

work we have shown a method for studying T -periodic solutions to a boundary-value T -periodic problem for a more general differential equation in partial derivatives $\partial^2 u / \partial t^2 - a^2 \partial^2 u / \partial x^2 = f(x, t, u, u_x)$. The following simple assertion has been used: the function $K(x, t)$ defined by an integral with limits from $t - b$ to $t + b$ for each T -periodic in τ function $g(x, \tau)$, that is $g(x, \tau + T) = g(x, \tau)$, is also T -periodic in t . The found formula automatically satisfies the boundary and T -periodic conditions: $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, t + T) = u(x, t)$, $0 \leq x \leq \pi$, $t \in \mathbf{R}$. The obtained in this paper results can be used to study many classes of differential equations in partial derivatives of hyperbolic type.

Key words: *T-periodic solution, boundary-value T-periodic problem, operator, hyperbolic the second order equation.*

Отримано: 31.05.2018

УДК 534.1

О. Ю. Швець, д-р фіз.-мат. наук,

В. О. Сіренко, канд. техн. наук

Національний технічний університет України

«Київський політехнічний інститут ім. І. Сікорського», м. Київ

СИМЕТРИЧНІ СЦЕНАРІЇ ПЕРЕХОДУ ДО ДЕТЕРМІНОВАНОГО ХАОСУ В СИСТЕМАХ З ОБМЕЖЕНИМ ЗБУДЖЕННЯМ

Розглянуто п'ятивимірну детерміновану динамічну систему, яка використовується для опису динамічної поведінки маятникових систем, баків з рідиною, оболонки, тощо. Принциповою особливістю є неідеальність розглянутої динамічної системи за Зоммерфельдом-Кононенком. У таких динамічних системах завжди враховується взаємодія між деякою коливальною підсистемою та джерелом збудження коливань. Головна увага приділяється пошуку та опису нових сценаріїв переходу від регулярних режимів до хаотичних.

На підставі, розробленої методики для чисельного дослідження явищ детермінованого хаосу в динамічних системах проведений великий обсяг комп'ютерних обчислень з метою виявлення нових сценаріїв переходу до детермінованого хаосу. Був описаний сценарій переходу до хаосу, який починається як симетричний каскад біфуркацій подвоєння періоду граничних циклів та закінчується виникненням симетричного хаотичного атрактора через переміжність. Тобто виявлений сценарій поєднує у собі характерні особливості притаманні класичним сценаріям Фейгенбаума та Помо-Маннвілля. Також був описаний сценарій переходу до хаосу через переміжність у якому рух тра-

екторій по хаотичному аттрактору включає у себе не одну, як сценарії Помо-Маннвілля, а дві симетричні ламінарні фази. Причому відбуваються непередбачувані переходи між двома ламінарними фазами руху та турбулентною фазою. Проведений ретельний аналіз різноманітних характеристик регулярних та хаотичних аттракторів розглянутої динамічної системи (проекцій фазових портретів, часових реалізацій фазових змінних, розподілів природних інваріантних мір) на підставі якого було обгрунтоване існування виявлених симетричних сценаріїв.

Ключові слова: *неідеальна система, сценарій переходу до хаосу, хаотичний аттрактор.*

Вступ. При дослідженні детермінованого хаосу в динамічних системах важливим є вивчення сценаріїв переходів від регулярних режимів до хаотичних. Незважаючи на величезну кількість математичних моделей динамічних систем, найчастіше зустрічаються сценарії переходу до хаосу двох типів. До першого типу належить сценарій Фейгенбаума, при реалізації якого відбувається перехід до хаосу через нескінченний каскад біфуркацій подвоєння періодів граничних циклів [1, 2]. До другого типу належить сценарій переходу до хаосу через переміжність за Помо-Маневіллем [3, 4].

Останнім часом були описані сценарії переходів до хаосу, які представляють собою різні узагальнення сценаріїв Помо-Маннвілля [5–7], а також сценарії, яким притаманні як каскади біфуркацій подвоєння періодів, так і різні типи переміжності [8–10]. Однак багато питань, що стосуються сценаріїв переходів до хаосу, залишаються не з'ясованими.

Математична модель коливальної динамічної системи. Розглянемо циліндричний бак, частково заповнений рідиною, платформа якого збуджується деяким джерелом енергії обмеженої потужності. Математична модель такої системи може бути записана у вигляді наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dp_1}{d\tau} &= \alpha_1 p_1 - [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1)p_2; \\ \frac{dq_1}{d\tau} &= \alpha_1 q_1 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_1 + B(p_1 q_2 - p_2 q_1)q_2 + 1; \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= N_3 + N_1 \beta - \mu_1 q_1; \\ \frac{dp_2}{d\tau} &= \alpha_1 p_2 - [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]q_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1)p_1; \\ \frac{dq_2}{d\tau} &= \alpha_1 q_2 + [\beta + \frac{A}{2}(p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + q_2^2)]p_2 - B(p_1 q_2 - p_2 q_1)q_1, \end{aligned} \quad (1)$$

де фазові змінні p_1, q_1, p_2, q_2 — амплітуди коливань вільної поверхні рідини по першій та другій доміантним модам, фазова змінна β описує функціонування джерела збудження коливань, τ — час, $A, B, N_1, N_3, \alpha, \mu_1$ — деякі параметри. Система (1) вперше отримана у роботах [11, 12] у яких детально описаний фізичний зміст фазових координат та параметрів. Ця система належить до класу неідеальних за Зоммерфельдом-Кононеньком динамічних систем [13]. У системах такого типу принципово враховується нелінійний взаємозв'язок між коливальною підсистемою та джерелом збудження коливань [13]. Зауважимо, що нехтування таким взаємозв'язком може призвести до грубих помилок у описі динамічної поведінки системи. Зокрема, може бути втрачена інформація про реально існуючі усталені хаотичні режими коливань [11, 12].

У великій оглядовій монографії [14] висвітлено, що система рівнянь (1) також використовується для моделювання коливань тонкостінних оболонок, для вивчення різноманітних маятникових систем з віброуючою точкою опори, для моделювання серцево-судинної системи і ряду інших актуальних задач сучасної нелінійної динаміки. В залежності від розглянутої прикладної задачі фазові змінні та параметри мають різний фізичний або геометричний сенс.

Дослідження сценаріїв переходу до хаосу. Метою роботи є опис нових сценаріїв переходу до детермінованого хаосу, які володіють властивостями симетрії та узагальнюють класичні сценарії Фейгенбаума та Помо-Маневілля.

Так як система рівнянь є нелінійною, то в загальному випадку, детальне та всебічне дослідження її динаміки може бути проведено тільки з використанням різних чисельних та комп'ютерних методів. Методика проведення таких досліджень розроблена та описана в [5, 6, 9, 15–17].

Нехай параметри системи приймають наступні значення: $A = 1, 12$; $B = -1, 531$; $N_1 = -1$; $\alpha = -0, 3$; $\mu_1 = 0, 5$. Проаналізуємо сценарії переходів до хаосу при зміні параметра N_3 . При кожному значенні параметра з проміжку $-0, 65269 < N_3 < -0, 6369$ у системі одночасно існують два одноклітних стійких граничних циклів. Проекції фазових портретів таких граничних циклів, побудовані при $N_3 = -0, 64$ зображені на рис. 1 (а)–(б). При збільшенні параметра $N_3 = -0, 6368$ відбувається подвоєння періодів існуючих симетричних граничних циклів з рис. 1 (а)–(б). Проекції фазових портретів циклів подвоєних періодів зображені на рис. 1 (в)–(г).

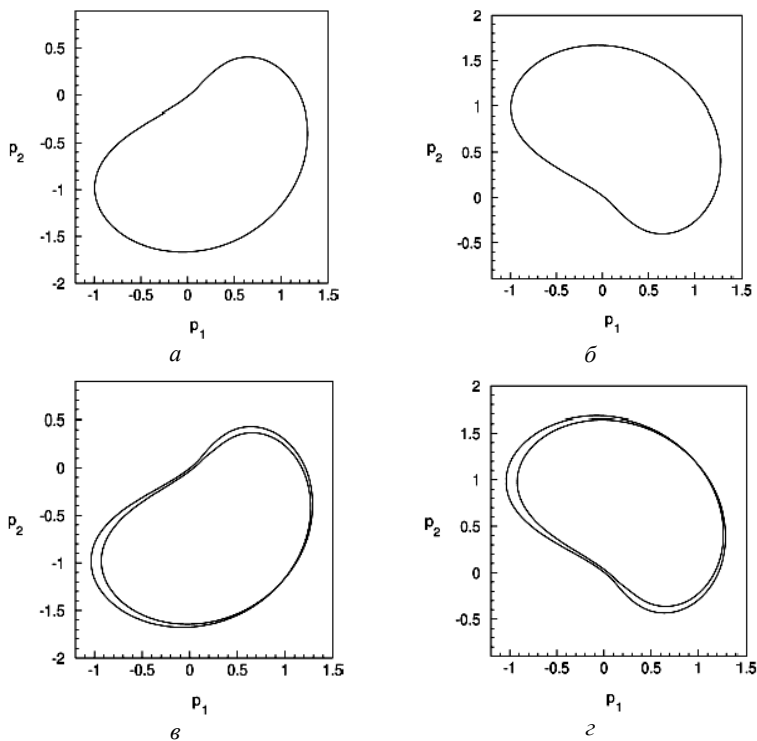


Рис. 1. Проекції фазових портретів граничних циклів при $N_3 = -0,64$ (а)–(б), $N_3 = -0,6368$ (в)–(г)

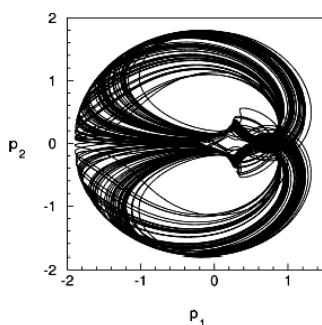


Рис. 2. Проекція фазового портрету хаотичного аттрактора при $N_3 = -0,6295$

Подальше збільшення значення параметра N_3 призводить до виникнення симетричних циклів учетвереного періоду і т.д. Такий нескінченний процес подвоєння періодів кожного з існуючих граничних циклів закінчується виникненням хаотичного аттрактора при $N_3 = -0,6295$

(рис. 2). Виниклий хаотичний атрактор має складну структуру фазового портрета, його проекція складається із двох симетричних щодо горизонтальної осі частин.

Амплітуди часових реалізацій даного хаотичного атрактора більш ніж у два рази перевищують амплітуди часових реалізацій граничних циклів каскаду біфуркацій подвоєння. Рух типової траєкторії по хаотичному атрактору можна умовно розбити на дві фази. У першій із цих фаз траєкторія робить хаотичні блукання вздовж витків верхньої (нижньої) частини атрактора. У непередбачений момент часу траєкторія переходить із верхньої (нижньої) частини атрактора в його нижню (верхню) частину й починає робити хаотичні блукання уздовж витків нижньої (верхньої) частини. Потім, у непередбачений момент часу, знову відбувається перехід траєкторії з нижньої (верхньої) частини атрактора в його верхню (нижню) частину. Такий процес повторюється нескінченно число разів. Таким чином перехід до хаосу має особливості характерні як для сценарію Фейгенбаума (нескінченний каскад біфуркацій подвоєння симетричних граничних циклів), так і для переміжності (непередбачувана переміжність між верхньою та нижньою частинами виниклого хаотичного атрактора).

Розглянемо ще один тип переходу до хаосу. При кожному значенні параметру $-1,2105 < N_3 < -1,1829$ в системі існують, симетричні відносно горизонтальної осі, граничні цикли (рис. 3 (а)–(б)). Зміна параметра N_3 , яка супроводжується виходом його значення, як через ліву, так і через праву границі інтервалу $-1,2105 < N_3 < -1,1829$ призводить до зникнення обох граничних циклів і виникнення хаотичного атрактора. Проекція фазового портрета хаотичного атрактора такого типу зображена на рис. 3 (в).

На рис. 3 (г) наведений розподіл інваріантної міри для фазового портрета хаотичного атрактора при $N_3 = -1,182$. Отриманий розподіл проясняє механізм виникнення даного хаотичного атрактора. Контури чітко прорисованої області на рис. 3 (г) за своєю формою нагадують два «склеєних», симетричних граничних цикла. Виникнення хаосу має багато характерних для переміжності особливостей. Однак у цьому випадку рух траєкторії по атрактору включає три фази, дві ламінарні й турбулентну. У першій ламінарній фазі траєкторія здійснює квазіперіодичні рухи в малому околі одного з «склеєних», циклів, або «верхнього», або «нижнього». У непередбачений момент часу відбувається турбулентний сплеск і траєкторія виходить у віддалені, від околу зниклого циклу, області фазового простору. Такій турбулентній фазі руху відповідають більш світлі ділянки розподілу інваріантної міри на рис. 3 (г). Потім траєкторія знову робить квазіперіодичні рухи в малому околі одного зі зниклих граничних циклів. Причому, після завершення турбулентної фази, траєкторія може як повернутися в першу ламінарну

фазу руху, так і перейти в другу ламінарну фазу, який відповідають квазіперіодичні рухи в малому околі другого зі зниклих граничних циклів. Такий процес руху траєкторії по атрактору типу «одна з ламінарних фаз — турбулентна фаза — одна з ламінарних фаз», повторюється нескінченну кількість разів. Причому, непередбаченими є як моменти часу «зриву», траєкторії в турбулентну фазу, так і «переключення», між двома ламінарними фазами. Таким чином перехід до хаосу нагадує класичний сценарій Помо-Манневілья. Однак, на відміну від класичного сценарію, ми маємо не одну, а дві ламінарні фази.

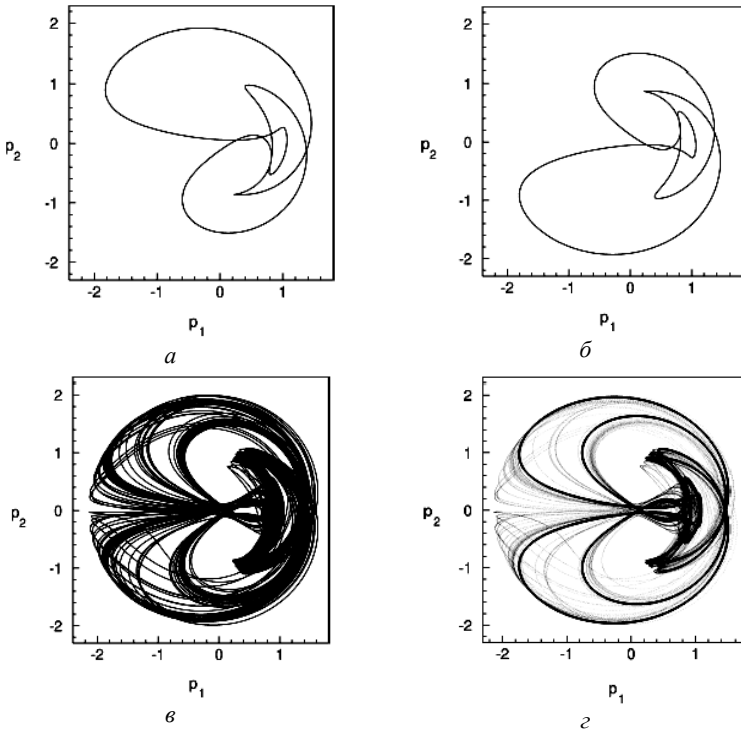


Рис. 3. Проекції фазових портретів граничних циклів при $N_3 = -1,183$ (а)–(б); проекції фазового портрета й розподілу інваріантної міри хаотичного атрактора при $N_3 = -1,182$ (в)–(г)

Зауважимо, що у проведених чисельних дослідженнях вдалося виявити й описати подібні симетричні сценарії переходу не тільки до хаотичних, а також і до гіперхаотичних атракторів. Гіперхаотичний атрактор відрізняється від хаотичного наявністю у спектрі ляпуновських хаотичних показників щонайменше двох додатних показників, у той час як хаотичний атрактор має лише один додатний ляпуновський показник. Але не дивлячись на появу у гіперхаотичних атракто-

рів системи додаткового напрямку розбігання близьких фазових траєкторій описані вище симетричні сценарії переходу до хаосу залишаються незмінними й при переходах до гіперхаосу.

Висновки. Таким чином у роботі вдалося виявити та описати два нових сценарії переходу від регулярних усталених режимів до хаотичних. Описаним сценаріям притаманна явно виражена симетрія біфуркацій фазових портретів. В першому з цих сценаріїв спостерігається симетричне поєднання каскаду біфуркацій подвоєння періоду та переміжності. У другому описаних сценаріїв спостерігається нетиповий для класичної переміжності перехід до хаосу не з одною, а з двома ламінарними фазами. Такі сценарії являють собою узагальнені класичних сценаріїв Фейгенбаума та Помо-Маневілія.

Список використаних джерел:

1. Feigenbaum M. J. Quantative universality for a class of nonlinear transformations / M. J. Feigenbaum // *J. Stat. Phys.* — 1978 — Vol. 19, № 1. — P. 25–52.
2. Feigenbaum M. J. The universal metric properties of nonlinear transformations / M. J. Feigenbaum // *J. Stat. Phys.* — 1979. — Vol. 21, № 6. — P. 669–706.
3. Manneville P. Different ways to turbulence in dissipative dynamical systems / P. Manneville, Y. Pomeau // *Physica D.: Nonlinear Phenomena.* — 1980. — Vol. 1, № 2. — P. 219–226.
4. Pomeau Y. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems / Y. Pomeau, P. Manneville // *Comm. Math. Phys.* — 1980. — Vol. 74, № 2. — P. 189–197.
5. Krasnopolskaya T. S. Dynamical chaos for a limited power supply for fluid oscillations in cylindrical tanks / T. S. Krasnopolskaya, A. Yu. Shvets // *Journal of Sound and Vibration.* — 2009. — Vol. 322 (3). — P. 532–553.
6. Швець А. Ю. Особенности перехода к детерминированному хаосу в неидеальной гидродинамической системе «бак с жидкостью-электродвигатель» / А. Ю. Швець, В. А. Сиренко // *Динамические системы.* — 2011. — Вып. 1 (29). — С. 113–131.
7. Shvets A. Yu. Peculiarities of transition to chaos in nonideal hydrodynamics systems / A. Yu. Shvets, V. O. Sirenko // *Chaotic Modeling and Simulation.* — 2012. — Vol. 2. — P. 303–310.
8. Швець О. Ю. Різноманітність динамічних режимів неідеальних гідродинамічних систем при обмеженому збудженні / О. Ю. Швець, В. О. Сіренко // *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія 1.* — 2010 — Вип. 3. — С. 200–212.
9. Швець А. Ю. Единство и разнообразие сценариев перехода к хаосу при колебаниях жидкости в цилиндрических баках / А. Ю. Швець, В. А. Сиренко // *Збірник праць Інституту математики НАН України «Математичні проблеми механіки та обчислювальної математики».* — 2014. — Вип. 11 (4). — С. 386–398.
10. Shvets A. Yu. Complicated Scenarios of Transitions to Deterministic Chaos in Non-Ideal Dynamic Systems / A. Yu. Shvets, V. Sirenko // *Nonlinear Dynamics-2016 (ND-KhPI2016) : proceedings of 5th International Conference, September 27–30, 2016.* — Kharkov : NTU «KhPI», 2016. — P. 222–229.

11. Krasnopolskaya T. S. Regular and chaotic surface waves in a liquid in a cylindrical tank / T. S. Krasnopolskaya, A. Yu. Shvets // Soviet Applied Mechanics. — 1990. — Vol. 26 (8). — P. 787–794.
12. Krasnopolskaya T. S. Chaotic surface waves in limited power-supply cylindrical tank vibrations / T. S. Krasnopolskaya, A. Yu. Shvets // J. of Fluids & Structures. — 1994. — Vol. 8 (1). — P. 1–18.
13. Кононенко В. О. Колебательные системы с ограниченным возбуждением / В. О. Кононенко. — М. : Наука, 1964. — 254 с.
14. Ibrahim R. A. Liquid Sloshing Dynamics: Theory and Applications / R. A. Ibrahim. — Cambridge University Press, 2005. — 970 p.
15. Анищенко В. С. Сложные колебания в простых системах / В. С. Анищенко. — М. : Наука, 2006. — 312 с.
16. Кузнецов С. П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов. — М. : Физматлит, 2006. — 356 с.
17. Shvets A. Yu. Deterministic chaos of a spherical pendulum under limited excitation / A. Yu. Shvets // Ukrainian Mathematical Journal. — 2007. — Vol. 59 (4). — P. 602–614.

SYMMETRIC SCENARIOS OF TRANSITION TO DETERMINISTIC CHAOS IN SYSTEMS WITH LIMITED EXCITATION

A five-dimensional deterministic dynamic system, which is used to describe the dynamic behavior of the pendulum systems, shells, tanks with liquid, etc is considered. The principal feature is the non-ideality of this dynamic system in Sommerfeld-Kononenko sense. In such dynamic systems, the interaction between the oscillation subsystem and the source of oscillation excitation is always taken into account. The main attention is on finding and describing new scenarios of transitions from regular regimes to chaotic ones.

Based on the developed numerical technics for the study of phenomena of deterministic chaos in dynamic systems a large complex of computer calculations for describing new scenarios of transition to chaos was carry out. Was described the scenario of transition to chaos, which begins as a symmetrical cascade of bifurcations of period-doubling of limit cycles and ends with the appearance symmetric chaotic attractor through the intermittency. That is, the revealed scenario combines the characteristic features inherent in the classic scenarios of Feigenbaum and Pomeau–Manneville. In addition has been described a scenario of transition to chaos through intermittency in which movement of trajectories in a chaotic attractor includes not one laminar phase, as in the scenario Pomeau-Manneville, but two symmetrical laminar phases. Moreover, there are unpredictable transitions between two laminar phases of motion and a turbulent phase. A thorough analysis of various characteristics of regular and chaotic attractors of the considered dynamic system (projections of phase portraits, time realizations of phase variables, distribution of natural invariant measures) was carried out on the basis of which the existence of detected symmetric scenarios was substantiated.

Key words: *nonideal system, scenario of transition to chaos, chaotic attractor.*

Отримано: 18.05.2018