each iteration. The efficiency of the developed method was illustrated by a computational experiment in a unit square for the case of the exponential dependence of the power of thermal sources on temperature. The results of the experiment are presented in the form of graphical (contour lines and the surface of an approximate solution) and numerical (values of an approximate solution at some points in the area) information.

Key words: *nonlinear heat conductivity, positive solution, Green-Rvachev's quasi-function, two-sided iterative method, equation with heterotone operator.*

Отримано: 14.11.2018

УДК 517.944
DOI: 10.32626/2308-5878.2018-18.161-172

Н. Г. Хома*, канд. фіз.-мат. наук,
С. Г. Хома–Могильська*, канд. фіз.-мат. наук,
Л. Г. Хохлова,** канд. фіз.-мат. наук

*Тернопільський національний економічний університет, м. Тернопіль,
** Тернопільський національний педагогічний університет імені Володимира Гнатюка, м. Тернопіль

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВНИХ ПРОЦЕСІВ У СМУЗІ

Крайові періодичні задачі для диференціальних рівнянь у частинних похідних, зокрема гіперболічних рівнянь, є складним та неоднозначним об'єктом дослідження. Крайові задачі з даними на всій границі області, а також задачі з нелокальними (в тому числі інтегральними) умовами для гіперболічних рівнянь в обмежених областях є, взагалі кажучи, умовно коректними. Деякі автори пов'язують розв'язність таких задач із проблемою малих знаменників та використовують при розв'язанні методи нелінійного функціонального аналізу, теорії неявних функцій, варіаційні методи. Інші ж при дослідженні крайових періодичних задач для гіперболічних рівнянь другого порядку використовують аналітичні методи та у своїх роботах будують інтегральні оператори і розв'язок шукають у спеціально визначених просторах неперервно диференційованих функцій для конкретних випадків періодичності.

У даній роботі знайдено аналітичну формулу функції $v(x, t)$, яка є розв'язком крайової 2π-періодичної за часовою змінною задачі у класі непарних функцій, для яких виконується умова $f(t) = -f(\pi - t)$. Встановлені властивості даної функції та наведені оцінки розв'язку крайової 2π-періодичної за часовою змінною задачі.

Результати дослідження використовуються для математичного моделювання коливних процесів, що описуються гіперболічними рівняннями другого порядку.

На основі знайденої функції можна робити висновки про поведінку розв'язку незбуреного рівняння ($\varepsilon = 0$, ε — малий параметр) при дослідженні загального нелінійного гіперболічного рівняння другого порядку асимптотичними методами.

Ключові слова: *незбурене рівняння, крайова періодична задача, гіперболічне рівняння другого порядку, класичний розв'язок, клас функцій, малий параметр.*

Вступ. Щоб дослідити асимптотичними методами Крилова-Боголюбова-Митропольського-Мосеєнкова [1, 2] таку крайову 2π-періодичну задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t) + \varepsilon F(x, t, u, u_t, u_x)\ ; \quad 0 < x < \pi,\ t \in R, \tag{1}$$

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0,\ t \in R, \tag{2}$$

$$u(x, t + 2\pi) = u(x, t) = 0, \quad 0 \le x \le \pi,\ t \in R. \tag{3}$$

де ε — малий параметр, потрібно знати поведінку розв'язку такої незбуреної задачі

$$u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = f(t), \quad 0 < x < \pi, \quad t \in R, \tag{4}$$

$$u^0(0, t) = u^0(\pi, t) = 0,\ t \in R, \tag{5}$$

$$u^0(x, t + 2\pi) = u^0(x, t) = 0,\ 0 \le x \le \pi, t \in R. \tag{6}$$

Дослідженню задачі (4)–(6) присвячена дана робота, при цьому використані такі умовні позначення: C_R^0 — простір функцій однієї змінної *t*, неперервних і обмежених на всій числовій осі R. C_π — простір функцій двох змінних *x* і *t*, неперервних і обмежених на множині $[0, \pi] \times R$. G_{Rt}^0 — простір функцій однієї змінної *t*, неперервних і обмежених на R разом із похідною по *t*. $G_{\pi t}$ — простір функцій $g(x, t)$ двох змінних *x* і *t*, неперервних і обмежених на $[0, \pi] \times R$ разом із похідною по *t*. $C_\pi^{k,l}$ — простір функцій $g(x, t) \in C_\pi$ таких, що $D_t^k D_x^l\ g \in C_\pi$. $L(X, Y)$ — простір лінійних і обмежених відображень *X* в *Y*. $Q_{2\pi}^0$ — простір функцій $f(t)$, які задовольняють на R співвідношення $f(t + 2\pi) = f(t)$.

$$B_{23}^- = \{ f : f(t) = -f(\pi - t) = -f(-t) \}.$$

R — множина дійсних чисел.

Основні результати. Розглянемо таку функцію

$$v(x,t)=\left(\overline{S}\,f\right)(x,t)\equiv-\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}f(\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_x^{\pi}d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}f(\tau)d\tau\,. \quad (7)$$

Доведемо, що при $f\in G_{Rt}^{0}\cap B_{23}^{-}$ функція $v(x,t)=\left(\overline{S}\,f\right)(x,t)$ є класичним розв'язком задачі (4)–(6).

Спочатку доведемо таке твердження:

Лема 1. Якщо $f\in B_{23}^{-}$, то $f(t)$ є 2π-періодичною по t, тобто $f\in Q_{2\pi}^{0}$.

Доведення. Справді,

$$f(t+2\pi)=f(t+\pi+\pi)=f(\pi-(-t-\pi))=-f(-\pi-t)=$$
$$=f(\pi+t)=f(\pi-(-t))=-f(-t)=f(t)\,,$$

що й потрібно було довести.

Таким чином, ми показали, що якщо $f\in B_{23}^{-}$, то $f(t)$ є 2π-періодичною по *t*.

Основна теорема. Якщо $f\in G_{Rt}^{0}\cap B_{23}^{-}$, то функція

$$v(x,t)=\left(\overline{S}\,f\right)(x,t)\,,$$

визначена формулою (7), є класичним розв'язком задачі (4)–(6). Крім цього

$$\overline{S}\in L\left(C_R^0\cap B_{23}^{-},\ C_{\pi}^{1,1}\cap B_{23}^{-}\right);$$
$$\overline{S}\in L\left(G_{Rt}\cap B_{23}^{-},\ C_{\pi}^{2,2}\cap B_{23}^{-}\right),$$

при цьому

$$\left\|\left(\overline{S}\,f\right)(x,t)\right\|_{C_\pi}\le\frac{\pi^2}{4}\left\|f(t)\right\|_R\,;$$
$$\left\|\left(\overline{S}\,f\right)'_x(x,t)\right\|_{C_\pi}\le\frac{\pi}{2}\left\|f(t)\right\|_R\,;$$
$$\left\|\left(\overline{S}\,f\right)'_t(x,t)\right\|_{C_\pi}\le\frac{\pi}{2}\left\|f(t)\right\|_R\,.$$

Доведення. Спочатку покажемо виконання умови

$$v(x,t+2\pi)=v(x,t) \quad (8)$$

Враховуючи означення (7) функції $v(x,t)$, маємо

$$v(x,t+2\pi) = -\frac{1}{4}\int_{0}^{x} d\xi \int_{t+2\pi-x+\xi}^{t+2\pi+x-\xi} f(\tau)d\tau - \frac{1}{4}\int_{x}^{\pi} d\xi \int_{t+2\pi+x-\xi}^{t+2\pi-x+\xi} f(\tau)d\tau . \quad (9)$$

У внутрішніх інтегралах проведемо заміну змінної $\tau = 2\pi + \theta$, $d\tau = d\theta$, $t - x + \xi \le \theta \le t + x - \xi$ для першого внутрішнього інтеграла, а $t + x - \xi \le \theta \le t - x + \xi$ для другого внутрішнього інтеграла.

З формули (9) знаходимо

$$v(x,t+2\pi) = -\frac{1}{4}\int_{0}^{x} d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(2\pi+\theta)\, d\theta - \frac{1}{4}\int_{x}^{\pi} d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(2\pi+\theta)\, d\theta .$$

Використовуючи умову теореми, що $f \in B_{23}^{-}$ на основі твердження леми 1, маємо з останньої рівності

$$v(x,t+2\pi) = v(x,t) ,$$

тобто розв'язок $v(x,t)$ задовольняє умову періодичності (6).

Тепер доведемо виконання крайових умов

$$v(0, t) = v(\pi, t) = 0.$$

Із формули (7) знайдемо

$$v(0,t) = -\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi} d\xi \int_{t-\xi}^{t+\xi} f(\tau)d\tau ,$$

та обчислимо похідну $v'(0,t)$, яка має вигляд

$$\begin{gathered} v'(0,t) = -\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}\big(f(t+\xi) - f(t-\xi)\big) d\xi \equiv \\ \equiv -\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi} f(t+\xi)d\xi + \frac{1}{4}\int_{0}^{\pi} f(t-\xi)d\xi \end{gathered} . \quad (10)$$

У другому інтегралі проведемо заміну змінної $\xi = \pi - \theta$, $d\xi = -d\theta$, $\pi \le \theta \le 0$. Тоді з формули (10) маємо

$$v'(0,t) = -\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi} f(t+\xi)d\xi - \frac{1}{4}\int_{\pi}^{0} f(t-(\pi-\theta))\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi} f(t+\xi)\, d\xi + \frac{1}{4}\int_{\pi}^{0} f(-t+\pi-\theta)\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi} f(t+\xi)\, d\xi + \frac{1}{4}\int_{\pi}^{0} f(\pi-(t+\theta))\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} f(t+\xi)\, d\xi - \frac{1}{4}\int_{\pi}^{0} f(t+\theta)\, d\theta =$$

$$= -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} f(t+\xi)\, d\xi + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} f(t+\theta)\, d\theta \equiv 0,\ \ \forall\, t \in R\,.$$

Звідси випливає, що $v(0, t) \equiv C = \text{const}$. Оскільки за умови непарності функції $f(t)$ маємо $v(0, 0) = 0$, то це означає, що виконується умова

$$v(0,t) = 0,\ \forall t \in R\,. \tag{11}$$

Розглянемо тепер значення функції $v(\pi, t)$. З формули (7) випливає, що

$$v(\pi,t) = -\frac{1}{4}\int_0^{\pi} d\xi \int_{t-\pi+\xi}^{t+\pi-\xi} f(\tau)d\tau\,. \tag{12}$$

Аналогічно попередньому доведенню для функції $v(0,t)$ з формули (12) одержуємо, що

$$v(\pi,t) = 0,\ \forall t \in R\,. \tag{13}$$

Отже, функція $v(x,t) = \left(\bar{S} f\right)(x,t)$ задовольняє крайові умови (5) задачі (4)–(6).

Тепер покажемо, що функція $v(x,t) = \left(\bar{S} f\right)(x,t)$ є класичним розв'язком рівняння (4).

Обчислимо перші та другі частинні похідні від функції $v(x, t)$ по x та t, яка визначена формулою (7). Одержимо рівності

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{4}\int_0^{x}\left(f(t+x-\xi) + f(t-x+\xi)\right)d\xi -$$

$$-\frac{1}{4}\int_x^{\pi}\left(-f(t-x+\xi) - f(t+x-\xi)\right)d\xi\,;$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{4}\int_0^{x}\left(\frac{\partial f\left(\alpha(x,t,\xi)\right)}{\partial\alpha}\cdot 1 + \frac{\partial\, f\left(\beta(x,t,\xi)\right)}{\partial\beta}\cdot(-1)\right)d\xi - \frac{1}{2}f(t) -$$

$$-\frac{1}{4}\int_x^{\pi}\left(-\frac{\partial f\left(\beta(x,t,\xi)\right)}{\partial\beta} - \frac{\partial\, f\left(\alpha(x,t,\xi)\right)}{\partial\alpha}\right)d\xi - \frac{1}{2}f(t) \equiv$$

$$\equiv -\frac{1}{4}\int_0^{x}\left(\frac{\partial f\left(\alpha(x,t,\xi)\right)}{\partial\alpha} - \frac{\partial\, f\left(\beta(x,t,\xi)\right)}{\partial\beta}\right)d\xi -$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{x}^{\pi}\left(\frac{\partial f\left(\beta(x,t,\xi)\right)}{\partial\beta}-\frac{\partial f\left(\alpha(x,t,\xi)\right)}{\partial\alpha}\right)d\xi - f(t);$$

де $\alpha(x,t,\xi)=t+x-\xi$, $\beta(x,t,\xi)=t-x+\xi$.

$$\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}=-\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{x}\left(f(t+x-\xi)-f(t-x+\xi)\right)d\xi-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{x}^{\pi}\left(f(t-x+\xi)-f(t+x-\xi)\right)d\xi;$$

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}=-\frac{1}{4}\int\limits_{0}^{x}\left(\frac{\partial f\left(\alpha(x,t,\xi)\right)}{\partial\alpha}-\frac{\partial f\left(\beta(x,t,\xi)\right)}{\partial\beta}\right)d\xi-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_{x}^{\pi}\left(\frac{\partial f\left(\beta(x,t,\xi)\right)}{\partial\beta}-\frac{\partial f\left(\alpha(x,t,\xi)\right)}{\partial\alpha}\right)d\xi,$$

де $\alpha(x,t,\xi)=t+x-\xi$, $\beta(x,t,\xi)=t-x+\xi$.

Отже,

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2}=f(t),$$

що й потрібно було довести. А це означає, що функція $v(x,t)=$ $=\left(\overline{S}f\right)(x,t)$ є класичним розв'язком рівняння (4).

Основна теорема буде доведена повністю, якщо ми одержимо оцінки розв'язку та його похідних.

Запишемо формулу (7) так:

$$v(x,t)=\left(\overline{S}f\right)(x,t)\equiv\int\limits_{0}^{\pi}Q(\xi)\,d\xi\int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}f(\tau)d\tau, \qquad (14)$$

де

$$Q(\xi)=\begin{cases}-\dfrac{1}{4}, & 0\le\xi\le x\\ \dfrac{1}{4}, & x\le\xi\le\pi.\end{cases} \qquad (15)$$

Введемо норму функцій $\left(\overline{S}f\right)(x,t)$ та $f(t)$ таким чином:

$$\left\|\left(\overline{S}f\right)(x,t)\right\|_C=\sup_{(x,t)\in[0,\pi]\times R}\left|\left(\overline{S}f\right)(x,t)\right|,\ \left\|f(t)\right\|_R=\sup_{t\in R}\left|f(t)\right|.$$

На основі записів (14) та (15) знаходимо, що

$$\left|\left(\bar{S}f\right)(x,t)\right| \le \frac{1}{2}\|f(t)\|_R \int_0^{\pi} |x-\xi|\, d\xi =$$
$$= \frac{1}{2}\|f(t)\|_R \left(\int_0^x (x-\xi)\, d\xi - \int_x^{\pi} (x-\xi)\, d\xi \right) = \frac{1}{2}\|f(t)\|_R \left(\frac{x^2}{2} + \frac{(\pi - x)^2}{2} \right). \tag{16}$$

Дослідимо функцію $p(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{(\pi - x)^2}{2}$ на *max* на $[0, \pi]$. Маємо $p'(x) = x - \pi + x$ або $p'(x) = 2x - \pi$. Прирівнявши її до нуля, одержуємо

$$p'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x - \pi = 0 .$$

Отже, коренем цього рівняння є точка екстремуму $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$. Тепер знайдемо значення функції $p(x)$ у точках відрізка $[0, \pi]$, тобто $p(0), p(\pi)$, а також $p\,(\dfrac{\pi}{2})$. Маємо

$$p\,(0) = \frac{\pi^2}{2}; \quad p\,(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{4}; \quad p(\pi) = \frac{\pi^2}{2} .$$

Значить,

$$\max_{[0,\pi]} p(x) = p(0) = p(\pi) = \frac{\pi^2}{2} . \tag{17}$$

Враховуючи (16) та (17), одержуємо оцінку розв'язку

$$\left\|\left(\bar{S}f\right)(x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi^2}{4}\|f(t)\|_R . \tag{18}$$

Запишемо частинні похідні від розв'язку $v(x,t) = \left(\bar{S}f\right)(x,t)$ таким чином:

$$\left(\bar{S}f\right)'_x (x,t) \equiv \int_0^{\pi} Q(\xi) \left(f(t+x-\xi) + f(t-x+\xi) \right) d\xi ; \tag{19}$$

$$\left(\bar{S}f\right)'_t (x,t) \equiv \int_0^{\pi} Q(\xi) \left(f(t+x-\xi) - f(t-x+\xi) \right) d\xi . \tag{20}$$

Враховуючи (19) та (20), знаходимо

$$\left\|\left(\bar{S}f\right)'_x (x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\|f(t)\|_{\mathbf{R}} ; \tag{21}$$

$$\left\|\left(\bar{S}f\right)'_t (x,t)\right\|_{C_\pi} \le \frac{\pi}{2}\|f(t)\|_{\mathbf{R}} . \tag{22}$$

Таким чином, нами доведено всі твердження і оцінки основної теореми. Основну теорему доведено.

Зауваження 1. Тепер, використовуючи основну теорему, можна досліджувати крайову 2π-періодичну задачу (4)–(6) за допомогою аналітичного розв'язку (7).

Зазначимо основні властивості функції $v(x,t)=\left(\overline{S}f\right)(x,t)$, визначеної формулою (7).

1^0. $\left(\overline{S}f\right)(\pi-x,t)=\left(\overline{S}f\right)(x,t)$

$$\left(\overline{S}f\right)(\pi-x,t)=-\frac{1}{4}\int_0^{\pi-x}d\xi\int_{t-\pi+x+\xi}^{t+\pi-x-\xi}f(\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_{\pi-x}^{\pi}d\xi\int_{t+\pi-x-\xi}^{t-\pi+x+\xi}f(\tau)d\tau=$$

1. Заміна $\xi=\pi-\eta$, $d\xi=-d\eta$, $\pi\le\theta\le x$, для першого інтеграла.
2. Заміна $\xi=\pi-\eta$, $d\xi=-d\eta$, $x\le\theta\le 0$, для другого інтеграла.

$$=\frac{1}{4}\int_\pi^x d\eta\int_{t+x-\eta}^{t-x+\eta}f(\tau)d\tau+\frac{1}{4}\int_x^0 d\eta\int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}f(\tau)d\tau=$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^x d\eta\int_{t-x+\eta}^{t+x-\eta}f(\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_x^\pi d\eta\int_{t+x-\eta}^{t-x+\eta}f(\tau)d\tau\equiv\left(\overline{S}f\right)(x,t),$$

що підтверджує справедливість властивості 1^0.

2^0. $\left(\overline{S}f\right)(x,\pi-t)=-\left(\overline{S}f\right)(x,t)$.

Враховуючи формулу (7), одержуємо

$$\left(\overline{S}f\right)(x,\pi-t)=-\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{\pi-t-x+\xi}^{\pi-t+x-\xi}f(\tau)d\tau-\frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi\int_{\pi-t+x-\xi}^{\pi-t-x+\xi}f(\tau)d\tau=$$

1. Заміна $\tau=\pi-\theta$, $d\tau=-d\theta,$ $t+x-\xi\le\theta\le t-x+\xi$, для першого інтеграла.
2. Заміна $\tau=\pi-\theta$, $d\tau=-d\theta,$ $t-x+\xi\le\theta\le t+x-\xi$, для другого інтеграла.

$$=\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}f(\pi-\theta)d\theta+\frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}f(\pi-\theta)d\theta=$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}f(\theta)d\theta-\frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}f(\theta)d\theta=$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^x d\xi\int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi}f(\theta)d\theta+\frac{1}{4}\int_x^\pi d\xi\int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi}f(\theta)d\theta=$$

$$=-\left(-\frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\theta)d\theta - \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\theta)d\theta\right) = -\left(\bar{S}f\right)(x,t)\,.$$

3^0. $\left(\bar{S}f\right)(x,-t) = -\left(\bar{S}f\right)(x,t)$.

На основі формули (7) одержуємо

$$\left(\bar{S}f\right)(x,-t) = -\frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{-t-x+\xi}^{-t+x-\xi} f(\tau)d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{-t+x-\xi}^{-t-x+\xi} f(\tau)d\tau =$$

1. Заміна $\tau = -\theta$, $d\tau = -d\theta$, $t+x-\xi \le \theta \le t-x+\xi$, для першого інтеграла.
2. Заміна $\tau = -\theta$, $d\tau = -d\theta$, $t-x+\xi \le \theta \le t+x-\xi$, для другого інтеграла.

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(-\theta)d\theta + \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(-\theta)d\theta =$$

$$=-\frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\theta)d\theta - \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\theta)d\theta =$$

$$=\frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\tau)\,d\tau + \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\tau)\,d\tau =$$

$$=-\left(-\frac{1}{4}\int\limits_0^x d\xi \int\limits_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\tau)\,d\tau - \frac{1}{4}\int\limits_x^\pi d\xi \int\limits_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\tau)\,d\tau\right) = -\left(\bar{S}f\right)(x,t)\,.$$

Властивість 3^0 доведена.

Введемо новий простір для функцій $g(x,t)$ — функцій двох змінних x і t таким чином:

$$B_{22}^{-} = \{g : g(x,t) = g(\pi - x,\, t) = -g(x, \pi - t) = -g(x, -t)\}\,.$$

З властивостей 1^0–3^0 одержуємо, що оператор $\bar{S}$ відображає простір B_{22}^{-} самого в себе: $B_{22}^{-} \xleftrightarrow{\bar{S}} B_{22}^{-}$.

Зауваження 2. Беручи до уваги те, що оператор $\bar{S}$ переводить непарну функцію $f(t)$, тобто $f(-t) = -f(t)$, — непарну функцію $v(x,t) = \left(\bar{S}f\right)(x,t)$ (властивість 3^0), і враховуючи властивість тригонометричних рядів Фур'є, доведемо, що розв'язок $v(x,t) = \left(\bar{S}f\right)(x,t)$ крайової 2π-періодичної задачі (4)–(6) розкладається лише по синусах, тобто при певних умовах він зображується рядом

$$v(x,t) \equiv \left(\overline{S}\, f\right)(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(t) \sin kx \;.$$

Окрім цього, враховуючи формулу обчислення коефіцієнтів Фур'є, тобто формулу

$$b_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \left(\overline{S}\, f\right)(x,t) \sin kx\, dx,\; k \in N\;, \qquad (23)$$

переконуємося у справедливості такого твердження:

Лема 2. Якщо $f \in G_{\pi t}^{0} \cap B_{23}^{-}$, то $b_{2n}(t) = 0,\; n \in N$.

Доведення. Справді, на твердженні основної теореми та формули (23) при $f \in G_{\pi t}^{0} \cap B_{23}^{-}$ маємо, що $\left(\overline{S}\, f\right)(x,t) \in C_{\pi}^{2,2} \cap B_{23}^{-}$ і

$$b_k(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left(\overline{S}\, f\right)(x,t) \sin kx\, dx + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} \left(\overline{S}\, f\right)(x,t) \sin kx\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left(\overline{S}\, f\right)(x,t) \sin kx\, dx - \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{0} \left(\overline{S}\, f\right)(\pi-\eta,t) \sin k(\pi-\eta)\, d\eta =$$

$$= \begin{cases} 0, \quad k = 2n,\; n = 1, 2, ..., \\ \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\overline{S}\, f\right)(x,t) \sin kx,\; k = 2n-1,\; n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Отже, $\left(\overline{S}\, f\right)(x,t) = \sum_{s=1}^{\infty} b_{2s-1}(t) \sin(2s-1)x$.

Висновки.

1. У роботі знайдено аналітичну формулу функції

$$v(x,t) = \left(\overline{S}\, f\right)(x,t) \equiv -\frac{1}{4}\int_0^{x} d\xi \int_{t-x+\xi}^{t+x-\xi} f(\tau)d\tau - \frac{1}{4}\int_x^{\pi} d\xi \int_{t+x-\xi}^{t-x+\xi} f(\tau)d\tau\;,$$

яка є розв'язком у класі функцій

$$B_{23}^{-} = \left\{ f : f(t) = -f(\pi - t) = -f(-t) \right\}$$

такої крайової 2π-періодичної задачі

$$u_{tt}^{0} - u_{xx}^{0} = f(t)\;,\; 0 < x < \pi,\; t \in R\;,$$

$$u^{0}(0,t) = u^{0}(\pi,t) = 0,\; t \in R\;,$$

$$u^{0}(x,t+2\pi) = u^{0}(x,t) = 0,\; 0 \le x \le \pi,\; t \in R\;.$$

2. На основі знайденої функції $v(x,t) = \left(\overline{S}\, f\right)(x,t)$ можна робити висновки про поведінку розв'язку незбуреного рівняння ($\varepsilon = 0$)

$$u_{tt}^0 - u_{xx}^0 = f(t)\,,\ 0 \le x \le \pi,\ t \in R\,,$$

при дослідженні загального нелінійного рівняння

$$u_{tt} - u_{xx} = f(t) + \varepsilon F(x,t,u,u_t,u_x)\,,$$

де ε — малий параметр, асимптотичними методами.

Список використаних джерел:

1. Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. — Москва : Наука, 1974. — 501с.
2. Митропольский Ю. А. Асимптотические решения уравнений в частных производных / Ю. А. Митропольский, Б. И. Мосеенков. — Київ : Вища школа, 1976. — 590 с.
3. Артемьев Н. А. Периодические решения одного класса уравнений в частных производных / Н. А. Артемьев // Изв. АН СССР. Серия Математика. — 1937. — № 1. — С. 15–50.
4. Митропольский Ю. А. Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / Ю. А. Митропольский, Г. П. Хома, М. И. Громяк. — Киев : Наук. думка, 1991. — 232 с.
5. Митропольський Ю. О. Умови існування розв'язків крайової періодичної задачі для неоднорідного лінійного гіперболічного рівняння другого порядку / Ю. О. Митропольський, С. Г. Хома-Могильська // Укр. мат. журн. — 2005. — Т. 57, № 7. — С. 912–921.
6. Самойленко А. М. Окремий випадок існування 2π-періодичних розв'язків крайових задач для гіперболічного рівняння другого порядку / А. М. Самойленко, Н. Г. Хома, С. Г. Хома-Могильська // Доп. НАН України. — 2012. — № 2. — С. 25–29.

MATHEMATICAL MODELLING OF OSCILLATING PROCESSES IN STRIP

The boundary-value periodic problem for differential equations in partial derivatives, including hyperbolic equations, are complicated and controversial subject to study. Boundary-value problems with data throughout the border region as well as the problem of non-local (including integrated) conditions for hyperbolic equations in limited areas are, generally speaking, relatively correct. Many authors link the solvability of such problems with the problem of small denominators and use the methods of nonlinear functional analysis, the theory of implicit functions, variation methods. Another authors use the analytical methods in the research of periodic boundary-value problems for the second order hyperbolic equations. They construct integral operators and search the solutions in specially defined spaces of continuously differentiated functions for specific cases of periodicity.

In this paper we find an analytic formula of the function $v(x, t)$, which is a solution of the boundary-value 2π-periodic time-varying problem in the class of odd functions for which $f(t) = -f(\pi - t)$.

The properties of this function are established and the estimates of the solution of the boundary-value 2π-periodic problem are given.

The results of the study are used for mathematical modeling of oscillating processes described by the second order hyperbolic equations.

On the basis of the found function $v(x, t)$ we can draw conclusions about the behavior of the solution of the undisturbed equation ($\varepsilon = 0$, ε is a small parameter) in the study of the general nonlinear the second order hyperbolic equation by the asymptotic methods.

Key words: *undisturbed equation, boundary-value periodic problem, second order hyperbolic equation, classical solution, class of functions, small parameter.*

Отримано: 23.11.2018