УДК 519.1

В. І. Петренюк, канд. фіз.-мат. наук, доцент
Центральноукраїнський національний технічний університет,
м. Кропивницький

СТРУКТУРА 28-МИ 9-ТИ ВЕРШИННИХ ГРАФІВ-ОБСТРУКЦІЙ ТОРА

Досліджено структуру 28-ми 9-ти вершинних графів-обструкцій для тора.

Ключові слова: *граф-обструкція, тор, φ-перетворення графів.*

Вступ. Задача полягатиме у вивченні структури 9-ти вершинних графів-обструкцій для тора з метою використання при побудові n-вершинних, $n > 9$, графів-обструкцій для тора.

Основні визначення та позначення взято з [1]. В роботі [2] запропоновано спосіб побудови графів-обструкцій обмеженого орієнтованого роду як φ-образу двох графів, один з яких має бути квазізіркою, з'єднаних шляхом ототожнення пар вершин, для випадку несуттєвості порядку ототожнення зазначених пар точок; тобто один із підграфів, породжених підмножинами точок, допускатиме перестановку довільної пари точок з'єднання, наприклад, є повним графом як в D_6, D_7, D_8. Цей підхід може видавати такі графи, які набуватимуть статус обструкцій після стискання в точку усіх зайвих ребер-променів квазізірки, саме так побудовані графи D_9, D_{11}, D_{15}, D_{16}, D_{17}, D_{19}, D_{20}. Однак не всі графи-обструкції для тора можливо отримати цим способом, наприклад, такими є графи D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{17}, D_{18}, D_{21}, D_{27}. Одна з причин відсутності зайвих ребер — необхідність двостороннього доступу до деяких точок із пар, що підлягають ототожненню.

Лема 1. Для D_4, D_5, D_6, D_7 мають місце наступні φ-перетворення:

1) $\varphi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1}^{6}(i' \dot{+} i'')) \to (D_4, \{i\}_1^6)$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i'\}_{i=4}^6$, $St^0{}_4(c) = \{i''\}_{i=1}^3 \cup \{a\}$, $K = (\{i''\}_{i=1}^6 \cup \{a,b,c\}, St_4^1(c) \cup K_5^1 \setminus \{(a,b)\})$, $K_5^0 = \{i''\}_{i=4}^6 \setminus \{(a,b)\}$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) \cup K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, або D_4, $D_4 = (K_{4,5}^0, K_{4,5}^1 \bigcup \{(a,c)\})$, містить підграф ізоморфний графу E_{18} [3];

2) $\varphi(K_{3,3} + K, \sum_{i=1}^{6}(i' \dot{+} i'')) \to (D_5, \{\{i\}_{i=1}^6)$,

де $K = (\{i''\}_{i=1}^6 \cup \{a,b,c\}, St_3^1(c) \cup K_5^1)$, $St^0{}_3(c) = \{i''\}_{i=1}^3$, $K_5^0 = (\{i''\}_{i=4}^6 \cup \{a,b\}$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) \cup K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, причому D_5 має підграф ізоморфний E_3, або E_{18}, наведені в [3];

3) $\varphi(K_5+K,\sum_{i=1}^{5}(i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to (D_6,\{\{i\}_{i=1}^{5})$,

де $K_5^0=(\{i'\}_{i=1}^{5}$, $K_4^0=\{a,b,c,v\}$, $K^0=(\{i''\}_{i=1}^{5}\cup\{a,b,c,v\}$,

$$K^1=K_4^1\cup\{(a,1'').(b,5''),(c,2''),(c,3''),(v,4''),(v,3'')\};$$

4) $\varphi(K_5+K,\sum_{i=1}^{3}(i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to (D_7,\{i\}_{i=1}^{3})$,

де $K_5^0=\{i'\}_{i=1}^{5}$, $K^0=\{i''\}_{i=1}^{3}\cup K_4^0$, $K_4^0=\{a,b,c,v\}$,

$$K^1=K_4^1\cup\{(b,1''),(a,2''),(c,3''),(v,2'')\}.$$

Лема 2. Для D_8, D_9, D_{10}, D_{11} мають місце такі φ-перетворення:

1) $\varphi(K_5+K,\sum_{i=3,5}(i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to (D_8,\{i\}_{i=3,5})$,

де $K_5^0=\{i'\}_{i=1}^{5}$, $K_4^0=\{a,b,v,c\}$,

$$K=(K_4^0\cup\{3'',5''\},K_4^1\cup\{(a,3''),(v,3''),(b,5''),(c,5'')\});$$

2) $\varphi(K_5+K),\sum_{i=1,5}(i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to (D_9,\{i\}_{i=1,5})$, де $K_5^0=\{i'\}_{i=1}^{5}$, граф D_9 наведений в [4], $K(\{a,b,c,v,1'',5''\})=K_5$,

$$K=(\{a,b,c,v,1'',5''\},(K_5^1\setminus(1'',v))\cup(3'',2''));$$

3) $\varphi(K_5+K,(1' \underset{\bullet}{+} 1'')) \to (D_{10},\{1\})$, $K=K_5$, $K_5^0=\{i'\}_{i=1}^{5}$, $K^0=\{i''\}_{i=1}^{5}$.

4) $\varphi(K_{3,3}+K,\sum_{i=1,2,5}(i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to (D_{11},\{i\}_{1,2,5})$,

$$K=(\{1'',2'',5'',a,b,c\},K_{3,3}^1\cup K_3^1),\ K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^{3})=\overline{K_3},$$

$$K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^{6})=\overline{K_3},\ K(\{1'',2'',5''\})=K_3,\ K(\{a,b,c\})=K_3.$$

Лема 3. Для D_{12}, D_{13}, D_{14}, D_{15} мають місце такі φ-перетворення:

1) $\varphi(K_{3,3}+K,\sum_{i=1}^{3}(i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to (D_{12},\{i\}_1^3)$,

де $K=K_6\setminus K_3^1$, $K^0=\{1'',2'',3'',a,b,v\}$, $K_{3,3}^0=\{i'\}_{i=1}^{3}\cup\{i'\}_{i=4}^{6}$,

$$K^1=(K_6^1\setminus\{(a,b),(a,v),(b,v)\},\ K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^{3})=K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^{6})=\overline{K_3};$$

2) $\varphi(K_5+K,\sum_{i=1}^{5}(i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to (D_{13},\{i\}_{i=1}^{5})$,

де $K_5^0=\{i'\}_{i=1}^{5}$, $K^0=\{1'',2'',3'',a,b,c\}$, граф K є φ-образом графів $K_4,K_5\setminus(2'',4'')$, виконаним шляхом ототожнення по ребру (b, c), де

$K_4^0 = \{1", 3", 5", b, c\}$, де вершина $5"$ розділяє ребро $(1", 3")$, $K_5^0 \setminus (2", 4") =$ $= \{4", 2", a, b, c\}$;

3) $\varphi(K_{3,3} + K, \sum\limits_{i=1,\neq 4}^{5} (i' \underset{\bullet}{+} i")) \to (D_{14}, \{i\}_{i=1,\neq 4}^{5})$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i'\}_{i=4}^6$,

$K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = \overline{K_3}$, $K^0 = \{1", 2", 3", 5", a, b, v\}$,

$K = (K_6^0 \cup \{3"\}, K_6^1 \setminus K_3^1 \cup \{(3", v), (a, 3")\}$, $K(2", 3", 6") = \overline{K_3}$,

$K(\{a, b, v, 3"\}) \cong K_3$, де вершина $3"$ розділяє ребро (a, v);

4) $\varphi((K_6 \setminus K_3^1) + K)), \sum\limits_{i=4}^{6} (i' \underset{\bullet}{+} i")) \to (D_{15}, \{i\}_{i=4}^6)$, $K_6 \setminus K_3^1(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$,

$K = (K_5^0, K_5^1 \setminus (4", 5") \cup \{(a, 6")$, $K^0 = \{4", 5", 6", a, b, v\}$, $K_6^0 = \{i'\}_{i=1}^6$,

$K_6 \setminus K_3^1(\{i'\}_{i=1}^3) = K_3$;

Лема 4. Для D_{16}, D_{17}, D_{18}, D_{19} мають місце такі φ-перетворення:

1) $\varphi(K_{3,3} + K, \sum\limits_{i=1}^{6} (i' \underset{\bullet}{+} i")) \to (D_{16}, \{i\}_{i=1}^6)$,

де граф $K = K_5 \setminus (4", 6") \cup St_6(c)$,

$$K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) = K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3},\ St_6^0(c) = \{i"\}_{i=1}^6 \cup \{c\},$$

$$K_5^0 \setminus (4", 5") = \{a, b, 4", 5", 2"\};$$

2) $\varphi(K_{3,3} + (St_4(c) \cup K^"), \sum\limits_{i=1}^{6} (i' \underset{\bullet}{+} i")) \to (D_{17}, \{i\}_{i=1}^6)$, де граф $K^"$ утворений з двох копій графа K_4, $K(\{a, b, 2", 6"\})$ та $K(\{a, b, 1", 5"\})$, які мають спільними дві вершини $\{a, b\}$, $K_{3,3}(\{i'\}_{i=1}^3) =$ $= K_{3,3}(\{i'\}_{i=4}^6) = \overline{K_3}$, $K_{3,3}^0 = \{i'\}_{i=1}^3 \cup \{i'\}_{i=4}^6$, $St_4^0(c) = \{i"\}_{i=1}^4 \cup \{c\}$, $K_4 = K(\{a, b, 2", 6"\})$, $K_4 = K(\{a, b, 1", 5"\})$;

3) $\varphi(K_{3,4} \cup K_3^1 + K, \sum\limits_{i=1}^{6} (i' \underset{\bullet}{+} i")) \to (D_{18}, \{i\}_{i=1}^6)$, де граф K визначений наступним чином: $K = (\{1", 2", 4", a, b\}, K_{55}^1 \setminus (1", 4")$, $K_{3,4}^0 = \{i'\}_{i=1}^7$, $K_{3,4}(\{i'\}_{i=1}^3 \cup \{7'\}) = \overline{K_4}$, $K_{3,4}(\{i'\}_{i=4}^6) = K_3$, $K_{3,4}^0 = (\{i'\}_{i=1}^3 \cup \{7'\}) \cup \{i'\}_{i=4}^6$;

4) $\varphi(K_5 + K, \sum\limits_{i=1,2,5} (i' \underset{\bullet}{+} i")) \to (D_{19}, \{i\}_{i=1,2,5})$, де $K_5^0 = \{i'\}_{i=1}^5$ і граф K визначений наступним чином: $K = K_{3,3} \setminus (a, b) \cup \{(a, 5"), (b, 5")\}$,

$K^{0}=\{i''\}_{i=1,2,5}\cup\{a,b,c,d\}$, причому вершина $5''$ розділяє ребро (a,b), $K\{a, 1'', 2''\}=\overline{K_3}$, $K\{d,c,b\}=K_3\setminus(d,c)$.

Лема 5. Виконуються наступні твердження.

1) для графа D_{20} існує φ-перетворення, визначене наступним чином:

$$\varphi(K_{3,4}\cup K_3^1+K,\sum_{i=1,2,5,7}(i'\underset{\bullet}{+}i''))\to((D_{20},\{i\}_{i=1,2,5,7}),$$ граф K визначений наступним чином: $K=(\{7'',2'',5'',a,b\},K_5^1\setminus(2'',7''))$, де $K_{3,4}^0=\{i'\}_{i=1}^7$, $K_{3,4}(\{i'\}_{i=1}^3\cup\{7'\})=\overline{K_4}$, $K_{3,4}(\{i'\}_{i=4}^6)=K_3$, $K_{3,4}^0=$ $=(\{i'\}_{i=1}^3\cup\{7'\})\cup\{i'\}_{i=4}^6$;

2) для графа D_{21} існує φ-перетворення, визначене наступним чином:

$$\varphi(K_5+K,\sum_{i=1,4,5}(i'\underset{\bullet}{+}i''))\to(D_{21},\{i\}_{i=1,4,5}),$$

де $K^{0}=\{1'',4'',5''\}\cup\{a,b,v,c\}$, $K(\{a,b,v,c,4'',5''\})\cong K_4$,

$K(\{a,b,v,c,1'',4'',5''\})\cong K_5$, причому вершини $4'',5''$ розділяють ребра (a,b), (v,c) відповідно;

3) для графа D_{22} існує φ-перетворення, визначене наступним чином:

$$\varphi(K'+H,\sum_{i=1}^{6}(i'\underset{\bullet}{+}i''))\to(D_{22},\{i\}_{i=1}^6),$$ де $K'^0=\{i'\}_{i=1}^6$, причому вершина $6'$ розділяє ребро $(1', 2')$, $K'^1=K_5\setminus(1',2')\cup\{(6',1'),(6',2')\}$, а граф H такий, що $H=K_{3,3}+(b,a))$, $H(\{1'',c,2''\})=\overline{K_3}$, $H(\{a,b,6''\})=(\{a,b,6''\},(a,b))$;

4) для графа D_{23} існує φ-перетворення визначене наступним чином:

$$\varphi(K_{3,3}+H,\sum_{i=1}^{5}(i'\underset{\bullet}{+}i''))\to(D_{23},\{i\}_{i=1}^5),$$ де H, є $K_{3,3}$ із трикутником на вершинах однієї долі, у якого ребра $(b,a),(c,b)$ 1-підрозділені вершинами $4''$, $5''$ відповідно, $H=(\{i''\}_1^6\cup\{a,b,c\},K_{3,3}^1\cup K_3^1)$.

Лема 6. Виконуються наступні твердження.

1) D_{24} є φ-образом графів $K_{3,3}$, де $K_{3,3}^0=\{i'\}_1^3+\{i'\}_4^6$, $H\cong K_6\setminus K_3^1$, $K_{3,3}(\{i'\}_1^3)=K_{3,3}(\{i'\}_4^6)=\overline{K_3}$ та H, при наступному перетворенні $$\varphi(K_{3,3}+H,\sum_{i=1,i\neq3}^{6}(i'\underset{\bullet}{+}i''))\to(D_{24},\{i\}_{i=1,i\neq3}^6),$$ виконаному шляхом

ототожнення усіх пар (i', i'') вершин, окрім вершини 3, $M'' = \{i''\}_{1, i\neq 3}^{6}$, $M' = \{i'\}_{1, i\neq 3}^{6}$, де вершини 4", 6" розділяють ребра $(a,b), (b,v)$, відповідно, а 5" розділяє ребро $(1'', b)$, $H(\{1'', 2'', 5''\}) = \overline{K_3}$, $H(\{a,b,v\}) = K_3$;

2) D_{25} є φ-образом $\varphi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1}^{6}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{25}, \{i\}_{i=1}^{6})$ графів $K_{3,3}$ та H, де $K_{3,3}^{0} = \{i'\}_1^3 + \{i'\}_4^6$, $K_{3,3}(\{i'\}_1^3) = K_{3,3}(\{i'\}_4^6) = \overline{K_3}$, $H \cong K_6 \setminus K_3^1$, заданим шляхом ототожнення усіх пар (i', i'') вершин, окрім вершини 3, $M'' = \{i''\}_1^6$, $M' = \{i'\}_1^6$, де вершини 2", 3" розділяють ребра $(a,v), (b,v)$, відповідно, а 5" розділяє ребро $(1'', b)$, $H(\{a,b,v\}) = K_3$, $H(\{1'', 4'', 6''\}) = \overline{K_3}$;

3) граф D_{26} є φ-образом $\varphi(K_5 \setminus (4,5) + H, \sum_{i=1}^{4}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{26}, \{i\}_{i=1}^{5})$ графів K_5 та квазізірки H з центром K_4, $K_4^0 = \{a, 4'', c, v\}$, в якому трикутник (a, c, v) має 3 кратних ребра підрозділених вершинами 1", 2", 3" відповідно, а 4' графа K_5 розділяє ребро $(5, 4)$, де $K_5^0 = \{1', 2', 3', 4, 5\}$;

4) D_{27} є φ-образом графів $K_{3,3}$ та H при φ-перетворенні, заданому на множинах вершин формулою $\varphi(K_{3,3} + H, \sum_{i=1}^{6}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{27}, \{i\}_{i=1}^{6})$, де $K_{3,3}^0 = \{i'\}_1^6$, $H = K_5 \setminus (1'', 2'') \cup \{(3'', v), (3'', v), (v, 4''), (a, 5''), (a, 6'')\}$, $K_5^0 \setminus (1'', 2'') = \{a, b, v, 1'', 2''\}$, $\deg 3'' = 2$.

Лема 7. Виконуються наступні твердження.

1) D_{28} є φ-образом графів K_5 та H, де $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^0 = \{i''\}_1^4 \cup \{a, b, c, v\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(2'', 5''), (b, v)\} \cup St_5^1(a)$, $St_5^0(a) - \{1'', 3'', 4'', b, v, c\}$ при перетворенні, заданому формулою $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1,}^{4}(i' \dot{+} i'')) \to (D_{28}, \{i\}_{i=1}^{4})$ шляхом ототожнення усіх пар (i', i'') вершин з $M' = \{i'\}_1^4$, $M'' = \{i''\}_1^4$;

2) D_{29} є φ-образом графів K_5 та H,

де $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$,

$$H^1 = K_5^1 \setminus \{(2'', 1''), (b, v)\} \cup \{(a, b), (a, v), (4'', v), (3'', v)\},$$

при перетворенні, заданому формулою $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1,}^{5}(i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to$ $\to (D_{29}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототожнення усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M^{'} = \{i'\}_1^5$, $M^{''} = \{i''\}_1^5$;

3) D_{30} — φ-образ графів K_5 та H,

де $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup \{a, b, c, v\}$,

$$H^1 = K_5^1 \setminus \{(3'', 1''), (b, v)\} \cup \{(c, b), (c, v), (2'', c), (5'', c), (4'', b)\},$$

при перетворенні, заданому наступною формулою:

$$\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1,}^{5}(i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to (D_{30}, \{i\}_{i=1}^5)$$

шляхом ототожнення усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M^{'} = \{i'\}_1^5$, $M^{''} = \{i''\}_1^5$;

4) D_{31} є φ-образом графів K_5 та H, де $K_5^0 = \{i'\}_1^5$, $H^0 = \{i''\}_1^5 \cup$ $\cup \{a, b, c, d\}$, $H^1 = K_5^1 \setminus \{(5'', 1''), (b, 1'')\} \cup \{(d, b), (d, 1''), (2'', d), (3'', b), (4'', b)\}$, де вершина d розділяє ребро $(b, 1'')$ при перетворенні, заданому наступною формулою: $\varphi(K_5 + H, \sum_{i=1,}^{5}(i' \underset{\bullet}{+} i'')) \to (D_{31}, \{i\}_{i=1}^5)$ шляхом ототожнення усіх пар (i', i'') вершин з множин приєднання $M^{'} = \{i'\}_1^5$, $M^{''} = \{i''\}_1^5$.

Із наведених вище лем 1–7 випливатиме ***основний результат***.

Теорема. Кожна граф-обструкція роду 2 $D_4, ..., D_{31}$ [5] на 9-ти вершинах є результатом φ-перетворення трьох зв'язних графів X, Y, Z, які задовольняють одному з наступних випадків:

1) граф Y гомеоморфний K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами) вкладений в тор σ, граф Z відсутній, а інший граф X є або площинним 2-мінімальним відносно множини точок приєднання до графа Y на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ та $\partial\theta$ для множини точок приєднання до графа Y, або площинним 3-мінімальним на s недвоклітці тора, $s \in \sigma_1 \setminus Y$, із характеристиками θ, $\partial\theta$, де $\theta = 1$ чи $\partial\theta = 1$, для множини точок приєднання графа X до графа Y;
2) граф Y — один з графів K_5 чи $K_{3,3}$, можливо, без ребра, вкладений в тор σ, а інший граф X роду 1 є 2-мінімальним відносно мно-

жини точок приєднання на недвоклітці $\sigma \setminus Y$ із нульовими характеристиками θ, $\partial\theta$ множини точок приєднання графа X до графа Y, граф Z відсутній;

3) граф Y містить частину гомеоморфну K_5 чи $K_{3,3}$ (можливо із кількома додатковими ребрами), вкладений в тор σ, граф Z — проста зірка, граф X є площинною квазізіркою із центральним графом М на двох вершинах, яка не є 2-мінімальним графом на недвоклітці s, $s \in \sigma \setminus Y$, причому існує, принаймні, одна пара вершин простої зірки Z, зформована з елементів множини приєднання графа X до графа Y, що розділяє на ∂s пару кінцевих вершин з множини приєднання графа X до графа Y.

Список використаних джерел:

1. Хоменко М. П. φ-перетворення графів. Препринт ІМ НАНУ. К., 1971. 378 с.
2. Петренюк В. І. Построение графов-обструкций ограниченного ориентируемого рода. Сборник трудов XVI Международной конференции «Проблемы теоретической кибернетики». Нижний Новгород, 20–25 июня 2011. С. 363–368.
3. Archdeacon. D., Kuratowski A. Theorem for the projective plane. *Journal of Graph Theory*. 1981. V. 5. P. 243–246.
4. Gagarin A., Myrvold W., Chambers J. The obstructions for toroidal graphs with no $K_{3,3}$'s. *Discrete Math*. 2009. V. 309. P. 3625–3631.
5. Hur Suhjin. The Kuratowski covering conjecture for graphs of order less than 10. PhD dissertation, Ohio State University, 2008.

Structure 28 9-verteces graphs obstructions for torus was found.

Key words: *structure, 9-verteces graph obstructions, torus, φ-transformation.*

Одержано 10.03.2017