УДК 519.854.2

О. А. Павлов, д-р техн. наук, професор,
О. Г. Жданова, канд. техн. наук,
М. О. Сперкач, асистент

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ЗАДАЧА СКЛАДАННЯ РОЗКЛАДУ ВИКОНАННЯ ЗАВДАНЬ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ПРИЛАДАМИ З МЕТОЮ МІНІМІЗАЦІЇ МАКСИМУМУ ВІДХИЛЕННЯ ВІД ДИРЕКТИВНОГО ТЕРМІНУ МОМЕНТІВ ЗАВЕРШЕННЯ ПРИЛАДАМИ УСІХ ЗАВДАНЬ

Розглянута задача теорії розкладів, в якій необхідно скласти розклад виконання завдань із загальним директивним терміном ідентичними паралельними приладами за критерієм мінімізації максимального відхилення від директивного терміну моментів завершення приладами усіх завдань. Застосовуючи методологію побудови ПДС-алгоритмів, розроблено ознаки оптимальності розкладів та на їх основі визначена множина перестановок, які дозволяють послідовно покращувати значення критерію. Розроблено ПДС-алгоритм розв'язання задачі, який має наступні властивості: поліноміальна складова алгоритму (ознаки оптимальності і поліноміальний алгоритм, що їх перевіряє) одночасно є поліноміальною апроксимацією експоненціальної складової ПДС-алгоритму.

Ключові слова: *календарне планування, розклад, паралельні прилади, спільний директивний термін, мінімізація максимуму відхилень від директивного терміну, ПДС-алгоритм.*

Вступ. Виробниче оперативно-календарне планування (ОКП) полягає у визначенні календарних термінів виконання множини планових завдань. Застосування економіко-математичних моделей та методів дозволяє суттєво підвищити ефективність ОКП. Важливою складовою ОКП є цехове планування, в якому вирішуються задачі, подібні тій, що розглядається у цій роботі: у систему одночасно надходить певна кількість завдань, які можуть виконуватися ідентичними паралельними приладами. Для цих приладів необхідно скласти розклад виконання завдань, що дозволяє досягнути ефективного використання ресурсів. Отже, є потреба у розробці алгоритмів складання розкладів, що забезпечать високу якість отримуваних результатів і не будуть потребувати значних обчислювальних ресурсів. Один з шляхів цього напрямку грунтується на застосуванні методології побудови ПДС-алгоритмів для важковирішуваних задач комбінаторної оптимізації [1, с. 161–191], зміст якої полягає у наступному. Спочатку на основі теоретичного аналізу досліджуваної задачі виявляються ознаки оптимальності допустимих розв’язків, потім розробляється алгоритм розв’язання задачі, що має дві складові поліноміальну і експоненційну. Поліноміальна складова породжується логіко-аналітичними умовами (p — умовами), виконання яких гарантує оптимальність отриманого розв’язку і синтезується таким чином, щоб послідовна процедура конструювання допустимих розв’язків була найбільш ефективна з точки зору реалізації p — умов. Коли допустимий розв’язок, отриманий поліноміальною складовою, не задовольняє p — умовам, то продовжується розв’язання задачі експоненційною складовою алгоритму, чи її поліноміальною апроксимізацією.

У цій роботі розглядається задача календарного планування виконання завдань із загальним директивним терміном ідентичними паралельними приладами з метою мінімізації максимального відхилення від директивного терміну моментів завершення приладами усіх завдань.

Огляд публікацій. У роботі [1, с. 451–472] розглянуто проблеми реалізації ефективного планування в системах, які мають мережеве представлення технологічних процесів і обмежені ресурси.

У роботі [2] визначено властивості та проведений порівняльний аналіз задач календарного планування за різними критеріями оптимальності згідно методології побудови ПДС-алгоритмів для важковирішуваних задач комбінаторної оптимізації [1, с. 161–191]. У роботі [4] розглянута задача, близька до досліджуваної: одна з підзадач багатоетапної мережевої задачі календарного планування, де для довільно заданих кінцевих директивних термінів необхідно отримати допустимий розклад з максимально пізнім за часом запуском технологічного процесу. В роботі [5] розглянуто властивості задачі календарного планування виконання завдань із загальним директивним терміном ідентичними паралельними приладами за критерієм максимізації моменту запуску приладів за умови, що усі завдання не запізнюються; визначена множина перестановок, що дозволяють послідовно покращувати значення критерію; ці перестановки покладені в основу розробленого ПДС-алгоритму розв'язання задачі.

Мета та задачі досліджень. Метою роботи є дослідження задачі мінімізації максимального відхилення від директивного терміну моментів завершення паралельними приладами усіх завдань. У рамках дослідження необхідно вирішити наступні задачі: виявити властивості задачі календарного планування; визначити ознаки оптимальності розкладів; використовуючи ознаки оптимальності розкладів розробити множину перестановок, які дозволять послідовно покращувати значення критерію; розробити алгоритм розв’язання задачі.

Постановка задачі. Задано множину завдань J ($|J| = n$) та кількість приладів m, для кожного завдання $j \in J$ відома тривалість виконання p_j. Усі завдання мають спільний директивний термін *d*. Передбачається, що всі завдання множини J надходять у систему одночасно, процес обслуговування кожного завдання протікає без переривань до завершення обслуговування завдань. Усі прилади працюють без переривань.

Необхідно знайти розклад, у якому мінімізується максимум відхилення від директивного терміну моментів завершення приладами усіх своїх завдань.

У роботі розглядається випадок, коли сумарний час, виділений приладам на виконання усіх завдань, приблизно дорівнює загальному об’єму роботи, яку повинні виконати ці прилади:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j \approx dm \text{ і при цьому } \left|\sum_{j=1}^{n} p_j - dm\right| < m .$$

Одним з поширених критичних зауважень щодо моделей теорії розкладів є наступне: на практиці у разі обмеженого фонду робочого часу парку машин (приладів) керівництво підприємства не набирає замовлень, об’єм яких значно перевищує можливості підприємства. З огляду на це, задача, що розглядається, є реалістичною.

Властивості задачі. Позначимо $\delta = \sum_{j=1}^{n} p_j - dm$. Величина δ може бути від’ємною, додатною або приймати нульове значення.

Розглянемо деякий розклад σ. Позначимо в цьому розкладі: C_i — момент завершення виконання усіх завдань приладом i, $i = \overline{1,m}$; $\Delta_i(\sigma) = \max\{0; C_i - d\}$; $i = \overline{1,m}$ (далі цю величину будемо називати виступом приладу i); $R_i(\sigma) = \max\{0; d - C_i\}$, $i = \overline{1,m}$ (далі цю величину будемо називати резервом приладу i).

Визначимо множини: $I_\Delta(\sigma)$ — множина таких приладів, для яких $\Delta_i(\sigma) > 0$; $I_R(\sigma)$ — множина таких приладів, для яких $R_i(\sigma) > 0$; $I_0(\sigma)$ — множина таких приладів, для яких $\Delta_i(\sigma) = R_i(\sigma) = 0$; $J_i(\sigma)$ — множина робіт, що виконується приладом i.

Не складно довести, що оптимальний розклад належить класу Ψ розкладів, для яких виконується

$$\exists h,\ j, s \mid h \in I_\Delta(\sigma),\ j \in J_h(\sigma),\ s \in I_R(\sigma),\ p_j \le R_s(\sigma).$$

З урахуванням обраних позначень критерій задачі має вигляд:

$$\max_i \left\{\left|C_i(\sigma) - d\right|\right\} \to \min \text{ або } \max_i \left\{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\right\} \to \min .$$

Нехай, b — найбільший спільний дільник тривалостей виконання завдань p_j, $j = \overline{1,n}$, якщо поділити величини p_j, $j = \overline{1,n}$ на b, то для усіх тривалостей виконання завдань найбільший загальний дільник буде становити 1 [6].

Для побудови початкового розкладу пропонується використовувати алгоритм, наведений у [5], суть якого полягає в наступному: спочатку завдання впорядковуються за незростанням тривалостей виконання, потім на кожній ітерації наступне з завдань призначається на той прилад, у якого поточний час звільнення є найменшим. Очевидно, що розклад, побудований за цим алгоритмом, належить до класу розкладів Ψ.

Ознаки оптимальності. Для розкладу $\sigma \in \Psi$ можливі такі випадки.

Випадок I. Якщо $\delta = 0$ і у розкладі маємо, що $C_i = d$, $i = \overline{1,m}$, тобто отримали розклад з рівномірним завантаженням приладів. Очевидно, що цей розклад є оптимальним (*ознака оптимальності 1*).

Випадок II. $\delta > 0$ (у цьому випадку неможливо побудувати розклад з рівномірним завантаженням приладів).

Випадок II.1. Усі прилади завершують роботу не раніше директивного терміну:

$$C_i \ge d, \quad i = \overline{1,m}.$$

У цьому випадку розклад, у якого:

$$R_i(\sigma) = 0, \; i = \overline{1,m}; \tag{1}$$

$$\Delta_i(\sigma) \in \{0,1\} \; i = \overline{1,m}; \tag{2}$$

є оптимальним (при цьому кількість приладів з ненульовим виступом становить δ, рисунок 1а).

У випадку II ($\delta > 0$) в оптимальному розкладі можуть мати місце прилади з ненульовим (одиничним) резервом. Для збереження оптимальності розкладу, кожний додатковий ненульовий (одиничний) резерв повинен бути компенсований ненульовим (одиничним) виступом. При виконанні умов (1)–(2) кількість приладів, у яких $R_i(\sigma) = \Delta_i(\sigma) = 0$, становить $m - \delta$. Отже, максимально можлива кількість приладів з $R_i(\sigma) = 1$ становить $\frac{m-\delta}{2}$, якщо різниця $m - \delta$ є парною, і $\left\lfloor \frac{m-\delta}{2} \right\rfloor$, якщо ця різниця непарна (тут: $\lfloor a \rfloor$ — найбільше ціле, для якого виконується $\lfloor a \rfloor \le a$). При цьому максимально можлива кількість приладів з $\Delta_i(\sigma) = 1$ становить $\delta + \left\lfloor \frac{m-\delta}{2} \right\rfloor$.

Отже в загальному вигляді ознака оптимальності така.

Випадок II.2. Частина приладів завершують свою роботу до директивного терміну, частина — після. У цьому випадку розклад, у якого:

$$R_i\left(\sigma\right)\in\left\{0,1\right\},\ i=\overline{1,m};$$

$$\Delta_i\left(\sigma\right)\in\left\{0,1\right\},\ i=\overline{1,m};$$

є оптимальним (*ознака оптимальності 2*). При цьому розклад має характеристики, наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Характеристики розкладу при мінімальному та максимальному значенні для випадку II

Характеристика розкладу	**Мінімальне значення**	**Максимальне значення**
Кількість приладів з ненульовим виступом, $\left\|I_\Delta\left(\sigma\right)\right\|$	δ	$\delta+\left\lfloor\dfrac{m-\delta}{2}\right\rfloor$
Кількість приладів з ненульовим резервом, $\left\|I_R\left(\sigma\right)\right\|$	0 (якщо $m-\delta$ парне) 1 (якщо $m-\delta$ непарне)	$m-\delta$

На рисунку 1 наведена графічна ілюстрація ознак оптимальності II.1 (а) та II.2 (б). На рисунку 1а показано випадок, у якому величина $\left|I_\Delta\left(\sigma\right)\right|$ приймає мінімально можливе значення, а на рисунку 2б — максимально можливе (три одиничних резерви були компенсовані трьома додатковими одиничними виступами).

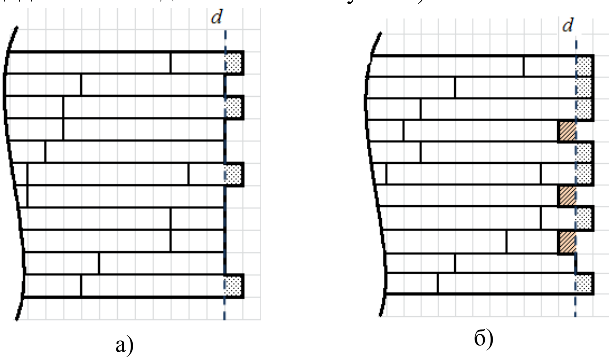


Рис. 1. *Графічна ілюстрація ознак оптимальності II.1 та II.2*

Випадок III. $\delta<0$ (у цьому випадку також неможливо побудувати розклад з рівномірним завантаженням приладів).

Випадок III.1. Момент завершення усіх завдань кожним приладом не перевищує директивного терміну: $C_i\le d$, $i=\overline{1,m}$.

У цьому випадку розклад, у якого:

$$\Delta_i\left(\sigma\right)=0,\quad i=\overline{1,m};$$

$$R_i\left(\sigma\right)\in\left\{0,1\right\},\ i=\overline{1,m};$$

є оптимальним (при цьому кількість приладів з ненульовим резервом становить $\left|\delta\right|$).

Випадок III.2. Частина приладів завершують свою роботу до директивного терміну, частина — після. У цьому випадку розклад, у якого:

$$\Delta_i(\sigma)\in\{0,1\},\quad i=\overline{1,m};$$

$$R_i(\sigma)\in\{0,1\},\quad i=\overline{1,m};$$

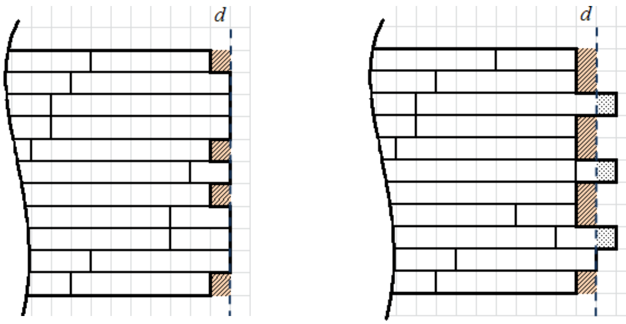
є оптимальним (*ознака оптимальності 3*). При цьому розклад має характеристики, наведені в таблиці 1.

Таблиця 2

Характеристики розкладу при мінімальному та максимальному значенні для випадку III

Характеристика розкладу	**Мінімальне значення**	**Максимальне значення**
Кількість приладів з ненульовим резервом, $\left|I_R(\sigma)\right|$	$\left|\delta\right|$	$\left|\delta\right|+\left\lfloor\dfrac{m+\delta}{2}\right\rfloor$
Кількість приладів з ненульовим виступом, $\left|I_\Delta(\sigma)\right|$	0 (якщо $m+\delta$ парне) 1 (якщо $m+\delta$ непарне)	$m+\delta=m-\left|\delta\right|$

На рисунку 2 наведена графічна ілюстрація ознак оптимальності III.1 та III.2.



а) б)

Рис. 2. *Графічна ілюстрація ознак оптимальності III.1 та III.2*

Для довільного розкладу σ виконується:

$$\sum_{i=1}^{m}\Delta_i(\sigma)=\sum_{i=1}^{m}R_i(\sigma)+\delta .$$

Оптимізація розкладу полягає в послідовному зменшенні величини $\max\limits_i\left\{R_i(\sigma);\Delta_i(\sigma)\right\}$, цього можна досягти за допомогою обміну завданнями між приладами з множин $I_\Delta(\sigma)$ і $I_R(\sigma)$. При цьому в результаті таких перестановок, застосованих до розкладу σ, в новому розкладі σ^1 для величин $\sum_{i=1}^{m} \Delta_i\left(\sigma^1\right)$ та $\sum_{i=1}^{m} R_i\left(\sigma^1\right)$ виконується:

$$\sum_{i=1}^{m} \Delta_i(\sigma) - \sum_{i=1}^{m} \Delta_i\left(\sigma^1\right) = \sum_{i=1}^{m} R_i(\sigma) - \sum_{i=1}^{m} R_i\left(\sigma^1\right).$$

Отже, для покращення розкладу необхідно направити зусилля на зменшення максимальної з величин виступів ($\max\limits_i \Delta_i(\sigma)$) або резервів ($\max\limits_i R_i(\sigma)$), не збільшуючи при цьому «протилежну» характеристику розкладу (максимальне значення резервів та виступів відповідно). Для цього пропонується використовувати розроблену множину перестановки робіт між приладами з множин $I_\Delta(\sigma)$ та $I_R(\sigma)$. Умови виконання цих перестановок та їх наслідки (характеристики отриманого розкладу σ^1) описані в таблиці 3.

Таблиця 3

Властивості перестановок

Тип перестановки	Прилади і роботи, що приймають участь у перестановці	θ $(\theta > 0)$	Умова, при якій перестановка виконується	Характеристики результуючого розкладу
Зменшення резерву (виступу) одного приладу за рахунок зменшення виступу (резерву) іншого				
1-1A	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1 \in J_h$; $s \in I_R(\sigma)$, $j_2 \in J_s$	$p_{j_1} - p_{j_2}$	$\theta \le \Delta_h(\sigma)$, $\theta \le R_s(\sigma)$.	$\Delta_h\left(\sigma^1\right) = \Delta_h(\sigma) - \theta$, $R_s\left(\sigma^1\right) = R_s(\sigma) - \theta$.
1-2A	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1 \in J_h$; $s \in I_R(\sigma)$, $j_2, j_3 \in J_s$	$p_{j_1} - \left(p_{j_2} + p_{j_3}\right)$		
2-1A	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1, j_2 \in J_h$; $s \in I_R(\sigma)$, $j_3 \in J_s$	$\left(p_{j_1} + p_{j_2}\right) - p_{j_3}$		

Продовження таблиці 3

Зменшення резерву (з появою додаткового резерву)				
R 1-1Б	$h \in I_{\Delta}(\sigma)$, $j_1 \in J_h$; $s \in I_R(\sigma)$, $j_2 \in J_s$	$p_{j_1} - p_{j_2}$	$\theta \le R_s(\sigma)$, $\theta > \Delta_h(\sigma)$	$R_s(\sigma^1) =$ $= R_s(\sigma) - \theta$, $R_h(\sigma^1) =$ $= \theta - \Delta_h(\sigma)$.
R 2-1Б	$h \in I_{\Delta}(\sigma)$, $j_1 \in J_h$; $s \in I_R(\sigma)$, $j_2, j_3 \in J_s$	$p_{j_1} -$ $-(p_{j_2} + p_{j_3})$		
R 1-2Б	$h \in I_{\Delta}(\sigma)$, $j_1, j_2 \in J_h$; $s \in I_R(\sigma)$, $j_3 \in J_s$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) -$ $-p_{j_3}$		
Перерозподіл резервів				
R 1-1В	$s \in I_R(\sigma)$, $j_1 \in J_s$; $h \in I_R(\sigma) \cup$ $\cup I_0(\sigma)$, $j_2 \in J_h$	$p_{j_2} - p_{j_1}$	$\theta \le R_s(\sigma)$, $\theta < R_s(\sigma) -$ $-R_h(\sigma)$.	$R_s(\sigma^1) =$ $= R_s(\sigma) - \theta$, $R_h(\sigma^1) =$ $= R_h(\sigma) + \theta$.
R 2-1В	$s \in I_R(\sigma)$, $j_1 \in J_s$, $h \in I_R(\sigma) \cup$ $\cup I_0(\sigma)$, $j_2, j_3 \in J_h$	$(p_{j_2} + p_{j_3}) -$ $-p_{j_1}$		
R 1-2В	$s \in I_R(\sigma)$, $j_1, j_2 \in J_s$; $h \in I_R(\sigma) \cup$ $\cup I_0(\sigma)$, $j_3 \in J_h$	$p_{j_3} -$ $-(p_{j_1} + p_{j_2})$		

Продовження таблиці 3

Зменшення виступу (з появою додаткового виступу)				
Δ 1-1Б	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1 \in J_h$; $s \in I_R(\sigma)$, $j_2 \in J_s$	$p_{j_1} - p_{j_2}$	$\theta \le \Delta_h(\sigma)$, $\theta > R_s(\sigma)$.	$\Delta_h(\sigma^1) =$ $= \Delta_h(\sigma) - \theta$, $\Delta_s(\sigma^1) =$ $= \theta - R_s(\sigma)$.
Δ 1-2Б	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1 \in J_h$; $s \in I_R(\sigma)$, $j_2, j_3 \in J_s$	$p_{j_1} -$ $-(p_{j_2} + p_{j_3})$		
Δ 2-1Б	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1, j_2 \in J_h$; $s \in I_R(\sigma)$, $j_3 \in J_s$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) -$ $-p_{j_3}$		
Перерозподіл виступів				
Δ 1-1В	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1 \in J_h$; $s \in I_\Delta(\sigma) \cup$ $\cup I_0(\sigma)$, $j_2 \in J_s$	$p_{j_1} - p_{j_2}$	$\theta < \Delta_h(\sigma)$, $\theta < \Delta_h(\sigma) -$ $-\Delta_s(\sigma)$.	$\Delta_h(\sigma^1) =$ $= \Delta_h(\sigma) - \theta$, $\Delta_s(\sigma^1) =$ $= \Delta_s(\sigma) + \theta$.
Δ 1-2В	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1 \in J_h$; $s \in I_\Delta(\sigma) \cup$ $\cup I_0(\sigma)$, , $j_2, j_3 \in J_s$	$p_{j_1} -$ $-(p_{j_2} + p_{j_3})$		
Δ 2-1В	$h \in I_\Delta(\sigma)$, $j_1, j_2 \in J_h$; $s \in I_\Delta(\sigma) \cup$ $\cup I_0(\sigma)$, $j_3 \in J_s$	$(p_{j_1} + p_{j_2}) -$ $-p_{j_3}$		

Розроблена множина перестановок покладена в основу *ПДС*-алгоритму розв'язання задачі, який має наступні властивості: поліноміальна складова алгоритму (ознаки оптимальності і поліноміальний алгоритм, що їх перевіряє) одночасно являється поліноміальною апроксимацією експоненціальної складової ПДС-алгоритму.

Алгоритм розв'язання задачі

КРОК 1 Побудувати початковий розклад σ .

КРОК 2 Визначити множини $I_\Delta(\sigma)$, $I_R(\sigma)$ та $I_0(\sigma)$.

КРОК 3 Перевірити виконання ознак оптимальності

ЯКЩО виконується одна з ознак оптимальності, **ТО** кінець, σ — оптимальний розклад.

КРОК 4 Визначити прилад q, якому відповідає максимум $\max\limits_i \left\{R_i(\sigma); \Delta_i(\sigma)\right\}$.

КРОК 5 ЯКЩО $q \in I_\Delta(\sigma)$ **, ТО** перейти на КРОК 6

ІНАКШЕ ($q \in I_R(\sigma)$) перейти на КРОК 7.

КРОК 6 Для приладу $h = q$ перебираючи усі прилади $s \in I_R(\sigma)$ виконати усі можливі перестановки **1-1А, 1-2А, 2-1А,** Δ **1-1Б,** Δ **1-2Б,** Δ **2-1Б.**

ЯКЩО таких перестановок не знайшлось,

ТО для приладу $h = q$ перебираючи усі прилади $s \in I_0(\sigma) \cup I_\Delta(\sigma)$ виконати усі можливі перестановки Δ **1-1В,** Δ **1-2В,** Δ **2-1В.**

ЯКЩО таких перестановок не знайшлось,

ТО кінець алгоритму,

ІНАКШЕ перейти на **КРОК 2.**

ІНАКШЕ перейти на **КРОК 2.**

КРОК 7 Для приладу $s = q$ перебираючи усі прилади $h \in I_\Delta(\sigma)$ виконати усі можливі перестановки **1-1А, 1-2А, 2-1А,** R **1-1Б,** R **1-2Б,** R **2-1Б.**

ЯКЩО таких перестановок не знайшлось,

ТО для приладу $s = q$ перебираючи усі прилади $s \in I_0(\sigma) \cup$ $\cup I_R(\sigma)$ виконати усі можливі перестановки R **1-1В,** R **1-2В,** R **2-1В.**

ЯКЩО таких перестановок не знайшлось,

ТО кінець алгоритму,

ІНАКШЕ перейти на **КРОК 2.**

ІНАКШЕ перейти на **КРОК 2.**

Складність алгоритму становить $O(mn^3)$.

Висновки:

- виявлено властивості задачі календарного планування виконання завдань ідентичними паралельними приладами із загальним директивним терміном;

- визначено ознаки оптимальності розкладів;
- розроблено множину перестановок, що дозволяє послідовно покращувати значення критерію мінімізації максимального відхилення від директивного терміну моментів завершення ідентичними паралельними приладами усіх завдань;
- розроблено ПДС-алгоритм розв'язання задачі.

Список використаних джерел:

1. Згуровский М. З. Принятие решений в сетевых системах с ограниченными ресурсами : монография / М. З. Згуровский, А. А. Павлов. — К. : Наукова думка, 2010. — 573 с.
2. Павлов А. А. Исследование свойств задачи календарного планирования выполнения заданий с общим директивным сроком параллельными приборами по разным критериям оптимальности / А. А. Павлов, Е. Б. Мисюра, М.О. Сперкач // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». — К. : ВЕК+, 2012. — №57. — С. 15–17.
3. Pavlov A. A. About one subclass of polynomially solvable problems from class «Sequencing jobs to minimize total weighted completion time subject to precedence constraints» / A. A. Pavlov, L. A. Pavlova. — Uzhhorod : Karpatskij region, 1998. — № 15. — 320 p.
4. Павлов А. А. Субоптимальный полиномиальный алгоритм решения одного класса многоэтапных сетевых задач календарного планирования / А. А. Павлов, М. О. Сперкач, Е. А. Халус // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». — К. : ВЕК+, 2012. — № 57. — С. 51–55.
5. Поліноміальна складова ПДС-алгоритму розв'язання однієї задачі теорії розкладів / О. А. Павлов, О. Г. Жданова, О. Б. Місюра, М. О. Сперкач // Технологический аудит и резервы производства. — 2013. — №6/3 (14). — С. 47–52.
6. Павлов А. А. Признаки оптимальности допустимых решений труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации / А. А. Павлов // Вісник НТУУ «КПІ». Серія «Інформатика, управління та обчислювальна техніка». — К. : ВЕК+, 2013. — № 59. — (подано до друку).

The scheduling problem is considered in which is necessary to schedule the jobs with a common due date on identical parallel machines with the criterion of minimizing the maximum deviation of the times when the machines complete all the jobs from the due date. Applying the methodology of the PDC-algorithms on their basis a set of permutations is defined that allows to consistently improve the criterion value. The PDC-algorithm for the problem solution is developed that has the following properties: the polynomial component of the algorithm (the signs of optimality and the polynomial algorithm that is checking them) is in the same time the polynomial approximation of the exponential component of the PDC-algorithm.

Key words: *Scheduling, schedule, parallel machines, common due date, minimizing the maximum deviation from the due date, PDC-algorithm.*

Отримано: 26.02.2014