

УДК 681.5.015.52

**С. В. Солодуша**, канд. физ.-мат. наук, доцент

Институт систем энергетики

имени Л. А. Мелентьева СО РАН, г. Иркутск, Россия

## К ИДЕНТИФИКАЦИИ ЯДЕР ВОЛЬТЕРРЫ В НЕСТАЦИОНАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ МОДЕЛЯХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ<sup>1</sup>

Предлагается способ построения нестационарного квадратичного полинома Вольтерры, аппроксимирующего нелинейную динамическую систему в случае скалярного входного сигнала, в основе которого — учет необходимых условий разрешимости соответствующих интегральных уравнений Вольтерры I рода. Приведены результаты расчетов, иллюстрирующие повышение точности моделирования за счет более полного учета информации об откликах системы на тестовые воздействия.

**Ключевые слова:** *нелинейные динамические системы, идентификация, ряд Вольтерры, ядра Вольтерры.*

**Введение.** Универсальный аппарат интегро-степенных рядов Вольтерры хорошо известен в теории математического моделирования нелинейных систем в условиях априорной неопределенности [1] и применяется при описании динамики различных технических систем (см., например, [2–8]). Для построения интегральной модели в виде полинома Вольтерры требуется восстановить ядра Вольтерры (многомерные передаточные функции [3]) по тем или иным наборам данных типа «вход-выход». Во временной области наиболее часто используются тестовые наборы, полученные с помощью импульсных и кусочно-постоянных входных воздействий [9].

Методика идентификации ядер Вольтерры [10], развиваемая в данной статье, основана на задании многопараметрического семейства кусочно-постоянных возмущений в виде комбинации функций Хевисайда с отклоняющимся аргументом. При этом исходная задача редуцируется к решению линейных интегральных уравнений Вольтерры I рода с переменными верхними и нижними пределами. Условия разрешимости соответствующих уравнений в нужных классах функций в терминах амплитуд тестовых сигналов, участвующих в процедуре декомпозиции отклика системы на составляющие, получены в работах [11, 12].

**Цель статьи** — разработать новый алгоритм построения нестационарных полиномов Вольтерры, учитывающий необходимые условия разрешимости специальных многомерных интегральных уравнений.

<sup>1</sup> Работа поддержана грантом РФФИ № 15-01-01425а.

**Новый алгоритм идентификации.** Основная идея получения новых интегральных уравнений, к решению которых сводится задача идентификации, реализована для квадратичного полинома Вольтерры

$$y_1(t) = \int_0^t K_1(t, s_1)x(s_1)ds_1 + \int_0^t \int_0^t K_2(t, s_1, s_2) \prod_{i=1}^2 x(s_i)ds_i, \quad t \in [0, T], \quad (1)$$

достаточно распространенного в приложениях. Для построения математической модели вида (1) требуется восстановить ядра Вольтерры  $K_1$ ,  $K_2$ . Согласно [11], задача идентификации ядра  $K_2$  может быть сведена к решению интегрального уравнения

$$\begin{aligned} & \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} K_2(t, s_1, s_2)ds_1ds_2 - \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} K_2(t, s_1, s_2)ds_1ds_2 - \\ & + \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_2(t, s_1, s_2)ds_1ds_2 = f_2(t, \omega_1, \omega_2), \quad t \in [0, T], \\ & f_2(t, \omega_1, \omega_2) \equiv \frac{1}{\alpha^2} \left( y^\alpha(t, \omega_1, \omega_2) - \alpha \int_0^{\omega_1} K_1(t, s_1)ds_1 + \alpha \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_1(t, s_1)ds_1 \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $y^\alpha(t, \omega_1, \omega_2)$  — отклик динамической системы на сигналы

$$x_{\omega_1, \omega_2}^\alpha(t) = \alpha (I(t) - 2I(t - \omega_1) + I(t - \omega_1 - \omega_2)),$$

$I(t)$  — функция Хевисайда,  $0 \leq \omega_1 + \omega_2 \leq t \leq T$ . Для определенности считаем, что  $\alpha > 0$ . Предположим, что выполнено условие

$$f_2(t, \omega_1, \omega_2) = 3f_2(t, \omega_1, 0) - 3f_2(t, 0, \omega_1 + \omega_2) + f_2(t, \omega_1 + \omega_2, -\omega_2),$$

необходимое для существования решения (2) в классе непрерывных на  $\Omega_3 = \{t, s_1, s_2 / 0 \leq s_1, s_2 \leq t \leq T\}$  функций, симметричных по второму и третьему аргументу [13].

Тогда задача идентификации ядер  $K_1$ ,  $K_2$  из (1) сводится к решению системы интегральных уравнений

$$\begin{aligned} & y_1^\alpha(t, \omega_1, \omega_2) - \alpha \int_0^{\omega_1} K_1(t, s_1)ds_1 + \alpha \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_1(t, s_1)ds_1 = \\ & = 3y_1^\alpha(t, \omega_1, 0) - 3y_1^\alpha(t, 0, \omega_1 + \omega_2) + y_1^\alpha(t, \omega_1 + \omega_2, -\omega_2) - \\ & - 7\alpha \int_0^{\omega_1} K_1(t, s_1)ds_1 - 5\alpha \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_1(t, s_1)ds_1, \\ & y_1^\alpha(t, \omega_1, \omega_2) = \alpha \int_0^{\omega_1} K_1(t, s_1)ds_1 - \alpha \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_1(t, s_1)ds_1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\alpha^2 \int_0^{\omega_1} \int_0^{\omega_1} K_2(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2 - 2\alpha^2 \int_0^{\omega_1} \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_2(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2 + \\
 & -\alpha^2 \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} \int_{\omega_1}^{\omega_1+\omega_2} K_2(t, s_1, s_2) ds_1 ds_2 .
 \end{aligned}$$

Отсюда

$$K_1(t, \omega_1) = \frac{\partial f_1(t, \omega_1, 0)}{\partial \omega_1}, \quad K_2(t, \omega_1, \omega_1 + \omega_2) = -\frac{1}{4} \frac{\partial^2 f_2(t, \omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1 \partial \omega_2},$$

где  $f_1(t, \omega_1, 0) = \frac{y^\alpha(t, \omega_1, 0) - y^\alpha(t, 0, \omega_1)}{2\alpha}$ .

**Вычислительный эксперимент.** Продемонстрируем на примере эталонной динамической системы эффект повышения точности моделирования за счет использования нестационарной модели (1) и комбинированной модели [11]

$$y_2(t) = \int_0^t K_1(t, s_1) x(s_1) ds_1 + \int_0^t \int_0^t \widehat{K}_2(s_1, s_2) \prod_{i=1}^2 x(t - s_i) ds_i, \quad (3)$$

полученной путем замены стационарного линейного слагаемого из

$$y_3(t) = \int_0^t \widehat{K}_1(s_1) x(t - s_1) ds_1 + \int_0^t \int_0^t \widehat{K}_2(s_1, s_2) \prod_{i=1}^2 x(t - s_i) ds_i \quad (4)$$

на нестационарное. В качестве эталонной динамической системы выберем ряд (1) с ядрами  $K_m = \frac{1}{m!}$ , так что

$$y_{et}(t) = \sum_{m=1}^N \frac{1}{m!} \left( \int_0^t x(s) ds \right)^m. \quad (5)$$

В качестве критерия точности моделирования выбираем значения невязок при  $t = T$  между откликами  $y_{et}^\beta(t)$  и  $y_j^\beta(t)$ ,  $j = \overline{1, 3}$ , на входные сигналы с амплитудами  $0, 01 \leq \beta \leq B \cdot 0, 01$ ,  $B = 25$ :

$$\varepsilon_j = \frac{1}{B} \sum_{\beta=1}^B \left| y_{et}^\beta(T) - y_j^\beta(T) \right|, \quad \Delta_j = \frac{1}{B} \sum_{\beta=1}^B \frac{\left| y_{et}^\beta(T) - y_j^\beta(T) \right|}{y_{et}^\beta(T)} \cdot 100\%. \quad (6)$$

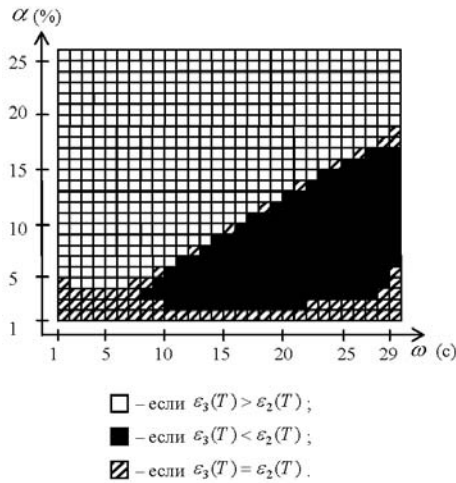
Предположим, что в модели (5)  $N = 3$ . Ядра Вольтерры в моделях (3), (4) соответственно равны:

$$K_1(t, \omega) = 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 \omega^2, \quad \widehat{K}_1(t) = 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 t^2, \quad \widehat{K}_2 = \frac{1}{2}.$$

В качестве допустимого считаем множество  $X(B, T)$  входных сигналов вида

$$x_{\omega}^{\beta}(t) = \beta(I(t) - I(t - \omega)). \quad (7)$$

Для сравнения эффективности применения (3) и (4) были получены значения невязок (6) с точностью  $\delta = 10^{-5}$  для  $1 \leq \omega \leq 29$ ,  $T = 30$  (рис. 1).



**Рис. 1.** Результаты вычислительных экспериментов для сигналов (7)

Максимальные значения невязок (6) при  $j = 2, 3$  соответственно равны:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{2\max} &= 0,0006, \quad \Delta_{2\max} = 0,60 \% , \\ \varepsilon_{3\max} &= 0,0011, \quad \Delta_{3\max} = 3,01 \% . \end{aligned}$$

Предположим далее, что в (5)  $N = 4$ . Тогда ядра Вольтерры в моделях (1), (3), (4) соответственно равны:

$$\begin{aligned} K_1(t, \omega_1) &= 1 + \frac{\alpha^2}{2} \omega_1^2, \quad K_2(t, \omega_1, \omega_1 + \omega_2) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{4} (\omega_1 - \omega_2)^2, \\ \hat{K}_1(t) &= 1 + \frac{1}{2} \alpha^2 t^2, \quad \hat{K}_2(t, t - \omega_1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \alpha^2 \omega_1^2 . \end{aligned}$$

В качестве допустимого выберем множество  $X(B, T)$  входных сигналов вида

$$x_{\omega}^{\beta}(t) = \beta(I(t) - 2(I(t - 2\omega) - I(t - \omega)) + I(t - T)), \quad (8)$$

где  $0 \leq 2\omega \leq t \leq T$ . На рис. 2 выделена область применимости исследуемых интегральных моделей.

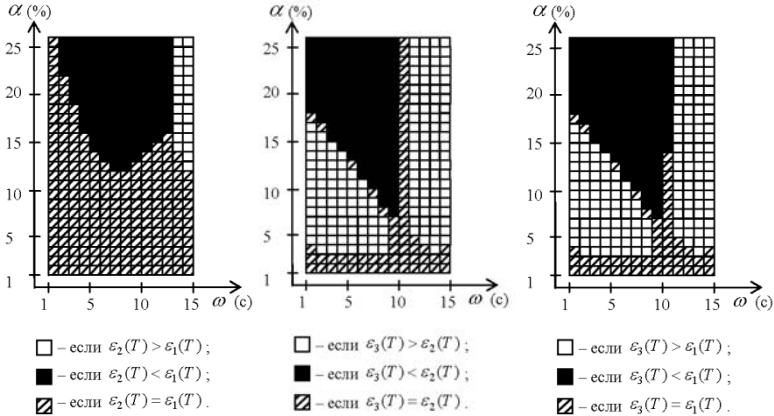


Рис. 2. Результаты вычислительных экспериментов для сигналов (8)

Максимальные значения невязок  $\varepsilon_j$  и  $\Delta_j$  при  $j = \overline{1,3}$  соответственно равны:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1\max} &= 0,0011; \Delta_{1\max} = 6,55 \% ; \\ \varepsilon_{2\max} &= 0,0011; \Delta_{2\max} = 6,78 \% ; \\ \varepsilon_{3\max} &= 0,0009; \Delta_{3\max} = 10,64 \% . \end{aligned}$$

Вычислительный эксперимент показал, что применение моделей вида (1), (3) с нестационарными составляющими является более эффективным, даже в случае, когда эталонный динамический объект не обладает свойством нестационарности.

**Выводы.** В работе рассмотрен алгоритм построения нестационарных квадратичных полиномов Вольтерры для описания динамической системы типа «вход-выход». На эталонной математической модели проиллюстрирован эффект повышения точности моделирования. Дальнейшее развитие работы связано с получением областей применимости нестационарных интегральных моделей для описания эталонных моделей энергетических систем с помощью авторского программного комплекса [14].

### Список использованной литературы:

1. Giannakins G. B., Serpedin E. A. A bibliography on nonlinear system identification. *Signal Processing*. 2001. Vol. 81. P. 533–580.
2. Цыпкин Я. З., Попков Ю. С. Теория нелинейных импульсных систем. М.: Наука, 1973.
3. Пупков К. А., Капалин В. И., Ющенко А. С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976.
4. Веников В. А., Суханов О. А. Кибернетические модели электрических систем. М.: Энергоиздат, 1982.

5. Григоренко С. Н., Павленко С. В., Павленко В. Д., Фомин А. А. Информационная технология диагностирования состояний электродвигателей на основе моделей Вольтерра. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2014. № 11 (70). Т. 4. С. 38–43.
6. Солодуша С. В. К задаче моделирования динамики теплообменников квадратичными полиномами Вольтерра. *Автоматика и телемеханика*. 2014. № 1. С. 105–114.
7. Фомин А. А., Масри М. М., Павленко В. Д., Фёдорова А. Н. Метод и информационная технология построения непараметрической динамической модели глазо-двигательного аппарата. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. 2015. № 2/9 (74). С. 64–69.
8. Герасимов Д. О., Солодуша С. В., Суслов К. В. Разработка алгоритма функционирования системы управления ветроэнергетическими установками. *Известия РАН. Энергетика*. 2016. № 6. С. 68–78.
9. Эйкхофф П. Основы идентификации систем управления. М.: Мир, 1975.
10. Апарцин А. С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999.
11. Апарцин А. С. Новый алгоритм моделирования нелинейных динамических систем на базе полиномов Вольтерра. *Оптимизация, управление, интеллект*. 2000. № 5. С. 26–32.
12. Апарцин А. С., Солодуша С. В. Об оптимизации амплитуд тестовых сигналов при идентификации ядер Вольтерра. *Автоматика и телемеханика*. 2004. № 3. С. 116–124.
13. Апарцин А. С. О новых классах линейных многомерных уравнений I рода типа Вольтерра. *Известия высших учебных заведений. Математика*. 1995. № 11. С. 28–41.
14. Солодуша С. В. Программный комплекс для моделирования систем тепло- и электроэнергетики Труды XVI-ой Междунар. конф. «Системы проектирования, технологической подготовки производства и управления этапами жизненного цикла промышленного продукта (CAD/CAM/PDM–2016)». М.: ООО «Аналитик», 2016. С. 314–318.

The paper proposes a technique for the construction of a non-stationary Volterra quadratic polynomial that approximates a nonlinear dynamic system in the case of a scalar input. The technique is based on the consideration of necessary conditions for solving the Volterra integral equations of the first kind. The presented calculation results illustrate an improvement in the accuracy of modeling due to better consideration of data on the system outputs to the test inputs.

**Key words:** *nonlinear dynamical system, identification, Volterra series, Volterra kernels.*

Получено 07.02.2017