УДК 519.85

О. С. Пичугина, канд. физ.-мат. наук

Национальный аэрокосмический университет имени Н. Е. Жуковского «Харьковский авиационный институт», г. Харьков

ПОЛИЭДРАЛЬНО-СФЕРИЧЕСКИЕ КОНФИГУРАЦИИ: ОСОБЕННОСТИ И ПРИМЕНЕНИЕ

В статье рассмотрены конечные точечные конфигурации, расположенные на гиперсфере (полиэдрально-сферические конфигурации, PSCs) и исследованы их алгебро-топологические и тополого-метрические свойства.

Поставлены следующие задачи: определение, является ли конечная точечная конфигурация полиэдрально сферической; определение центра и радиуса сферы, описанной вокруг PSC ; определение центра и радиуса PSC, т.е. центра и радиуса описанной сферы минимального радиуса; поиск возможных способов редукции задач, поставленных на PSCs, в частности, их декомпозиции на полиэдрально-сферические подконфигурации. Выделены, исследованы особенности и решены поставленные задачи для трех классов PSCs — симплексных, перестановочных и двухуровневых по координатам, в частности, установлена их связь с базовыми множествами евклидовых комбинаторных конфигураций перестановок и булевых векторов.

Также исследованы свойства PSCs общего вида, в частности, исследован вопрос определения центра и радиуса PSCs, образованных в результате теоретико-множественных операций над точечными конфигурациями, среди которых есть PSCs. Важной отличительной особенностью PSCs является то, что они совпадают со множеством вершин своей выпуклой оболочки, то есть относятся к классу вершинно расположенных. Соответственно, они образуются в пересечении гиперсферы со своей выпуклой оболочкой. Это позволяет при оптимизации на них применять теорию выпуклых продолжений к функциям, заданным на PSCs. В частности, можно считать, что как целевая функция, так и функциональные ограничения задач оптимизации выпуклые и гладкие. А это, в свою очередь, открывает широкие перспективы создания методов типа ветвей и границ, использующие, с одной стороны, при ветвлении - структурные особенности специальных классов PSCs, а с другой - оценки, получаемые в результате решения выпуклых полиэдральных релаксационных задач либо сферических релаксационных задач с выпуклыми целевыми функциями и функциональными ограничениями.

В статье широко освещены вопросы разложений PSCs по выпуклым поверхностям, в частности, по семейству вложенных гиперсфер и параллельным плоскостям. С задачей декомпозиции тесно связана задача декомпозиции PSCs на полиэдрально-сферические подконфигурации, решение которой также предложено в данной работе.

Полученные результаты имеют самостоятельный теоретический интерес, а также применимы в вычислительных алгоритмах, реализующих полиэдрально-сферические методы решения задач оптимизации на PSCs.

Ключевые слова: *конечная точечная конфигурация, евклидова комбинаторная конфигурация, полиэдрально-сферическое множество, вершинно-расположенное множество, комбинаторная оптимизация, многогранник, гиперсфера.*

Введение. При решении задач комбинаторной оптимизации [1–3] на множествах комбинаторных конфигураций стандартным приемом является их формулировка в виде задач дискретного программирования на конечных множествах точек арифметического евклидова пространства (конечных точечных конфигурациях, finite point configurations FPCs) [4]. В терминологии [5, 6] это означает, что исходная задача формулируется на евклидовых комбинаторных множествах, а переход осуществляется к задачах евклидовой комбинаторной оптимизации, решение которых эквивалентно решению исходной задачи.

При таком погружении в арифметическое евклидово пространство достаточно часто допустимые FPCs, называемые в данном случае множествами евклидовых комбинаторных конфигураций ($\mathcal{C}$-множествами) [7, 8], вписаны в гиперсферу. Этот факт порождает интересные особенности этих областей, которые находят применение как в дискретных оптимизационных подходах, таких как методы ветвей и границ, отсечений, ветвей и отсечений), так и в непрерывных подходах, таких как непрерывные формулировки и релаксации [9–14].

1. Постановка задачи. Пусть E — конечное множество в R^n:

$$E = \left\{ x^j, j \in J_{n_E} \right\},\ n_E > 1, \tag{1}$$

где $x^j = (x_1^j, ..., x_n^j),\ j \in J_{n_E} = \left\{1, ..., n_E\right\}$. Такое множество иногда называют конечной точечной конфигурацией (a finite point configuration, FPC) [4].

Точке x^j поставим в соответствие мультимножество ее координат $G(x^j) = \left\{ x_i^j, i \in J_n \right\}$ и назовем ее индуцирующим мультимножеством (an x^j-induced multiset, x^j.IM), а его основу обозначим $A(x^j) = S\left(x^i.\text{IM}\right)$ и назовем образующим множеством x^j ($j \in J_{n_E}$). Сформируем мультимножество G как объединение $G(x^j),\ j \in J_{n_E}$, —

$G = \bigcup_{j=1}^{n_E} G^j$, учитывая, что объединением мультимножеств G , G' называется мультимножество $G'' = G \cup G'$ с основой $S(G'') = S(G) \cup S(G')$ и кратностями $\eta_{G''}(e) = \max\{\eta_G(e), \eta_{G'}(e)\}$, $e \in S(G'')$. Упорядочим элементы G по неубыванию:

$$G = G_E = \left\{g_1, ..., g_\eta\right\}, \ g_i \le g_{i+1} , i \in J_{\eta-1}, \tag{2}$$

а его основу — в форме $A = S\left(G\right) = \left\{e_i, i \in J_k\right\}$, где $e_i < e_{i+1}, \ i \in J_{k-1}$. Назовем G индуцирующим мультимножеством E (an induced multiset, E .IM), а A — образующим множеством (a generated set, E .GS).

Размерностью d_E FPC E назовем размерность ее выпуклой оболочки — $d_E = \dim P$, где

$$P = conv\ E. \tag{3}$$

Определение. FPC E назовем полиэдрально-сферической (a polyhedral-spherical configuration, PSC), если существуют такие $a \in R^n$ и $r > 0$, что для всех точек $x \in E$ выполняется условие

$$\left\|x - a\right\|^2 = r^2 . \tag{4}$$

Центр и радиус гиперсферы $S(a, r)$ вида (4) назовем параметрами PSC E , а саму ее обозначим

$$E = E(a, r) . \tag{5}$$

Параметры PSC определяются однозначно только в случае ее полномерности, т.е. если $d_E = n$, и в этом случае $(a, r) = (\hat{a}, \hat{r})$, где $\hat{a}, \hat{r}$ — центр и радиус гиперсферы минимального радиуса, описанной вокруг E . Если $d_E < n$ представление $E(a, r)$ определено неоднозначно, поэтому, чтобы выделить его будем использовать обозначение $E = \hat{E}(\hat{a}, \hat{r}) = \hat{E}(a^{\min}, r^{\min})$, а параметры $\hat{a}, \hat{r}$ этого представления будем называть центром и радиусом PSC E .

При рассмотрении свойств полиэдрально-сферических конфигураций (PSCs) возникает ряд вопросов, например: а) как определить, является ли FPC $X \subset R^n$ полиэдрально сферической конфигурацией (задача идентификации, Задача 1); б) как определить параметры PSC $E(a, r)$ (задача определения параметров, Задача 2), в том числе параметры представления $\hat{E}(\hat{a}, \hat{r})$ (задача определения центра и радиуса, Задача 3); в) какие существуют способы редукции PSC (задача декомпозиции, Задача 4), т.е. сведения ее к рассмотрению множества полиэдрально-сферических подконфигураций. Исследованию свойств PSCs в этом контексте посвящена данная работа.

2. Изложение основного материала. Приведем несколько классов PSCs, продемонстрировав примеры решения Задачи 1.

Пусть E — FPC в R^n.

Теорема 1. Если

$$card\ E \le n+1, \tag{6}$$

то E — PSC.

FPC E, удовлетворяющую условиям теоремы 1, назовем симплексной (a simplex FPC). Если E — полномерная PSC, ее центр и радиус можно найти согласно [15]. Если E — не полномерная, доопределив ее $n+1-card\ E$ точками до полномерной симплексной конфигурации, можно применить результаты [15].

Теорема 2. Если E .GM таково, что

$$card\ G = n, \tag{7}$$

то E — PSC.

FPC E, удовлетворяющую условиям теоремы 2, назовем перестановочной (a permutation FPC, PC) [7]. Ее характерной особенностью будет то, что индуцирующие мультимножества всех ее элементов совпадают — $G(x^j) = G,\ j \in J_{n_E}$. Размерность PC будет удовлетворять условию:

$$d_E \le n-1, \tag{8}$$

поэтому представление (5) будет определено неоднозначно, в частности, $\forall \alpha \in R \quad a = \alpha \mathbf{e},\ r = \left(\sum_{i=1}^{n} (g_i - \alpha)^2 \right)^{1/2}$ будут допустимыми параметрами [5, 7, 8]. Если же (8) выполнено как равенство, т.е.

$$d_E = n-1, \tag{9}$$

центр и радиус PSC E можно определить по формуле [5]:

$$\hat{r} = \left(\sum_{i=1}^{n} (g_i - \hat{\alpha})^2 \right)^{1/2},\ \hat{a} = \hat{\alpha}\mathbf{e},\ \hat{\alpha} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_i. \tag{10}$$

Теорема 3. Если E удовлетворяет условию:

$$\max_{i \in J_n} card\ A(i) = 2, \text{ где } A(i) = \left\{ x_i^j \right\}_{j \in J_m} .IS,\ i \in J_n, \tag{11}$$

то E — PSC.

FPC E, удовлетворяющую условиям теоремы 3, назовем двухуровневой по координатам (a 2-level FPC, 2LC) [7, 8]. Параметры представления (5) такой конфигурации можно найти по формулам:

$$r = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \left(e_{ik_i} - e_{i1} \right) \right)^{1/2},\ a = \left(a_i \right)_{i \in J_n},\ a_i = \frac{e_{ik_i} + e_{i1}}{2},\ i \in J_n, \tag{12}$$

где $A(i)=\left\{e_{ij}\right\}_{j\in J_{k_i}}$, $e_{ij}<e_{ij+1}$, $j\in J_{k_i-1}$, $i\in J_n$.

Отметим, что если E — полномерная 2LC, формула (12) задает центр и радиус этой конфигурации. Формулы (6), (7), (11) являются достаточными условиями того, что E является PSC, т.е. они дают решения Задачи 1. В то же время формулы (10), (12) дают решение Задачи 2 для PC E или 2LC E соответственно. Кроме того, для этих PSCs, решение Задачи 3 задается формулой (10), если выполнено (9) и E — PC либо формулой (12), если $d_E=n$ и E — 2LC.

Полиэдрально-сферические конфигурации имеют множество интересных особенностей, которые являются предметом нашего исследования, одна из которых положена в основу термина «PSC». Выбор термина «полиэдрально-сферическая конфигурация» обуславливается возможностью представления PSC E в виде пересечения многогранника (3) и гиперсферы $S(a,r)=S_r(a)$, заданной уравнением (4), в результате чего имеет место представление E:

$$E= P\cap S(a,r), \tag{13}$$

называемое полиэдрально-сферическим (a polyhedral-spherical representation, PSR) [7, 8].

А это, в свою очередь, приводит к тому, что PSC E совпадает с множеством вершин P:

$$E=vert\ P, \tag{14}$$

т.е. является вершинно расположенной FPC (a vertex located configuration, VLC) [7,8]. Соответственно, помимо (1) и PSR (13), PSC E позволяет еще одно задание — представление (14) как множество вершин своей выпуклой оболочки.

E .PSR вида $E= P\cap S(\hat{a},\hat{r})$ будем называть PSR минимального радиуса.

Исследуем свойства PSCs общего вида, такие как разложение по плоскостям и строго выпуклым поверхностям, декомпозиции на PSCs меньшей размерности; свойства PSCs, полученных в результате теоретико-множественных операций над PSCs и FPCs общего вида. Также рассмотрим особенности базовых перестановочных (PC $E_1=\left\{x\in R^n : x.GM=G\right\}$) и двухуровневых по координатам (2LC E_2 : $|E_2.IS|=2$) множеств. Так $P_1=conv\ E_1$ представляет собой общий многогранник перестановок, $P_2=conv\ E_2$ — специальный многогранник перестановок или размещений [6–8].

2.1. Конечные точечные конфигурации: разложения и декомпозиции. Перейдем к решению Задачи 4. Пусть E — FPC. Рассмотрим ее разложение по поверхностям, заданным одной функцией, и связанные с ним декомпозиции E на попарно непересекающиеся подконфигурации. Пусть функция $h: R^n \to R^1$ непрерывна и $\forall x^0 \in R^n \;\; h(x) = h\left(x^0\right)$ задает поверхность в R^n. Задача разложения FPC E по семейству поверхностей, заданных функцией $h(x)$, состоит в поиске поверхностей уровня этой функции:

$$\mathcal{S}^i = \{x \in R^n : h(x) = h_i\}, i \in J_{m_{h(x)}}, \tag{15}$$

таких что

$$h_i < h_{i+1}, i \in J_{m_{h(x)}-1}, \tag{16}$$

$$\mathcal{E}^i = E \cap \mathcal{S}^i \neq \varnothing, i \in J_{m_{h(x)}}, \tag{17}$$

$$E = \bigcup_{i=1}^{m_{h(x)}} \mathcal{E}^i . \tag{18}$$

Заметим, что условием (16) обеспечивается следующее:

$$\forall\, i \neq i' \, \mathcal{E}^i \cap \mathcal{E}^{i'} = \varnothing ,$$

а это означает, что одновременно с решением задачи разложения по поверхностям построена декомпозиция (18) множества E на попарно непересекающиеся подконфигурации (17) с числом компонент декомпозиции равным $m_{h(x)}$.

В зависимости от того, какая функция $h(x)$ будет взята за основу разложения (15) точечной конфигурации E по поверхностям, формулы (17), (18) будут задавать разложение E по параллельным плоскостям, вложенным сферам, эллипсоидам, кусочно-линейным поверхностям и т.п. Нас будут интересовать, основанные на вышеуказанных разложениях по поверхностям, декомпозиции PSC на сферически расположенные подконфигурации, в т.ч. меньших размерностей, а также декомпозиции PSC на полиэдрально-сферические подконфигурации меньших размерностей.

2.1.1. Разложение FPC на PSCs. Пусть E — конечная точечная конфигурация в R^n. Выберем точку $a \in R^n$ и построим разложение E по функции $h(x) = \left(x - a\right)^2$. Оно будет иметь вид:

$$\mathcal{S}^i = S\left(a, r_i\right) = \{x \in R^n : \; \left(x - a\right)^2 = r_i^2\}, \;\; i \in J_{m_{h(x)}}, \tag{19}$$

$$0 \le r_i < r_{i+1}, i \in J_{m_{h(x)}-1} . \tag{20}$$

(19), (20) задает разложение E по семейству вложенных гиперсфер, первая из которых будет вырождена в точку в случае, если $a \in E$ и соответственно $r_1 = 0$. Это разложение определяет декомпозицию (17) множества E на PSCs:

$$\mathcal{E}^i = E\left(a, r_i\right), i \in J_{m_{h(x)}} . \tag{21}$$

В этих обозначениях формула (18) приобретает вид:

$$E = \bigcup_{i=1}^{m_{h(x)}} E\left(a, r_i\right) \tag{22}$$

и указывает параметры декомпозиции E на сферически расположенные, следовательно, и вершинно расположенные, подконфигурации.

2.1.2. Разложение PSC на PSCs. Пусть теперь E будет полиэдрально-сферической конфигурацией, т.е. существуют a, r такие, что $E = E\left(a, r\right)$. Тогда для произвольной функции $h(x)$, определенной на E, формула (17) будет задавать декомпозицию этого множества на PSCs, задаваемую разложением E по поверхностям вида (15), (16). Теперь формулы (17), (18) можно представить в виде:

$$\mathcal{E}^i = \mathcal{E}^i\left(a, r\right) = E\left(a, r\right) \cap \mathcal{S}^i \neq \varnothing,\ i \in J_{m_{h(x)}} , \tag{23}$$

$$E\left(a, r\right) = \bigcup_{i=1}^{m_{h(x)}} \mathcal{E}^i\left(a, r\right), \tag{24}$$

указывая, тем самым, и параметры полиэдрально-сферических подконфигураций.

Итак, мы показали как PSCs могут применяться для декомпозиции FPCs на вершинно расположенные конфигурации (VLCs). Также показано, что разложения по поверхностям служит инструментом декомпозиции PSC на PSCs меньшей мощности. Заметим, что поскольку компоненты (21), (23) разложений (22), (24) являются собственными подмножествами E, для них справедливо:

$$d_{\mathcal{E}^i} = \dim\ \mathcal{E}^i \le d_E ,\ \ i \in J_{m_{h(x)}} , \tag{25}$$

соответственно, их радиусы $\hat{r}_{\mathcal{E}^i}$, $i \in J_{m_{h(x)}}$, находятся в соотношении

$$\hat{r}_{\mathcal{E}^i} \le \hat{r} ,\ \ i \in J_{m_{h(x)}} , \tag{26}$$

причем (26) выполняется как равенство максимум для одной подконфигурации $\mathcal{E}^{i_0}$, для которой справедливо $\hat{a} \in P^{i_0}$, где $P^i = conv\ \mathcal{E}^i$, $i \in J_{m_{h(x)}}$, т.е. в целом, разложение PSC по поверхностям приводит декомпозиции на PSCs не только меньших мощностей, но и меньших радиусов. При переходе к рассмотрению декомпозиции E вида (16)-(18), редукция задач, поставленных на FPC E, осуществляется по нескольким направлениям: первое — это снижение размерностей составляющих конфигураций, т.е. интерес представляет поиск условий, при которых оценки (25) выполняются как строгие неравенства (далее Редукция 1, R1); второе — уменьшение радиусов PSCs по сравнению с E и с этим связан поиск условий, при которых (26) выполняются как строгие неравенства (далее Редукция 2, R2); третье — это переход при редукции от FPC заданного вида к FPCs другого вида (далее Редукция 3, R3); четвертое — это переход к подконфигурациям меньшей длины (далее Редукция 4, R4). Под длиною FPC E подразумевается число координат его элементов, принимающих на E более одного значения. R4 позволяет переходить в пространство меньшей размерности.

Возникает также вопрос определения параметров $\mathcal{E}^i\left(a_i, r_i\right)$, $i \in J_{m_{h(x)}}$ по параметрам $E\left(a, r\right)$, в т.ч. $\hat{\mathcal{E}}^i\left(\hat{a}_i, \hat{r}_i\right)$, $i \in J_{m_{h(x)}}$ по параметрам $\hat{E}\left(\hat{a}, \hat{r}\right)$, т.е. решения Задач 2, 3 для элементов декомпозиции E.

Теперь рассмотрим свойства PSCs, позволяющие формировать их декомпозиции на PSCs меньших размерностей и радиусов.

2.2. Теоретико-множественные операции над PSCs. PSCs могут быть образованы из других PSCs в результате теоретико-множественных операций. Рассмотрим некоторые из них.

Введем в рассмотрение набор из $L \geq 2$ точечных конфигураций, заданных в евклидовом пространстве размерности не выше n:

$$E^l \subset R^{n^l},\ n_l \leq n,\ l \in J_L, \tag{27}$$

среди которых есть полиэдрально-сферические, т.е.

$$\exists L' \in J_L\ E^l \subseteq S^{l,\min} = S_{r^{l,\min}}\left(a^{l,\min}\right),\ l \in J_{L'}, \tag{28}$$

$$\exists L'' \in J_{L'}\colon \left|E^l\right| < \infty,\ l \in J_{L''}. \tag{29}$$

Пусть также

$$P^l = conv\ E^l,\ l \in J_L. \tag{30}$$

Заметим, что, за счет условия (29), среди множеств вида (30) будут многогранники, но не обязательно все. Будем предполагать, что для многогранников, присутствующих в семействе (30) известны их H-представления: $\forall l \in J_L:\ \left|E^l\right| < \infty$

$$P^l = \left\{x \in R^{n^l}:\ A^l x = b^l,\ A'^l x \leq b'^l,\ A^l \in R^{m^l \times n^l},\ A'^l \in R^{m'^l \times n^l}\right\}. \tag{31}$$

Обобщим понятие (2) индуцирующего мультимножества G_E конечной точечной конфигурации на произвольную точечную конфигурацию $E \subseteq R^n$. Назовем мультимножество $G_E \subseteq R^1$ индуцирующим мультимножеством точечной конфигурации $E \subseteq R^n$, если оно образовано в результате объединения индуцирующих мультимножеств всевозможных FPCs, сформированных из $E : G_E = \bigcup\limits_{E^i \subseteq E, \left|E^i\right| < \infty} G_{E^i}$. Заметим, что индуцирующее мультимножество будет конечным для конечных точечных конфигураций, счетным — для счетных и несчетным для несчетных точечных конфигураций.

Будем формировать из них FPC E как результат некоторых теоретико-множественных операций над конфигурациями (27). При этом будем полагать, что образованное в результате множество E не только не пусто, но и не вырождено в точку, т.е. имеет вид (1). А это, в свою очередь, предполагает, что PSCs, участвующие в его формировании, не вырождены в точку, т.е.

$$1 < \left|E^l\right| < \infty, \ l \in J_{L'}, \tag{32}$$

а, следовательно, $r^{l,\min} \in R^1_{>0}$, $l \in J_{L'}$.

2.2.1 Подмножество. Пусть $l = 1$, $n_1 = n$, $E^1 = \hat{E}^1\left(a^{1,\min}, r^{1,\min}\right)$ — PSC размерности d_{E_1}, индуцированная мультимножеством G_{E^1}, а точечная конфигурация E является собственным подмножеством E^1 — $E \subset E^1$. Тогда E является PSC с параметрами $E = E\left(a^{1,\min}, r^{1,\min}\right)$ и такую, что $n_E < \left|E^1\right|$,

$$d_E \le d_{E_1}, \tag{33}$$

и индуцирована мультимножеством $G_E \subseteq G_{E^1}$. Соответственно E будет VLC. Для многогранника P вида справедливо строгое включение: $P \subset P^1$. При этом центр $a^{1,\min}$ и радиус $r^{1,\min}$ конфигурации E^1 являются центром и радиусом E тогда и только тогда, когда неравенство (33) обращается равенство $S^{\min} = S^{1,\min} \Leftrightarrow d_E = d_{E_1}$.

2.2.2 Пересечение. Пусть E образуется в результате пересечения точечных конфигураций, удовлетворяющих условию (28), (29).Тогда имеем:

$$E = \bigcap_{l=1}^{L} E^l, \tag{34}$$

$$E^l \subset R^n, \ l \in J_L. \tag{35}$$

Будем также полагать, что в результате операции (34) формируется собственное подмножество каждой из точечных конфигураций (35), т.е.

$$E \subset E^l, \ l \in J_L. \tag{36}$$

Перечислим некоторые свойства FPC (34). Она является PSC как подмножество PSCs E^l, $l \in J_{L'}$, в частности, $E \subseteq S^{l,\min}$, $l \in J_{L'}$, где L' определено из (28). Соответственно, E — VLC.

Мощность и размерность E удовлетворяет условиям:

$$n_E \le \min_{l \in J_L} \left| E^l \right|, \tag{37}$$

$$d_E \le \min_{l \in J_L} d_{E_l} \tag{38}$$

Для индуцирующего E мультимножества справедливо нестрогое включение: $G_E \subseteq \bigcap_{l=1}^{L} G_{E^l}$, а для многогранника P, за счет выполнения условия (36) и вершинной расположенности входящих в семейство (35) конфигураций, — строгое включение $P \subset \bigcap_{l=1}^{L} P^l$. Для радиуса PSC E справедлива оценка: $r^{\min} \le \min_{l \in J_{L'}} r^{l,\min}$.

2.2.3. Сечение PSC плоскостью. Рассмотрим частный случай формирования E вида (34), когда $L = 2,\ L' = 1$, а точечная конфигурация E^2 представляет собой гиперплоскость, т.е. формулы (28), (29), (34) приобретают вид:

$$E = E^1 \cap E^2 \ne \varnothing, \tag{39}$$

где $E^1 \subseteq S^{1,\min} = S_{r^{1,\min}}\left(a^{1,\min}\right)$, $\left|E^1\right| < \infty$, а для конфигурации E^2 верно:

$$\exists c_2 \in R^n,\ d_2 \in R^1:\ \left|c_2\right| = 1,\ E^2 = \left\{x \in R^n:\ c_2 x = d_2\right\}. \tag{40}$$

Таким образом, рассматривается FPC, образованная в сечении PSC E^1 плоскостью E^2 и которая, очевидно, является PSC.

В данном случае справедливы все вышеприведенные свойства конфигурации E как пересечения двух точечных конфигураций, одна из которых — PSC. Однако специфика конфигурации E^2 позволяет конкретизировать эти свойства следующим образом:

- поскольку $d_{E^2} = n-1$, формула (38) приобретает вид

$$d_E \le \min\left\{d_{E^1}, n-1\right\}, \tag{41}$$

в частности, если E^1 — полномерная FPC, то выполнено (9);

- учитывая несчетность E^2, формула (37) приобретает вид:

$$n_E \le \left|E^1\right|. \tag{42}$$

- H-представление многогранника P можно построить добавлением к H-представлению (31) многогранника P^1 уравнения плоскости E^2, в результате чего имеем:

$$P = \left\{ x \in R^n : \mathrm{c}_2 x = d_2,\ A^1 x = b^1,\ A'^1 x \le b'^1,\ A^1 \in R^{m^1 \times n},\ A'^1 \in R^{m''^1 \times n} \right\};$$

- в этом случае решение Задачи 3 выписывается в явном виде:

$$r^{\min} = \sqrt{\left(r^{1,\min}\right)^2 + c_2^T a^{1,\min} - d_2},\ a^{\min} = a^{1,\min} - c_2\left(c_2^T a^{1,\min} - d_2\right). \quad (43)$$

Замечание 1. Если для E^1 Задача 3 не решена, т.е. центр и радиус этой конфигурации неизвестны, но при этом известно некоторое решение r^1, a^1 Задачи 2, можно воспользоваться обобщением

$$r = \sqrt{r_1^2 + c_2^T a^1 - d_2},\ a = a^1 - c_2\left(c_2^T a^1 - d_2\right).$$

формулы (43) и решить на E в явном виде Задачу 2.

2.2.4. Пересечение PSC и гиперсферы. Пусть снова формируется конфигурация E вида (34) для $L = 2$, при этом $L' = 2,\ L'' = 1$, т.е. E^1 — PSC, а E^2 - гиперсфера. В этом случае итоговая FPC E будет не только полиэдрально-сферической, поскольку $E \subseteq S^{1,\min}$, $E \subseteq S^{2,\min}$, но будет лежать в плоскости пересечения гиперсфер $S^{1,\min}, S^{2,\min}$.

В самом деле, выпишем уравнения этих гиперсфер:

$$\left(x - a^{1,\min}\right)^2 = \left(r^{1,\min}\right)^2,\ \left(x - a^{2,\min}\right)^2 = \left(r^{2,\min}\right)^2$$

и вычтем одно из другого, в результате получаем уравнение гиперплоскости (далее FPC E^3):

$$2\left(a^{1,\min} - a^{2,\min}\right)^T x = r^{1,\min} - r^{2,\min} - \left(a^{1,\min}\right)^2 + \left(a^{1,\min}\right)^2.$$

Перепишем его в форме (40), «нормируя» это уравнение:

$$\frac{\left(a^{1,\min} - a^{2,\min}\right)^T x}{\left|a^{1,\min} - a^{2,\min}\right|} = \frac{r^{1,\min} - r^{2,\min} - \left(a^{1,\min}\right)^2 + \left(a^{1,\min}\right)^2}{2\left|a^{1,\min} - a^{2,\min}\right|}.$$

Теперь множество (39) представим в эквивалентной форме

$$E = E^1 \cap E^3 \ne \varnothing, \quad (44)$$

где E^1 — PSC, а E^3 — гиперплоскость $E^3 = \left\{ x \in R^n : c_3 x = d_3 \right\}$,

$$c_3 = \frac{a^{1,\min} - a^{2,\min}}{\left|a^{1,\min} - a^{2,\min}\right|},\ \mathrm{d}_3 = \frac{r^{1,\min} - r^{2,\min} - \left(a^{1,\min}\right)^2 + \left(a^{1,\min}\right)^2}{2\left|a^{1,\min} - a^{2,\min}\right|}. \quad (45)$$

Применив формулу (43) для этого случая, получаем, что решение Задачи 3 для E имеет вид:

$$r^{\min} = \sqrt{\left(r^{1,\min}\right)^2 + c_3^T a^{1,\min} - d_3}\,,\; a^{\min} = a^{1,\min} - c_3\left(c_3^T a^{1,\min} - d_3\right),$$

где c_3, d_3 заданы формулой (45).

Замечание 2. Аналогичные рассуждения справедливы и для случая, когда для E^l известно только решение r^l, a^l Задачи 2 ($l = 1,2$), тогда в пересечении этих двух конфигураций образуется PSC E, параметры которой определяются по формуле:

$$r = \sqrt{r_1^2 + c_3^T a^1 - d_3}\,,\; a = a^1 - c_3\left(c_3^T a^1 - d_3\right),$$

где $c_3 = \dfrac{a^1 - a^2}{\left|a^1 - a^2\right|}$, $\mathrm{d}_3 = \dfrac{r^1 - r^2 - \left(a^1\right)^2 + \left(a^1\right)^2}{2\left|a^1 - a^2\right|}$.

Что касается других свойств E, они будут подобны свойствам PSC (39)–(40). Так будут справедливы оценки (41) и (42) для ее размерности и мощности, формула (32) будет означать, что в пересечении PSC с гиперсферой образуется PSC размерности в точности на единицу меньше размерности исходной FPC.

Обобщая результаты данного пункта, можно сказать, что в непустом пересечении PSC с гиперсферами и плоскостями образуется одноточечное множество либо PSC меньшей размерности, центр и радиус которой могут быть найдены в явном виде последовательным включением в рассмотрение следующей FPC из семейства (35).

2.2.5. Объединение. Пусть E образуется в результате объединения FPCs вида (28), (29), (35), т.е.

$$E = \bigcup_{l=1}^{L} E^l\,. \tag{46}$$

Будем также полагать, что $E \supset E^l$, $l \in J_L$, и что описанные сферы минимального радиуса вокруг них различны, т.е.

$$\left[a^{i,\min}, r^{i,\min}\right] \neq \left[a^{j,\min}, r^{j,\min}\right],\; i,j \in J_L,\; i < j\,. \tag{47}$$

Понятно, что в результате объединения таких PSCs, как правило, будет образовываться FPC, не являющаяся PSC. С другой стороны, как было показано выше, возможно разложение PSC по параллельным плоскостям, результате чего осуществляется декомпозиция исходной конфигурации на PSCs меньшей размерности. Укажем условие, достаточное для того, чтоб в результате объединения PSCs снова образовывалась PSC. Итак, пусть все конфигурации (35) — PSCs, т.е. в представлении (28), (29) $L' = L'' = L$.

Теорема 4. Если существуют $c_l,\ d_l, t_l \in R^n,\ l \in J_L$, такие, что

$$c_i x \underset{E_i}{=} d_i t_i,\ i \in J_L; \qquad (48)$$

$$a^{i,\min} + c_i t_i = a^{i+1,\min} + c_{i+1} t_{i+1},\ i \in J_{L-1}; \qquad (49)$$

$$\left(c_i t_i\right)^2 + \left(r^{i,\min}\right)^2 = \left(c_{i+1} t_{i+1}\right)^2 + \left(r^{i+1,\min}\right)^2,\ i \in J_{L-1}. \qquad (50)$$

Тогда FPC (46) будет PSC, центр и радиус которой может быть найден по формуле:

$$a^{\min} = a^{1,\min} + c_1 t_1,\ r^{\min} = \sqrt{\left(c_1 t_1\right)^2 + \left(r^{1,\min}\right)^2}\ . \qquad (51)$$

В самом деле, условие (48) говорит о том, что размерность составляющих FPCs меньше размерности пространства, и задает плоскости, в которых они лежат. В этом случае каждая из составляющих конфигураций лежит на семействе гиперсфер с центрами на прямой, параллельной нормали к соответствующей плоскости (48), проведенной через центр этой конфигурации. Необходимым условием того, чтобы E была PSC является то, что все эти прямые имели общую точку O', что и представлено условием (49). Наконец, последнее условие (50) выражает требование, чтобы точки всех составляющих конфигураций были равноудалены от точки O'. Если это условие выполнено и точка O' определена однозначно, она является центром полученной PCS, параметры которой заданы формулой (51).

Также можно сказать, что

$$n_E \ge \max_{l \in J_L} \left|E^l\right|,\ d_E \ge \max_{l \in J_L} d_{E_l}\ . \qquad (52)$$

Если же выполнены условия теоремы 4, а также условие (47), то неравенства (52) будут выполняться строго, т.е. $n_E > \max_{l \in J_L} \left|E^l\right|$, $d_E > \max_{l \in J_L} d_{E_l}$.

2.2.6. Декартово произведение. Пусть n разбито на L слагаемых $n^1,\dots,n^L \in J_n$, $n = \sum_{l=1}^{L} n^l$, тогда условие (27) представимо в виде:

$$E^l \subset R^{n^l},\ n_l \le n - L + 1,\ l \in J_L, \qquad (53)$$

при этом среди точечных конфигураций (53) есть PSCs.

Пусть E представляет собой декартово произведение (прямое произведение, a direct product) конфигураций (53):

$$E = \underset{l=1}{\overset{L}{\otimes}} E^l , \quad (54)$$

т.е.

$$E = \{x = (x^1,...,x^L) \in R^n : x^l \in E^l , l \in J_L\} , \quad (55)$$

где $x = (x^1,...,x^L) = (x_{11},...,x_{n^1 1},...,x_{1L},...,x_{n^L L})^T$.

Исследуем, при каких условиях множество вида (54) будет PSC.

Мощность декартового произведения множеств — $n_E = \prod_{l=1}^{L} \left| E^l \right|$, откуда следует, что конечность точечных конфигураций (53) является необходимым условием того, чтобы конфигурация (54) была PSC.

Теорема 5. Множество вида (54) является PSC тогда и только тогда, когда множества (53) — PSCs.

Доказательство. *Необходимость*. Зафиксируем $l \in J_L$. Рассмотрим сферу $S_r(a)$, описанную вокруг E, и вместе с множеством E спроектируем ее на подпространство:

$$\{x \in R^n : x_i = 0, i \in \{1,...,n_0^{l-1} - 1, n_0^l + 1,...,n\}\} \text{, где } n_0^l = \sum_{i=1}^{l} n^l , \ l \in J_L ,$$

осуществив таким образом спуск в пространство R^{n^l}. В результате получим $n_l - 1$-сферу, уравнению которой удовлетворяют все точки E^l, откуда и следует сферическая расположенность E^l. В силу произвольности выбора l получаем, что все конфигурации вида (53) — PSCs.

Достаточность. Предположим, что конфигурации вида (53) — PSCs. Нетрудно заметить, что для каждого $l \in J_L$ уравнению

$$\left(x^l - a^l\right)^2 = r^{l2} , \quad (56)$$

будут удовлетворять не только все точки E^l, но и все точки E в представлении (55). Сложив все уравнения вида (56) по $l \in J_L$, получим $\sum_{l=1}^{L} (x^l - a^l)^2 = \sum_{l=1}^{L} r^{l2}$. Это уравнение гиперсферы, которой удовлетворяют все точки множества (55), а ее параметры:

$$a = \underset{l=1}{\overset{L}{\otimes}} a^l , \ r = (\sum_{l=1}^{L} r^{l2})^{1/2} . \quad (57)$$

При этом если конфигурации (53) заданы параметрами и $E^l = E^l \left(a^l, r^l\right)$, $l \in J_L$, то формула (57) задает параметры PSC. Если же PSRs (53) представлены в форме $E^l = \hat{E}^l\left(a^{\min,l}, r^{\min,l}\right)$, $l \in J_L$, то центр и радиус PSC, образованной в результате их декартова произведения, имеют вид $a^{\min} = \overset{L}{\underset{l=1}{\otimes}} a^{l,\min}$, $r^{\min} = \left(\sum_{l=1}^{L}\left(r^{l,\min}\right)^2\right)^{1/2}$. Также легко определить размерность полученной конфигурации (53):

$$d_E = \sum_{l=1}^{L} d_{E^l} \tag{58}$$

и записать критерий полномерности: FPC (53) полномерная тогда и только тогда, когда FPCs (53) — полномерные:

$$d_E = n \Leftrightarrow d_{E^l} = n_l,\ n_l = d_{E^l}\ \ d = \sum_{l=1}^{L} d_l . \tag{59}$$

Для многогранника P будет справедливо

$$P = \overset{L}{\underset{l=1}{\otimes}} P^l , \tag{60}$$

а его H-представление можно построить, переписав условие (31) в форме:

$$A^l x^l = b^l,\ A'^l x^l \le b'^l,\ A^l \in R^{m^l \times n^l},\ A'^l \in R^{m'^l \times n^l},\ l \in J_L . \tag{61}$$

Система (61) задает H-представление многогранника (60) при условии, что для его точек используется представление $P = \{x = (x^1,...,x^L) \in R^n : x^l \in P^l, l \in J_L\}$.

2.2.7. Прямая сумма. Пусть для множеств (27) выполнено условие (53), а также начало координат является точкой многогранников (30): $\forall\, l \in J_L\ \mathbf{0} \in P^l$, а E — прямая сумма множеств (27):

$$E = \overset{L}{\underset{l=1}{\oplus}} E^l . \tag{62}$$

т.е. $E = \overset{L}{\underset{l=1}{\cup}} E'^l$, $E'^l = \{x = (x^1,...,x^L) \in R^n : x^l \in E^l, x^{l'} = \mathbf{0} \in R^{n^l}, l' \ne l\}$, $l \in J_L$. Для размерности (62) справедлива формула (58), а условие полномерности задается условием (59). В отличие от декартового произведения, взятие прямой суммы PSCs не всегда приводит к образованию PSC. Имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. Множество вида (62) является PSC тогда и только тогда, когда множества (53) — PSCs, а также выполнено условие:

$$\left(r^{l,\min}\right)^2 - \left(a^{l,\min}\right)^2 = \left(r^{l+1,\min}\right)^2 - \left(a^{l+1,\min}\right)^2,\ l \in J_{L-1} .$$

Если условия теоремы 6 выполнены, множество (62) — PSC с центром в начале координат и радиуса $r = \sqrt{\left(r^{1,\min}\right)^2 - \left(a^{1,\min}\right)^2}$.

Если E — полномерная PSC, ее центр и радиус следующие:

$$\left[a^{\min}, r^{\min}\right] = \left[\mathbf{0}, \sqrt{\left(r^{1,\min}\right)^2 - \left(a^{1,\min}\right)^2}\right]. \quad (63)$$

В противном случае формула (63) задает некоторую пару (a, r).

Выводы. Полученные результаты находят приложения в решении широкого класса практических задач, моделирующийся в виде оптимизационных задач на PSCs, среди которых задачи теории расписаний, графовые модели, задачи балансировки, размещения, упаковки и многие другие задачи оптимального планирования и геометрического проектирования [1, 5, 6, 10, 17]. В частности, они применимы для усовершенствования и развития группы полиэдрально-сферических методов — точных и приближенных [9–11,16], а также в построении выпуклых продолжений с PSCs [16, 18], позволяющие уточнение известных на данный момент оценок.

Список использованной литературы:

1. Pardalos P.M. Handbook of combinatorial optimization / P.M. Pardalos, D-Z. Du, R.L. Graham. — New York : Springer, 2013. — 3409 p.
2. Korte B. Combinatorial Optimization: Theory and Algorithms / B. Korte, J. Vygen. — Heidelberg ; New York : Springer, 2012. — 660 p.
3. Papadimitriou C. H. Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity / C. H. Papadimitriou, K. Steiglitz. — Dover Publications Inc., 2013. — 528 p.
4. Grande F. On k-level matroids: geometry and combinatorics / F. Grande Doctor of Natural Sciences Dissertation. — Berlin : Institut für Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin, 2015. — 122 p.
5. Стоян Ю. Г. Математические модели и оптимизационные методы геометрического проектирования / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев. — К. : Наук. думка, 1986. — 268 с.
6. Стоян Ю. Г. Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації / Ю. Г. Стоян, О. О. Ємець. — К. : Ін-т системн. дослідж. освіти, 1993. — 188 с.
7. Стоян Ю. Г. Евклидовы комбинаторные конфигурации: монография / Ю. Г. Стоян, С. В. Яковлев, О. С. Пичугина. — Харьков : Константа, 2017. — 404 с.
8. Пичугина О. С. Непрерывные функциональные представления в задачах дискретной оптимизации : монография / О. С. Пичугина, С. В. Яковлев. — Харьков : Коллегиум, 2018. — 312 с.
9. Pichugina O. Optimization on Polyhedral-Spherical Sets: Theory and Applications / O. Pichugina, S. Yakovlev // In 2017 IEEE First Ukraine Conference on Electrical and Computer Engeneering (UKRCON). — 2017. — P. 1167–1175.

10. Stoyan Y. G. Quadratic optimization on combinatorial sets in R^n / Y. G. Stoyan, S. V. Yakovlev, O. V. Parshin // Cybernetics and Systems Analysis. — 1991. — Vol. 27(4). — P. 562–567.
11. Yakovlev S. V. Properties of Combinatorial Optimization Problems Over Polyhedral-Spherical Sets / S. V. Yakovlev, O. S. Pichugina // Cybernetics and Systems Analysis. — 2018. — Vol. 54 (1). — P. 99–109.
12. Пичугина О. С. Поверхностные и комбинаторные отсечения в задачах евклидовой комбинаторной оптимизации / О. С. Пичугина // Мат. та комп. модел. Сер. Фіз.-мат. науки. — 2016. — Вип. 13. — С. 144–160.
13. Пичугина О. С. Методы глобальной оптимизации на перестановочном многограннике в комбинаторных задачах на вершинно расположенных множествах / О. С. Пичугина, С. В. Яковлев // Мат. та комп. модел. Сер. Фіз.-мат. науки. — 2017. — Вип. 15. — С. 152–158.
14. Яковлев С. В. Задачи оптимизации на евклидовых комбинаторных конфигурациях и их свойства / С. В. Яковлев, О. С. Пичугина // Пит. прикл. матем. і матем. модел. — 2017. — Вип. 17. — С. 278–263.
15. Schneider P. Geometric Tools for Computer Graphics /. P. Schneider, D. H. Eberly. — Amsterdam: Morgan Kaufmann, 2002. — 1056 p.
16. Pichugina O. Convex extensions and continuous functional representations in optimization, with their applications / O. Pichugina, S. Yakovlev // J. Coupled Syst. Multiscale Dyn. — 2016. — Vol. 4 (2). — P. 129–152.
17. Yakovlev S. V. The Method of Artificial Space Dilation in Problems of Optimal Packing of Geometric Objects / S. V. Yakovlev // Cybernetics and Systems Analysis. — 2017. — Vol. 53 (5). — P. 825–832.
18. Pichugina O. S. Continuous Representations and Functional Extensions in Combinatorial Optimization / O. S. Pichugina, S. V. Yakovlev // Cybernetics and Systems Analysis. — 2016. — Vol. 52 (6). — P. 921–930.

POLYEDRAL-SPHERICAL CONFIGURATIONS: PECULARITIES AND APPLICATIONS

In the paper, finite point configurations inscribed into a hypersphere (polyhedral-spherical configurations, PSCs) are considered, and their algebraic topological and topological metric properties are studied.

The following problems are posed: detecting PCSs among finite point configurations; determining a center and radius of a circumsphere for a PSC; determining a center and a radius of a PSC, i.e., the parameters of the minimum radius circumsphere; a search for possible ways of reducing problems on PSCs, in particular, their decomposition into polyhedral-spherical sub-configurations. Three classes of PSCs — simplex, permutational, and two-level concerning coordinates — are singled out, their features are studied, and the posed problems are solved. Also, their connection with the basic sets of Euclidean combinatorial configurations of permutations and Boolean vectors is established.

Properties of general PSCs are investigated including determining the center and radius of PSCs formed as a result of set-theoretic operations over point configurations, among which PSCs are present. An important PSCs peculiarity

is their coincidence with a vertex set of their convex hull, i.e., they belong to a vertex-located class. Respectively, they are formed as an intersection of the hypersphere with their convex hull. This allows applying the convex extension theory for convexification of functions given on PSCs when optimizing them over the sets. This implies one can assume that both objective function and functional constraints in optimization problems are convex and smooth. This, in turn, opens up broad prospects for developing methods such as Branches and Bound based on: a) in branching — on special classes of PSCs structural features; b) in bounding — on estimates obtained as a result of solving convex polyhedral relaxation problems or spherical relaxation problems with convex objective functions and functional constraints.

In this paper, problems of PSCs decomposition into convex surfaces are discussed extensively, in particular, into families of embedded hyperspheres or parallel planes. With these problems, the problem of decomposition of PSCs into polyhedral-spherical sub-configurations is closely interconnected, which solution is also presented in this work.

The results are of own theoretical interest. Also, they can be incorporated into computational algorithms implemented polyhedral-spherical methods for optimization over PSCs.

Keywords: *finite point configuration, Euclidean combinatorial configuration, polyhedral-spherical set, vertex-located set, combinatorial optimization, polyhedron, hypersphere.*

Отримано: 16.05.2018