УДК 519.6

**І. В. Бейко*,** д-р. техн. наук, професор,
**О. В. Щирба**,** асистентка

* Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені І. Сікорського», м. Київ,
** Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

# МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ УЗАГАЛЬНЕНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ В. М. ГЛУШКОВА

У даній роботі узагальнюються макромоделі В.М. Глушкова на випадок керованих алгебро-інтегро-диференціальних рівнянь із частинними похідними і розвиваються методи асимптотично-розв'язуючих операторів для побудови узагальнених розв'язків з використанням швидкозбіжних алгоритмів внутрішньої точки.

**Ключові слова:** *керовані процеси, оптимальне керування, динамічні моделі розвитку, розв'язуючі оператори, узагальнені розв'язки.*

**Вступ.** Створені за останні роки математично-комп'ютерні засоби оптимізованих обчислень розширили можливості практичної побудови розв'язків оптимізаційних задач великих розмірностей. До таких задач зводяться задачі комплексного моделювання і оптимального керування взаємодіючими процесами із зосередженими та розподіленими параметрами в умовах складних фазових обмежень та неповних даних, зокрема, задачі академіка В. М. Глушкова [1] та пов'язані із ними задачі комплексної оптимізації взаємодіючих процесів державного управління на регіональному, загальнодержавному та міждержавному рівнях. Академік В. М. Глушков вперше побудував динамічні моделі розвитку, сформулював відповідні задачі оптимального керування і організував у кібернетичному центрі у Києві побудову необхідного відомого у світі hard-and-soft інструментарію, що включав, зокрема, перший у світі ПК «Промінь» та відомі світу методи і алгоритми опуклої, нелінійної, мінімаксної та стохастичної оптимізації з використанням опорних градієнтів, квазіградієнтів, розтягування простору тощо. Основні труднощі відшукання оптимального керування для задачі В. М. Глушкова пов'язані із невідомою областю інтегрування та відповідною неможливістю скористатися принципом максимуму Л. С. Понтрягіна для відшукання оптимального керування. Вперше наближені розв'язки оптимізаційної задачі В. М. Глушкова були побудовані за допомогою апроксимації оптимального керування сплайн-функціями [2] (на даний час такі чисельні алгоритми знаходять широкі практичні застосування). Точні оптимальні керування знайдені за необхідними умовами оптимальності, отриманими з використанням градієнтів мінімізованих функціоналів у функціональних просторах функцій керування [3].

Оптимальний розв'язок задачі В. М. Глушкова визначається оптимальною долею $y(t) \in [0,1]$ кількості ресурсів, виділених на виробництво засобів виробництва, що максимізує значення функціонала $J(y) = \int_0^T c(t)dt$ (критерія оптимальності) на фазових траєкторіях макроекономічної моделі В. М. Глушкова

$$m(t) = \int_{a(t)}^t \alpha(t,\tau)m(\tau)y(\tau)d\tau, \;\; c(t) = \int_{a(t)}^t \beta(t,\tau)m(\tau)(1-y(\tau))d\tau,$$

$$L(t) = \int_{a(t)}^t y(\tau)d\tau,$$

де $m(t)$ — темпи виробництва засобів виробництва, $c(t)$ — темпи виробництва товарів споживання, $\alpha(t,\tau)$ та $\beta(t,\tau)$ — інтенсивності використання ресурсів $m(\tau)y(\tau)$ та $m(\tau)(1-y(\tau))$ відповідно, а функцією $a(t) \in [0,t]$ визначається оптимальний термін $t-a(t)$ використання засобів виробництва, створених до моменту часу *t*.

Оскільки теорема принципу максимуму Л. С. Понтрягіна не поширюється на задачі В. М. Глушкова, то оптимальне керування для цих задач було отримане за допомогою спеціального варіаційного методу побудови градієнтів мінімізованого функціоналу для випадку змінних (залежних від невідомих керувань) областей інтегрування [3]. За допомогою цього методу будуються градієнти для більш загальних функціоналів

$$J(y) = \int_0^T \sum_{j=1}^M \int_{a_j(t)}^t \beta_{ij}(t,\tau)m_j(\tau)y_j(\tau)d\tau \,,$$

заданих на розв'язках узагальнених багатосекторних динамічних моделей розвитку

$$\sum_{i=1}^n \int_{a_j(t)}^t K_{ij}(t,\tau)m_j(\tau)d\tau = F_i(t), \;\; i = 1,...,N,$$

$$m_i(t) = \sum_{j=1}^M \int_{a_j(t)}^t \alpha_{ij}(t,\tau)m_j(\tau)y_j(\tau)d\tau,$$

де $m_i(t)$ — темпи виробництва *i*-х засобів виробництва, $\alpha_{ij}(t,\tau)$ та $K_{ij}(t,\tau)$ — інтенсивності використання ресурсів $m_j(\tau)y_j(\tau)$ та $m_j(\tau)$, а функцією $a_j(t) \in [0,t]$ визначається оптимальний термін $t-a_j(t)$ використання *j*-х засобів виробництва, створених до моменту часу *t*.

Градієнти у функціональних просторах керувань $u$ для складніших функціоналів $J(x(u),u)$,

$$J(x,u) = B^0(x(t_0), x(T), u, \int_{t_0}^{T} B^1(\dot{x}(t), x(t), u(t), t,$$

$$\int_{t_0}^{T} B^2(\dot{x}(s), x(s), u(s), s, \dot{x}(t), x(t), u(t), t) ds) dt),$$

визначених на керуваннях $u$ і на відповідних розв'язках $x(u)$ узагальнених динамічних моделей

$$f^0(x(t_0), u, \dot{x}(t), x(t), u(t), t, \int_{D(t,u,x)} f^1\left(x(s), u(s), s, x(t), u(t), t\right) ds) = 0$$

із залежними від траєкторій та керувань областями інтегрування $D(t,x,u)$, будуються за методами асимптотично-розв'язуючих операторів і використовуються для побудови оптимального керування $u^* = \arg\min_u J(x(u),u)$ градієнтними методами.

Узагальненою оптимізаційною задачею на випадок алгебро-інтегро-диференціальних рівнянь із частинними похідними є задача відшукання розв'язку $x: D \to R^n$, $u: D \to R^r$ граф-операторної моделі $A(x,u) = 0$, вершинами якої є підсистеми алгебро-інтегро-диференціальних рівнянь

$$\overline{f}_{ij}^k(t,s,x,u) = f_{ij}^k(t,s,x(t,s),u(t,s),F^{f_{ij}^k}(x,u,t,s)) = 0,$$

$$(t,s) \in D_j^i(x,u)\ ,\ k = \overline{1,k_{ij}}\ ,$$

який мінімізує функціонал

$$J(x,u) = \iint_D \varphi_0(t,s,x(t,s),u(t,s),F^0(x,u,t,s)) ds dt\ ,$$

де $f_{ij}^k$ — задані функції, $D_j^i(x,u) \subset D$ — задані $j$-параметричні підмножини, $j = \overline{1,m+1}$, $D_0^i(x,u) = \{t_q^i(x,u), s_q^i(x,u)\}_{q=1}^{q_i} \subset D$ — задані підмножини, $i = \overline{1,i_j}$, а $F^{f_{ij}^k}$ і $F^0$ — задані композиції операторів

$$F_1(x,t,s,\alpha,\beta) = \frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial t^{\alpha} \partial s^{\beta}} x(t,s)\ ,$$

$$F_2(F_1,x,t,s,\Omega) = (F_1(x,t+t^1(x,t),s+s^1(x,t),\alpha^1,\beta^1),...,$$

$$F_1(x,t+t^{n_\Omega}(x,t),s+s^{n_\Omega}(x,t),\alpha^{n_\Omega},\beta^{n_\Omega}))\ ,$$

$$F_3(x,u,t,s,\varphi,\tilde{\Omega}) = \iint\limits_{\tilde{\Omega}(t,s,x,u)} \varphi(t,s,u(t,s),F_1(x,t+\tau,s+\sigma,\alpha,\beta))d\tau d\sigma,$$

із змінними областями інтегрування $\tilde{\Omega}(t,s,x,u)$ і часовими та фазовими зсувами $\Omega(t,s)=\{t^i(t,s),s^i(t,s),\alpha^i,\beta^i\}_{i=1}^{n_\Omega}$.

Складену із усіх таких підсистем узагальнену модель $A(x,u)=0$ називаємо $J\delta$-адекватною на множині $U$, якщо для кожного допустимого керування $u\in U$ і для кожного її розв’язку $x(u)$ значення $w:=J(x(u),u)$ задовольняє нерівність $\max\limits_{x\in\tilde{X}(u)}\|w-J(x,u)\|\le\delta$, де $\tilde{X}(u)$ — множина реально допустимих станів модельованої системи в умовах реалізації керування $u$.

Очевидною достатньою умовою $J\delta$-адекватності узагальненої моделі $A(x,u)=0$ є існування функції $F$, яка задовольняє нерівність $\max\limits_{u\in U}\|F(u)-J(x,u)\|\le\delta$. Така функція $F$ визначається розв’язуючим оператором $\Re^\delta:\left(P\times W_A\right)\to W_J$, який для частинних функцій $A:(X\times U)\to W_A,\;\; J:(X\times U)\to W_J$ на допустимій множині $M\subset X\times U$ задовольняє за деякою мірою $\mu:2^{W_B}\to R_+$ нерівність $\max\limits_{x\in P_M(u)} d(\Re^\delta,u,M)\le\delta,$ де

$$P_M(u)=\left\{x\in X\mid (x,u)\in M\right\},$$

$$d(\Re^\delta,u,M)=\mu\Big(\{w\mid w=J(x,u)-\Re^\delta\left(u,A(x,u)\right),\,(x,u)\in M\}\Big).$$

Аналогічно у околі наближеного розв’язку $(\bar{x},\bar{u})\in M$ визначається асимптотично-розв’язуючий оператор $F^s$ за умовою $d(J^{sq},u,M)=\rho^s(u,\bar{u})+\rho^q(x,\bar{x}).$ У випадку існування $\Re^\delta$ модель $A(x,u)=0$ є $B\delta$-адекватною на $M$, мінімізатор функціонала $\Re^\delta\left(u,0\right)$ є наближеним розв’язком узагальненої задачі, а у випадку існування $\Re^0$ маємо $F(u)=\Re\left(u,0\right)$ і тому оптимальне керування $u^*$, яке на допустимій множині $\Omega$ мінімізує функціонал $J(x,u)$, є розв’язком спрощеної оптимізаційної задачі $u^*=\arg\min\limits_{u\in\Omega}F(u)$. Якщо для деякої заданої керованої системи побудова розв’язуючого оператора є надто трудомісткою, то використовуємо асимптотично-розв’язуючі оператори, які для малих порядків $s=2,\; q=2$ будуються простіше ніж розв’язуючі оператори, і на цій основі використовуємо ітераційні алгоритми послідовного уточнення узагальнених розв’язків із монотонним зменшенням значення мінімізованого функціонала, що досягається зменшенням асимптотично-розв’язуючого оператора. Узагальнений розв’язок визначаємо як підпослідовність послідовності $\{(x_r, u_r)\}_{r=1}^{\infty} \in \Omega(\alpha_r)$, для якої виконуються нерівності $B(x_r, u_r) \le \inf\limits_{(x,u)\in\Omega(\alpha_r)} B(x,u) + \alpha_r$ на деякій монотонно спадній послідовності $\alpha_r \to \overline{\alpha}$, де $\Omega(\alpha_r)$ є множиною тих значень $(x,u)$, які при $\overline{h}_{ij}^k := -\overline{f}_{ij}^k$ для всіх $j = \overline{0, m+1}$, $i = \overline{1, i_j}$ задовольняють нерівності

$$\overline{f}_{ij}^k(t,s,x,u) \le \alpha_r,\ \overline{h}_{ij}^k(t,s,x,u) \le \alpha_r,\ (t,s) \in D_j^i(x,u),\ k = \overline{1, k_{ij}},$$

а значення $\overline{\alpha}$ визначається як мінімальне число, для якого при всіх $\alpha > \overline{\alpha}$ множина $\Omega(\alpha)$ є тілесною. Побудову узагальненого розв’язку чисельними методами здійснюємо за допомогою обчислення такої послідовності функцій $(x_r(t,s), u_r(t,s))$ у вкладених множинах $X^{n_x(r)} \subset X^{n_x(r)+1}$, $U^{n_u(r)} \subset U^{n_u(r)+1}$ параметричних функцій

$$(x_r(t,s), u_r(t,s)) = (x_{n_x(r)}(p_r, t, s), u_{n_u(r)}(q_r, t, s)) \in X^{n_x(r)} \times U^{n_u(r)}$$

(визначених параметрами $p_r \in R^{n_x(r)}$ і $q_r \in R^{n_u(r)}$), що для будь-якого значення $\alpha > \overline{\alpha}$ знайдеться таке число $r$, що виконаються нерівності

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \overline{f}_{ij}^k(t,s,x_{n_x(r)}(p_r,\cdot,\cdot), u_{n_u(r)}(q_r,\cdot,\cdot)) \le \alpha,\ k = \overline{1, k_{ij}}$$

$$\max_{(t,s)\in D_j^i(x,u)} \overline{h}_{ij}^k(t,s,x_{n_x(r)}(p_k,\cdot,\cdot), u_{n_u(r)}(q_k,\cdot,\cdot)) \le \alpha,\ k = \overline{1, k_{ij}},$$

$$B(x_{n_x(r)}(p_k,\cdot,\cdot), u_{n_u(r)}(q_k,\cdot,\cdot)) \le \inf_{(x,u)\in\Omega(\alpha)} B(x,u) + \alpha.$$

Для прискорення збіжності ітераційного алгоритму використовуємо методи внутрішньої точки. З цією метою доцільно перепозначаємо пару шуканих функцій $(x,u)$ через $x$ із відповідним перепозначенням сукупності усіх рівнянь узагальненої моделі одним функціональним рівнянням $c(x) = 0,$ а сукупністі усіх нерівностей — одною функціональною нерівністю $g(x) \ge 0,$ вважаючи, що упорядкування за нерівностями в просторі $Z_g$ задано випуклим замкненим конусом *K*. Необхідні умови оптимальності розв’язку $x^* = \arg\min\limits_x J(x) \mid c(x) = 0, g(x) \ge 0$ узагальненої задачі формулюються із використанням функції Лагранжа

$$L(x,\lambda,\eta) = J(x) - \langle \lambda, c(x) \rangle - \langle \eta, g(x) \rangle,$$

а саме: якщо $x$ є регулярним розв’язком узагальненої задачі, тобто $0 \in \operatorname{int}(g(x) + g'(x)X - K)$, то існують множники лагранжа $\lambda \in Z_c^*$ і $\eta \in Z_g^*$, $\eta \geq 0$, для яких $x$ є розв’язком системи

$$\partial_x L(x, \lambda, \eta) = 0, \ \ c(x) = 0, \ \ \langle \eta, g(x) \rangle = 0.$$

У методі внутрішньої точки замість жорсткої умови $\langle \eta, g(x) \rangle = 0$ використовується ослаблена умова $\langle \eta, g(x) \rangle = \mu > 0$ і обчислюється розв’язок $(x(\mu), \lambda(\mu), \eta(\mu), w(\mu))$ системи

$$\partial_x L(x, \lambda, \eta) = 0, \ \ c(x) = 0, \ \ w - g(x) = 0, \ \ \psi(w, \eta; \mu) = 0$$

із параметром $\mu > 0$ та функцією Фішера-Бурмайстера

$$\psi(a, b; \mu) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2 + 2\mu}\,.$$

За методом продовження по параметру визначається оптимальний розв’язок $x^* = \lim_{\mu \to 0} x(\mu)$. Продовження по параметру реалізуємо за швидкозбіжним ньютонівським алгоритмом

$$F'(v^k, \mu)\delta v^k = -F(v^k, \mu), \ v^{k+1} = v^k + \lambda \delta v^k,$$

де $F(v, \mu) = (\partial_x L(x, \lambda, \eta), -c(x), w - g(x), \psi(w, \eta; \mu))^T$,

$$F'(v, \mu) = \begin{bmatrix} \partial_x^2 L(x, \lambda, \eta) & -c'(x)^* & -g'(x)^* & 0 \\ -c'(x) & 0 & 0 & 0 \\ -g'(x) & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \partial_\eta(w, \eta; \mu) & \partial_w \psi(w, \eta; \mu) \end{bmatrix}.$$

**Висновки.** Практична побудова розв’язків узагальнених оптимізаційних задач зводиться до розв’язання спрощених задач мінімізації розв’язуючих операторів. У випадках надто трудомісткого обчислення розв’язуючого оператора використовуються асимптотично-розв’язуючі оператори і будуються градієнти мінімізованих функціоналів для реалізації прискорених алгоритмів внутрішньої точки.

## Список використаних джерел:


1. Глушков В. М. Об одном классе динамических макроэкономических моделей. *Управляющие системы и машины*. 1977. № 2. С. 3–6.
2. Иванов В. В., Бесараб П. Н., Людвиченко В. О. О пакете программ для численной реализации двупродуктовой модели развивающихся систем. *УСиМ*. 1981. № 5. С. 109–111.
3. Иванов В. В., Бейко М. Ф. Численное построение оптимального управления для многомерного варианта модели В.М. Глушкова. *Вычислительная и прикладная математика*. 1981. Вып. 45. С. 118–121.

4. Бейко І. В., Зінько П. М., Наконечний О. Г. Задачі, методи і алгоритми оптимізації: навч. посібник, 2-ге вид. перероб. Київ: ВПЦ «Київський університет». 2012. 799 с.
5. Maurer H. First and second order sufficient optimality conditions in mathematical programming and optimal control. *Math. Programming Study*, 14. 1981. P. 163–177.

This paper summarizes macromodels of V. M. Glushkov on a case of algebraic-integral-differential equations with partial derivatives and develop methods of asymptotic-solve operators for constructing generalized solutions using accelerated interior point algorithms.

**Key words:** *control processes, optimal control, dynamic development models, solving operators, generalized solutions.*

Одержано 23.02.2017

УДК 621.395.4 (045)

**А. Я. Белецкий,** д-р техн. наук, профессор

Национальный авиационный университет, г. Киев

## УОЛША-ПОДОБНЫЕ СИСТЕМЫ СЕКВЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ

Предложен алгоритм построения систем дискретных Уолша-подобных (0, 1)-секвентных функций (базисов), в которых число нулей и единиц в каждой половине интервала определения совсем не обязательно является одинаковым, как это имеет место в классических системах функций Уолша. Обсуждаются области применения систем секвентных функций.

**Ключевые слова**: *системы секвентных функций, метод направленного перебора.*

**Введение.** Теория и техника спектрального анализа сигналов ориентирована в основном на сигналы синусоидальных функций. Наряду с ними широкое применение в различных приложениях находят функции (волны) несинусоидальных форм. Типичным примером несинусоидальных волн являются функции Уолша [1], отличительная особенность которых состоит в том, что в пространстве оригиналов на двоично степенном интервале определения от $0$ до $N = 2^n$, где $n$ — натуральное число, функции Уолша принимают кусочно-постоянные значения $+1$ или $-1$, заменой которых соответственно числами $0$ и $1$ переводят системы в пространство изображений.

Спектральный анализ дискретных сигналов в большинстве случаев строится на основе базисов *дискретных экспоненциальных функций*, образуемых временной дискретизацией комплексно-знач-