gamma$ не знайшлося такого, для якого виконується нерівність (12), то переходимо на крок 5.

Крок 4. Обчислюємо n наступних β_{l+r}, $r = \overline{1, n}$, n — задане, виконання нерівності

$$\left| \beta_{l+r} - \beta_l \right| \le \overline{\delta}. \tag{13}$$

Якщо вона виконується, то вважатимемо, що закономірність у поведінці членів послідовності $\{\beta_i\}$ виявлена, покладаємо $\tilde{\beta} = \beta_{l+n}$ і переходимо на крок 6. Якщо ні, то при $l < \gamma$ переходимо на крок 3 та перевіряємо виконання нерівності (12) для наступних членів послідовності $\{\beta_i\}$, починаючи з $\beta_i = \beta_{s+1}$, при $s \ge \gamma$, переходимо на крок 5.

Крок 5. Тенденцію у поведінці β_i не виявлено. Цей результат може бути пов'язаний, зокрема, з тим, що якісь із припущень (5)–(7) не виконуються, наприклад, функція $f(x)$ не має похідної порядка m, яка задовольняє умові Гельдера з показником α, або з великою похибкою вхідних даних та заокруглень, або з тим, що вхідної інформації недостатньо для виявлення тенденції, наприклад, N і відповідно γ не достатньо великі. Потрібно продовжити дослідження з метою усунення вищеназваних причин.

Крок 6. Маючи уточнену оцінку $\tilde{\beta} = m + \alpha$, знаходимо $m = [\tilde{\beta}]$, $\alpha = \tilde{\beta} - [\tilde{\beta}]$, де $[\tilde{\beta}]$ — ціла частина числа $\tilde{\beta}$.

Щоб знайти наближене значення константи Гельдера функції $f(x)$, скористаємось наступними результатами: у [3] доведено, що у випадку, коли функція $f(x)$ має похідну порядка m ($m = 0, 1, 2, 3$), яка задовольняє умові Гельдера з показником α, наближається інтерполяційним параболічним або кубічним сплайном $S_{n,\lambda,\varepsilon}(x)$ ($n = 2, 3$ — степінь сплайна) з рівновіддаленими вузлами на скінченному відрізку $[a,b]$, побудованим за наближеними вхідними даними (11), то для похибки наближення m-ї похідної функції $f(x)$ m-ю похідною сплайна $S_{n,\lambda,\varepsilon}(x)$ маємо наступну оцінку:

$$E(f^{(m)},\, S^{(m)}_{n,\lambda,\varepsilon}) \le O(h_\lambda^{n+\alpha-m}) + \varepsilon \cdot O(h_\lambda^{-m}),\ n = 2, 3,\ m = \overline{0,n}.$$

Отже, оптимальною за порядком точності сіткою при заданому ε є сітка з кроком

$$h_\lambda = O(\varepsilon^{1/(n+\alpha)}) \tag{14}$$

і в цьому випадку

$$E(f^{(m)}, S^{(m)}_{\lambda,\varepsilon}) \le O(\varepsilon^{(n+\alpha-m)/(n+\alpha)}). \tag{15}$$

Отже, виберемо сітку $\Delta^\lambda : a = x_0^\lambda < x_1^\lambda < \ldots < x_{N_\lambda - 1}^\lambda = b$, з кроком h_λ, що задовільняє умові (14) і за наближене значення константи Гельдера функції $f^{(m)}(x)$ приймемо величину

$$\tilde{L} = \max_{0 \le \nu \le n} \frac{\left| S^{(m)}_{n,\lambda,\varepsilon}(x_\nu) - S^{(m)}_{n,\lambda,\varepsilon}(x_{\nu-1}) \right|}{\left| x_\nu - x_{\nu-1} \right|^\alpha}. \tag{16}$$

Обчисливши за допомогою даного алгоритму оцінки m, α та $\tilde{L}$, «занурюємо» функцію $f(x)$ в один з класів функцій F, F_N або $F_{N,\varepsilon}$, для яких відомі оптимальні за точністю або близькі до них методи розв'язування задачі наближеного інтегрування швидкоосцилюючих функцій [1], і будуємо розв’язок задачі (1), який задовільняє умови (2)–(4).

Висновки. У роботі побудовано алгоритм, який дозволяє, використовуючи дискретну інформацію про підінтегральну функцію $f(x)$, уточнити такі її параметри, як порядок диференційованості, показник Гельдера, константа Ліпшиця, «занурити» її у відповідний клас F,

F_N або $F_{N,\varepsilon}$, що надає змогу отримати якісний наближений розв'язок задачі (1) і більш точні оцінки похибки цього розв'язку.

Список використаних джерел:

1. Сергієнко І. В., Задірака В. К., Литвин О. М., Мельникова С. С., Нечуйвітер О. П. Оптимальні алгоритми обчислення інтегралів від швидкоосцилюючих функцій та їх застосування. Т. 1. Алгоритми; Т. 2. Застосування. Киев: Наук. думка, 2011. 448 с.; 348 с.
2. Березовский А. И., Кондратенко О. С. О выявлении и уточнении априорной информации. *Управляющие системы и машины*. 1997. № 6. С. 17–22.
3. Стечкин С. Б., Субботин Ю. Н. Сплайны в вычислительной математике. М.: Наука, 1976. 248 с.

An algorithm for identifying and clarifying the priori information about the integrand for the problem of rapidly oscillating functions approximate integration is presented.

Key words: *the priori information, the function classes, rapidly oscillating functions approximate integration.*

Одержано 28.02.2017

УДК 519.65

П. С. Малачівський*, д-р. техн. наук, професор,
Б. Р. Монцібович*, канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Я. В. Пізюр,** канд. фіз.-мат. наук, доцент,
Р. П. Малачівський,** інженер

*Центр математичного моделювання Інституту прикладних проблем механіки і математики імені Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів,
**Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

АЛГОРИТМ РІВНОМІРНОГО НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

Запропоновано алгоритм побудови рівномірного наближення функцій багатьох змінних як граничного наближення у нормі простору L^p при $p \to \infty$. Він ґрунтується на використанні методу найменших квадратів зі змінною ваговою функцією. Запропоновано спосіб послідовного уточнення вагової функції.

Ключові слова: *функції багатьох змінних, рівномірне наближення.*

Вступ. Нехай неперервну функцію n змінних $f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ задану для $x_i \in \left[\alpha_i, \beta_i\right]$, $i = \overline{1, n}$ необхідно наблизити виразом $F_m\left(a; x_1, x_2, ..., x_n\right)$, де $F_m\left(a; x_1, x_2, ..., x_n\right)$ — узагальнений поліном

