

21. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными / Дж. Ортега, В. Рейнболдт. — М. : Мир, 1975. — 558 с.

На основі числових методів комплексного аналізу запропоновано підхід до розв'язання градієнтних задач ідентифікації параметрів кусково-однорідних середовищ за даними томографії прикладених квазі-потенціалів.

**Ключові слова:** *томографія прикладених квазіпотенціалів, квазі-конформні відображення, ідентифікація, нелінійні задачі.*

Отримано: 22.09.2016

УДК 004.021

**А. Ф. Верлань\***, д-р техн. наук, професор,

**О. І. Махович\*\***, канд. техн. наук

\* Інститут проблем моделювання в енергетиці  
імені Г.Є. Пухова НАН України, м. Київ,

\*\* Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **ПОРІВНЮВАЛЬНА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНА ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ЧИСЛОВОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ ІЗ РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ МЕТОДОМ ОПОРНИХ ПЕРЕРІЗІВ**

Шляхом обчислювальних експериментів досліджується ефективність числової реалізації математичних моделей методом опорних перерізів у порівнянні з традиційним широко-вживаним методом скінчених різниць. Отримані показники затрат процесорного часу при використанні різних методів знаходження розв'язків. Сформульовано рекомендації щодо ефективного використання методу опорних перерізів.

**Ключові слова:** *ефективність числової реалізації, затрати процесорного часу, різницева схема, метод скінчених різниць.*

**Вступ.** Існуючі методи і засоби, що використовуються для розв'язування задач моделювання об'єктів з розподіленими параметрами, ґрунтуються в переважній більшості на використанні моделей у вигляді диференціальних рівнянь з частинними похідними [1, 2]. Цей підхід дозволяє забезпечити високий рівень адекватності та ефективно застосування за відсутності специфічних часо-

вих і ресурсних вимог. У задачах моделювання процесів оперативної обробки інформації в технічних системах, зокрема обробки вимірювальних даних чи сигналів керування, присутні суттєві особливості, такі як функціонування систем в реальному часі, наявність зворотних зв'язків, необхідність розробки або вибору спеціалізованих обчислювальних алгоритмів для створення вбудованих програмних засобів тощо. При вирішенні оптимізаційних задач, коли потрібна висока швидкість отримання розв'язків, виникає необхідність у розробці універсальних і, в той же час, відносно простих методів числової реалізації моделей динаміки нестационарних теплових процесів.

**Основна частина.** Для задач математичного і комп'ютерного моделювання динаміки об'єктів з розподіленими параметрами при наявності обмежених обчислювальних та часових ресурсів доцільне застосування методу опорних перерізів [3, 4] побудови спрощених математичних моделей динамічних об'єктів шляхом певних апроксимаційних та еквівалентних перетворень базової моделі.

Суть методу полягає у наступному:

- 1) розв'язок задачі апроксимується інтерполяційним поліномом Лагранжа за опорними точками просторової змінної;
- 2) значення розв'язку на краях інтервалу визначення просторової змінної обчислюється за допомогою граничних умов;
- 3) значення розв'язку у внутрішніх опорних точках інтервалу обчислюється за допомогою розв'язування системи звичайних диференціальних рівнянь;
- 4) маючи розв'язки в опорних перерізах, можна за допомогою побудованого інтерполяційного полінома обчислити наближений розв'язок у довільній точці.

Без обмеження загальності застосування розглянемо метод стосовно широко розповсюджених ОРП теплотехнічного призначення, які описуються рівняннями із частинними похідними параболічного типу. Нехай температура  $T(x, t)$  на краях необмеженої пластини (рис. 1) примусово змінюється за законом  $F_{cp1}(t) \equiv T(x, t)|_{x=\pm 1}$ , який задається функцією часу. В середині пластини діє джерело тепла, потужність якого пропорційна  $f(t)$ . У початковий момент задано розподіл температури по товщині  $F_{nv}(x) \equiv T(x, t)|_{t=0}$ . Необхідно знайти розподіл температури в пластині. У цьому випадку спрощена модель теплоперенесення описується рівнянням із частинними похідними параболічного типу:

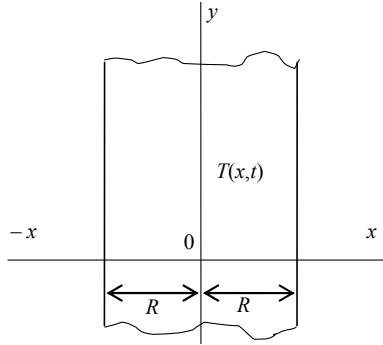


Рис. 1. Схематичне зображення об'єкта моделювання

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + q(x) f(t), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

де  $b(x) = k'(x) [c(x) \rho(x)]^{-1}$ ,  $q(x) = [c(x) \rho(x)]^{-1}$ ,  $a(x) = k(x) [c(x) \rho(x)]^{-1}$  — коефіцієнт теплопровідності,  $c(x)$  — питома теплоємність,  $\rho(x)$  — густина,  $k(x)$  — коефіцієнт теплопровідності,  $f(t)$  — внутрішнє джерело тепла,  $x$  — просторова координата,  $t$  — час. Розв'язок  $T(x,t)$  рівняння (1) представляємо як ряд  $T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) Q_n(x)$ , де  $Q_n(x)$  — відомі функції, які мають похідні відповідних порядків по  $x$ , а функції  $V_n(t)$  — визначаються. Інтерполяційний поліном Лагранжа за трьома точками  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1/2$ ,  $x_2 = 1$  має вигляд

$$T(x,t) \approx L_n(x,t) = \sum_{i=0}^n T(x_i,t) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k}, \quad n = 4, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

тобто для розв'язку, що має властивість симетрії за просторовими змінними, маємо:

$$T(x,t) \approx (4x^4 - 5x^2 + 1)T(0,t) + \frac{16}{3}x^2(1-x^2)T\left(\frac{1}{2},t\right) + \frac{1}{3}x^2(4x^2-1)F_{2p1}(t), \quad (3)$$

де  $Q_0(x) = 4x^4 - 5x^2 + 1$ ,  $Q_1(x) = \frac{16}{3}x^2(1-x^2)$  та  $Q_2(x) = \frac{1}{3}x^2(4x^2-1)$  — відомі функції, а  $V_0(t) = T(0,t)$  та  $V_1(t) = T\left(\frac{1}{2},t\right)$  — невідомі функції

ції, які потрібно визначити. У якості функції  $V_2(t) = T(0, t) = F_{zp1}(t)$  виступає гранична умова.

Таким чином, розв'язки задачі у двох опорних перерізах  $T(0, t)$  та  $T(0.5, t)$  дозволяють за виразом (3) знаходити розв'язки у довільних точках.

Для цього апроксимуємо частинні похідні рівняння (1) за просторовою змінною. Продиференціювавши (3) за змінною  $x$ , отримуємо вираз для частинної похідної першого порядку

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} &\approx 2x(8x^2 - 5)T(0, t) - \\ & - \frac{32}{3}x(2x^2 - 1)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{2}{3}x(8x^2 - 1)F_{zp1}(t), \end{aligned} \quad (4)$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} &\approx (48x^2 - 10)T(0, t) - \\ & - \left(64x^2 - \frac{32}{3}\right)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \left(16x^2 - \frac{2}{3}\right)F_{zp1}(t). \end{aligned} \quad (5)$$

Підставивши в (1) отримані вирази, маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= [48x^2 w_1(x) - 10w_2(x)]T(0, t) + \\ & + [-64x^2 w_1(x) + 32/3 w_2(x)]T(1/2, t) + \\ & + [16x^2 w_1(x) - 2/3 w_2(x)]F_{zp1}(t) + q(x)f(t), \end{aligned} \quad (6)$$

де  $w_1(x) = a(x) + 1/3 xb(x)$ ,  $w_2(x) = a(x) + xb(x)$ .

Вважаючи в (6) послідовно  $x = 0$  та  $x = 1/2$ , отримаємо систему двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку для визначення  $T(0, t)$  та  $T(1/2, t)$ :

$$\begin{cases} \frac{dT(0, t)}{dt} = -10a(0)T(0, t) + 32/3 a(0)T(1/2, t) - \\ - 2/3 a(0)F_{zp1}(t) + q(0)f(t); \\ \frac{dT(1/2, t)}{dt} = [2a(1/2) - 3b(1/2)]T(0, t) - 8/3 [2a(1/2) - b(1/2)]T(1/2, t) + \\ + 1/3 [10a(1/2) + b(1/2)]F_{zp1}(t) + q(1/2)f(t), \end{cases} \quad (7)$$

де початкові значення  $F_{ПУ}(0)$  та  $F_{ПУ}(1/2)$  відомі. Розв'язання системи (7), згідно з виразом (3), дає можливість обчислення наближених значень функції  $T(x, t)$  в довільній точці  $x$ .

Отже, на основі базової моделі (1) отримано спрощену модель у формі задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь (7). Розв'язок задачі в довільній точці обчислюється за допомогою виразу (3).

Для низки обчислювальних експериментів з розв'язання задачі (1) при кроці дискретизації  $\tau=10^{-4}$  с за часовою змінною значення відносної похибки не перевищувало  $\delta \leq 0,01$ .

З метою дослідження ефективності числової реалізації математичних моделей методом опорних перерізів у порівнянні з традиційним широкоскованим методом скінченних різниць було проведено ряд обчислювальних експериментів. Для цього розв'язувалася розглянута задача моделювання нестационарного теплового процесу у необмеженій пластинці з відомим аналітичним розв'язком.

Процес розв'язування розглянемо на модельному прикладі розв'язування конкретної задачі, для якої:

$$a(x) = \frac{b_2(a_0 - a_2x^2)}{2a_2}, a_0 - a_2x^2 > 0, 0 < a_2 \leq a_0, b_2 > 0, \quad (8)$$

$$b(x) \equiv 0, q(x) \equiv 1, f(t) = b_1 e^{-b_1 t}, \quad (9)$$

$$F_{зпI}(t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 - a_2) e^{-b_2 t}, \quad (10)$$

$$F_{ПУ}(x) = a_0 - a_2 x^2. \quad (11)$$

Задача (1), (8)–(11) має точний аналітичний розв'язок

$$T(x, t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 - a_2 x^2) e^{-b_2 t}. \quad (12)$$

Задача розв'язувалась різнцевими методами (явна умовно стійка чотириточкова схема та неявна абсолютно стійка шеститочкова схема Кранка-Ніколсона) та методом опорних перерізів при наступних значеннях коефіцієнтів:  $a_0 = 500$ ,  $a_2 = 0,5$ ,  $b_1 = 0,1$ ,  $b_2 = 0,5$ .

Вибрані різницеві схеми мають певні особливості. Явна чотириточкова схема у порівнянні з неявною є більш простою і вимагає меншої кількості операцій для підрахунку значень наближеного

розв'язку на одному часовому шарі. Проте умова стійкості  $\tau \leq \frac{h^2}{2a}$  (де

$\tau$  і  $h$  — крок сітки за часовою і просторовою координатами відповідно,  $a$  — коефіцієнт теплопровідності) накладає суттєве обмеження на вибір кроку за часом. Наприклад, якщо взяти  $h = 0,01$ , то для забезпечення стійкості при  $a = 250$  потрібно, щоб крок  $\tau$  не пере-

вищував значення  $\frac{10^{-2}}{500} = 2 \cdot 10^{-7}$ . А кількість вузлів сітки, в яких об-

числюється розв'язок задачі для проміжку часу 1 с із вказаним кроком, дорівнює  $10^9$ . Таку ж саму кількість операцій потрібно виконати для розв'язування задачі. Об'єм пам'яті, необхідний для зберігання значень цих змінних, становить  $\approx 7,5$  Гб. Із збільшенням величини часового проміжку кількість операцій та об'єм необхідної пам'яті зростають пропорційно.

Неявна шеститочкова різницева схема Кранка-Ніколсона, хоч і вимагає більшої кількості операцій для підрахунку значень наближеного розв'язку на одному часовому шарі (СЛАР порядку  $\frac{2}{h}-1$ ), проте є абсолютно стійкою. Це дає можливість використовувати її з довільними кроками  $h$  і  $\tau$ . Крім того, вона має підвищену точність  $O(h^2 + \tau^2)$ .

Особливістю методу опорних перерізів є низька чутливість до збільшення числа точок за просторовою змінною, оскільки значення у цих точках обчислюються за допомогою інтерполяційного полінома. Основне обчислювальне навантаження лягає на розв'язання системи двох звичайних диференціальних рівнянь за часовою змінною, розв'язки якої виступають в якості коефіцієнтів інтерполяційного полінома. Результати проведених експериментів представлені в таблиці 1.

Таблиця 1

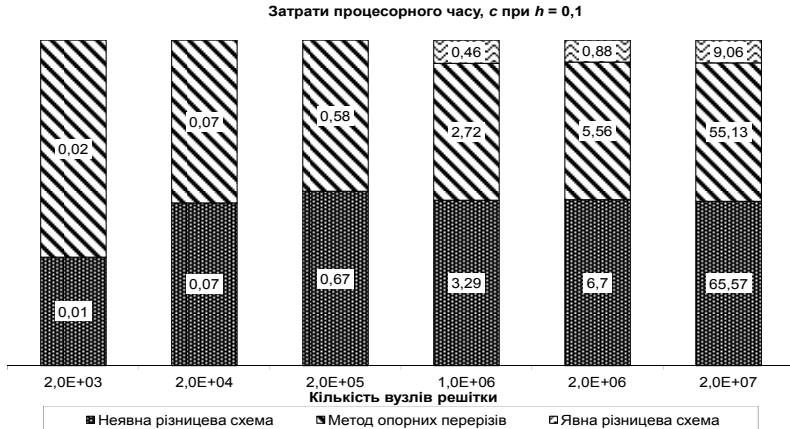
*Затрати процесорного часу при використанні різних методів знаходження розв'язків*

№ експерименту	Крок $h$ дискретизації просторової змінної $x \in [-1; 1]$	Крок $\tau$ дискретизації часової змінної $t$	Кількість вузлів	Час розрахунку, с		
				Різницеві схеми		Метод опорних перерізів
				Явна	Неявна	
1	$h = 0,1$	$\tau = 10^{-2}$ , $t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^3$	—	0,01	0,02
2		$\tau = 10^{-3}$ , $t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^4$	—	0,07	0,07
3		$\tau = 10^{-4}$ , $t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^5$	—	0,67	0,58
4		$\tau = 2 \cdot 10^{-5}$ , $t \in [0; 1]$	$10^6$	0,46	3,29	2,72
5		$\tau = 10^{-5}$ , $t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^6$	0,88	6,7	5,56
6		$\tau = 10^{-6}$ , $t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^7$	9,06	65,57	55,13

Продовження таблиці 1

7	$h = 0,01$	$\tau = 10^{-2}$ , $t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^4$	—	0,12	0,03
8	$h = 0,005$		$4 \cdot 10^4$	—	0,51	0,03
9	$h = 0,002$		$1 \cdot 10^5$	—	5,30	0,05
10	$h = 0,001$		$2 \cdot 10^5$	—	37,39	0,07
11	$h = 0,001$	$\tau = 10^{-3}$ , $t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^6$	—	381,40	0,52
12	$h = 0,01$		$\tau = 10^{-2}$ , $t \in [0; 10]$	$2 \cdot 10^5$	—	1,02
13	$h = 0,001$	$\tau = 10^{-3}$ , $t \in [0; 10]$	$2 \cdot 10^7$	—	—	5,45

В експериментах, для яких встановлено фіксований крок дискретизації просторової змінної  $h = 0,1$ ,  $x \in [-1; 1]$  та змінний крок дискретизації часової змінної  $\tau = \{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-5}, 10^{-5}, 10^{-6}\}$ ,  $t \in [0, 1]$ , проводились обчислення та фіксувався затрачений процесорний час для кожного з методів. Оскільки стійкість явної різницевої схеми не забезпечувалась для деяких значень кроків дискретизації, то затрачений час для цього методу у цих випадках не фіксувався. Результати наведені на рис. 2.

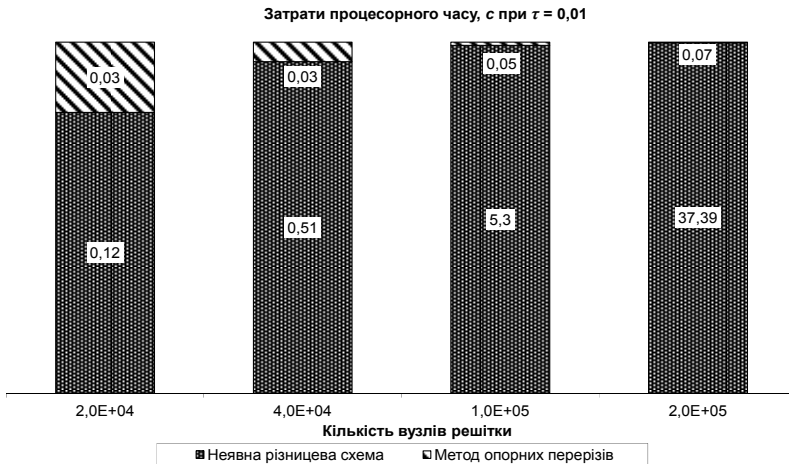


**Рис. 2.** Затрати процесорного часу для випадку фіксованого кроку дискретизації просторової змінної та змінного для часової змінної

Як видно із діаграми, обчислення за явною різницевою схемою хоч і показали кращу швидкодію, проте у половині випадків вони взагалі не могли бути проведені, оскільки порушувалась умова стійкості. З цієї причини даний метод для диференціальних рівнянь із частинними похідними параболічного типу застосовується рідко.

Якщо порівнювати затрачений процесорний час для розв'язування задачі за неявною різницевою схемою і апроксимаційним методом опорних перерізів, то, як видно із діаграми, для мінімального кроку дискретизації просторової змінної  $h = 0,1$  апроксимаційний метод лише в одному випадку показав меншу швидкодню і ще в одному випадку було отримано однаковий результат. Проте в решті випадків отримано перевагу ( $\approx 17\%$ ) на користь методу опорних перерізів.

В наступній частині експериментів навпаки крок  $\tau$  за часовою змінною  $t \in [0,1]$  фіксувався і становив  $\tau = 10^{-2}$ . Піддавався зміні крок  $h$  за просторовою змінною  $x \in [-1;1]$ :  $h = \{10^{-2}, 5 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}, 10^{-3}\}$ . При цьому також фіксувався затрачений процесорний час, необхідний для розв'язання задачі на вказаних сітках. Результати експерименту показані на рис. 3.



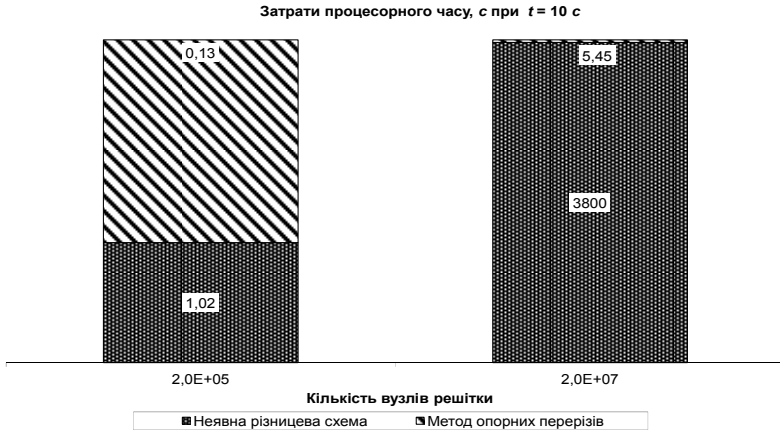
**Рис. 3.** Затрати процесорного часу для випадку фіксованого кроку дискретизації часової змінної та змінного для просторової змінної

З діаграми видно, що у всіх випадках апроксимаційний метод показав значну перевагу за часом числової реалізації математичної моделі перед різницевою схемою. Це пояснюється особливістю методу опорних перерізів, яка полягає в тому, що обчислення за просторовими змінними здійснюється за інтерполяційним поліномом.

Окремо проводився обчислювальний експеримент із параметрами  $\tau = 10^{-3}$  і  $h = 10^{-3}$ . У цьому випадку отримали результат 381,40 с і 0,52 с для різницевої схеми і методу опорних перерізів відповідно, який показує перевагу по затратам процесорного часу апроксимаційного методу для великої кількості точок за просторовою змінною.



В експериментах, де досліджувались затрати процесорного часу для збільшеного часового проміжку  $t \in [0,10]$  с, крок дискретизації для просторової та часової змінної обирався однаковим:  $\tau = 10^{-2}$  і  $h = 10^{-2}$ , та  $\tau = 10^{-3}$  і  $h = 10^{-3}$ . Результати експериментів представлені на рис. 4.



*Рис. 4. Затрати процесорного часу у випадку збільшеного часового проміжку*

**Висновок.** Результати експериментів показали, що застосування апроксимаційного методу опорних перерізів при числовій реалізації математичних моделей об'єктів із розподіленими параметрами, які описуються рівняннями із частинними похідними параболічного типу, дає змогу в декілька разів зменшити машинний час для знаходження розв'язків. Запропонований метод має найвищу ефективність у випадках, коли число вузлів за просторовою змінною (у яких шукається розв'язок задачі) рівне або більше за число вузлів за часовою змінною.

#### Список використаних джерел:

1. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
2. Бутковский А. Г. Характеристики систем с распределенными параметрами : справочное пособие / А. Г. Бутковский. — М. : Наука, 1979. — 224 с.
3. Верлань А. А. Аппроксимационные модели нестационарных тепловых процессов в неограниченной пластине с несимметричными граничными условиями / А. А. Верлань, А. И. Махович // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : Фізико-математичні науки : зб. наук. праць / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка ; [редкол. : Ю. Г. Кривонос (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 42–54.

4. Федорчук В. А. Дослідження динаміки нестационарних теплових процесів із симетричними граничними умовами методом перерізів / В. А. Федорчук, О. І. Махович // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія : технічні науки : зб. наук. праць / Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка ; [редкол. : Ю. Г. Кривонос (відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — С. 182–191.

The efficiency of numerical realization of mathematical models by the method of supporting cuts in comparison to the widely used traditional method of complete differences is being probed in calculable experiments. The time indexes of the processing of the use of different methods of finding of decisions are being analyzed and the recommendations to the effective use of the method of supporting cuts are formulated.

**Key words:** *efficiency of numerical realization, time of processing, difference scheme, finite difference method.*

Отримано: 16.09.2016

UDC 004.942, 681.518

A. A. Verlan, Ph. D., Associate Professor

Norwegian University of Science and Technology, Gjøvik, Norway

### **AN APPROACH TO THE PRECISION PARAMETRIC REDUCTION OF MATHEMATICAL MODELS**

The paper considers and analyzes an approach to simplification of mathematical models in order to substantiate possibility of accounting for limited computational resources needed to implement the models. Practical methods are proposed for application and evaluation of possible techniques of models' parametric reduction for considered problem with obtainment of applicability criterion of the given approach.

**Key words:** *parametric reduction, evaluation of approximations, criterion of applicability.*

**Introduction.** The more complex the objects and phenomena being studied are, the higher is computational complexity of the models used. Degree of complexity of mathematical descriptions of dynamics of the objects in question goes hand in hand with requirements for computational resources needed to run the models. Basic approach to assurance of accounting for limitation of these resources consists in use of simpler mathematical models instead of complex ones, yet preserving informative value of the results of modeling, i.e., in certain sense preserving adequacy