ISSN 2227-1252
Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика, 2014, № 5

МОСТИ ТА ТУНЕЛІ: ТЕОРІЯ, ДОСЛІДЖЕННЯ, ПРАКТИКА

УДК 691:699.86.002.3

А. Д. МАЛЫЙ[1], Ю. Я. ПОПУДНЯК[2], Т. В. УЛЬЧЕНКО[3*], Т. В. СТАРОСОЛЬСКАЯ[4]

[1] Каф. «Графика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (095) 554 83 32
[2] Каф. «Графика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (067) 774 17 47
[3] Каф. «Графика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (063) 774 66 58, эл. почта ulchenkotv@ya.ru
[4] Каф. «Графика», Днепропетровский национальный университет железнодорожного транспорта имени В. Лазаряна, ул. Лазаряна, 2, Днепропетровск, Украина, 49010, тел. +38 (066) 791 35 94

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ГРАФИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОСТРАНСТВА

Цель. Целью настоящей работы является исследование квазилинейных моделей пространства. **Методика.** Вопросы моделирования пространства, в том числе построение графических плоскостных моделей пространства, актуальны, как в теоретическом плане, так и в плане применения исследованных на их основе нелинейных поверхностей для конструирования технических форм деталей и агрегатов рабочих органов строительных машин, срединных поверхностей оболочек, поверхностей турбулентных лопаток и др. **Результаты**. В статье решались задачи: 1. каким требованиям должны удовлетворять проецирующие кривые, другими словами, какого типа кривые могут быть использованы для создания квазилинейной модели пространства; 2. исследовалось пространственное преобразование, порождаемое квазимоделью преобразования двух совмещенных пространств; поданы конструктивные способы осуществления указанного преобразования на эпюре Монжа. **Практическая значимость**. Рассмотренное преобразование пространства может быть применено для конструирования технических форм, поверхностей сложных деталей и конструкций для строительства тоннелей и мостов.

Ключевые слова: моделирование пространства; казилинейные модели; преобразование пространства; нелинейные поверхности; графическая конструкция; аксиоматическая конструкция

Постановка проблемы

Вопросы моделирования пространства, в том числе построение графических плоскостных моделей пространства, актуальны, как в теоретическом плане, так и в плане применения исследованных на их основе нелинейных поверхностей для конструирования технических форм деталей и агрегатов рабочих органов строительных машин, срединных поверхностей оболочек, поверхностей турбулентных лопаток и др.

Анализ предварительных исследований

Проведенный анализ использования прямолинейных конгруэнций в целях проецирования исследован довольно полно [1], [2], [3], [4], [6] а применение конгруэнций кривых – в отдельных, частных случаях [7] и указал на проблемы использования

Цель работы

Целью настоящей работы является исследование квазилинейных моделей пространства

Изложение основного материала

Любая графическая модель точечного пространства состоит из двух частей: графической конструкции, моделирующей произвольную точку пространства, и аксиоматической, содержащей сведения об аппарате отображения, с помощью которого получена графическая конструкция модели. Например, в методе двух изображений графической конструкцией, моделирующей произвольную точку трехмерного пространства, является пара символизированных точек, лежащих на одной прямой плоского пучка прямых, а аксиоматическая содержит данные об аппарате проецирования. В частном случае метода двух изображений – методе Монжа графической частью модели точки про-

ISSN 2227-1252
Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика, 2014, № 5

странства является пара точек лежащих на одной прямой перпендикулярной к фиксированной прямой плоскости отображения. Аксиоматическая часть содержит сведения о том, что в этом методе проецирования на плоскости проекций ортогональное и способ совмещения плоскостей проекций в одну плоскость.

Внесем добавление в аксиоматическую часть модели Монжа. Будем считать, что пара прямоугольных проекций A1, A2 точки A пространства R3, получена проектированием элементами прямолинейных или криволинейных конгруэнций линии иной точки A' пространства R'3 (рис. 1).

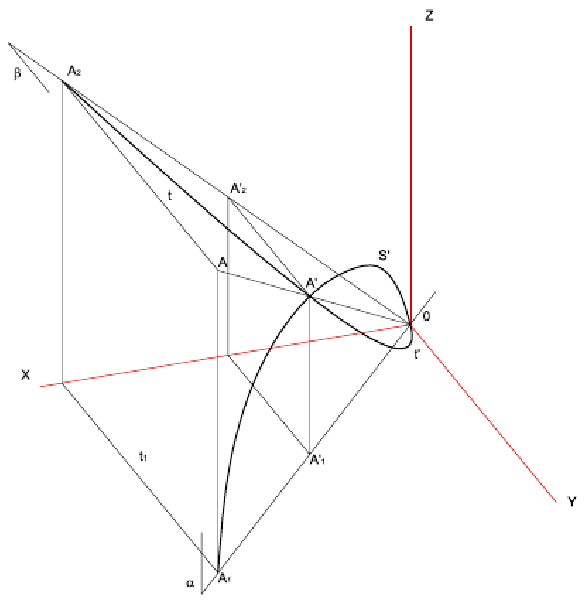

Рис. 1. Аксиоматическая модель Монжа

В этом случае как бы линейная, по своей графической конструкции модель, будет моделью нелинейных образов пространства (квазилинейная).

Целью настоящей работы является исследование квазилинейных моделей пространства для случая, когда проецирующие кривые s'i, t'i (см. рис. 1) являются плоскими, расположенными в пучках плоскостей с осями Oz и Oy соответственно и преобразования пространства R в совмещенное с ним пространство R' и наоборот.

Для достижения этой цели необходимо решить задачи:

1. Каким требованиям должны удовлетворять проецирующие кривые, другими словами, какого типа кривые могут быть использованы для создания квазилинейной модели пространства.

2. Исследовать синтетически и аналитически пространственное преобразование, порождаемое квазимоделью преобразования двух совмещенных пространств.

3. Дать конструктивные способы осуществления указанного преобразования на эпюре Монжа.

В качестве проецирующей линии будем использовать алгебраические кривые. Они должны удовлетворять двум требованиям. Во-первых каждая такая кривая должна пересекать соответствующую плоскость проекций только в одной точке, кроме точки O (см. Рис. 1). Иначе модель не будет однозначной. Следовательно для каждой кривой s'i, t'i точка O должна быть ($n-1$)-кратной точкой кривой порядка n.

Во вторых, каждая из этих кривых должна обладать свойством, распадаться в плоскостях проекций на прямые si2, ti2 и оси Oz и Oy , считаемы ($n-1$) раз соответственно. Графическая конструкция изображенная на рис. 1 допускает такую возможность. В самом деле, если плоскость α вращать вокруг оси Oz в направлении к плоскости x Oz, то расстояние между соответственными точками A и A' будет уменьшаться, кривая s'i порядка n будет становиться все «круче», а при совмещении плоскости α с плоскостью Oz она распадется на прямую s2 и ось Oz, считаемую ($n-1$) раз, так как точка O ($n-1$)-кратна.

Указанным требованиям удовлетворяют плоские кривые, задаваемые уравнениями:

$$F_n(x,y)+F_{n-1}(x,y)=0 \tag{1}$$

относительно декартовой прямоугольной системы координат с началом координат в точке кратности ($n-1$). В уравнении (1) F_n и F_{n-1} – однородные многочлены относительно x и y степени n и ($n-1$) соответственно.

Для проецирования элементов пространства на две плоскости проекций можно использовать любую пару конкретных кривых (1) одного и того же порядка или разных порядков. Можно также использовать проецирование на одну плоскость проекций кривой (1), на другую – лучами линейной конгруэнции прямых.

Изучим модель, в которой проецирование на фронтальную плоскость проекций осуществля-

ISSN 2227-1252
Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика, 2014, № 5

ется лучами параболической линейной конгруэнции с фокальной прямой Oy (рис. 2) перспективными относительно плоскости *x* Oz (П2) множеству фронтально проецирующих прямых.

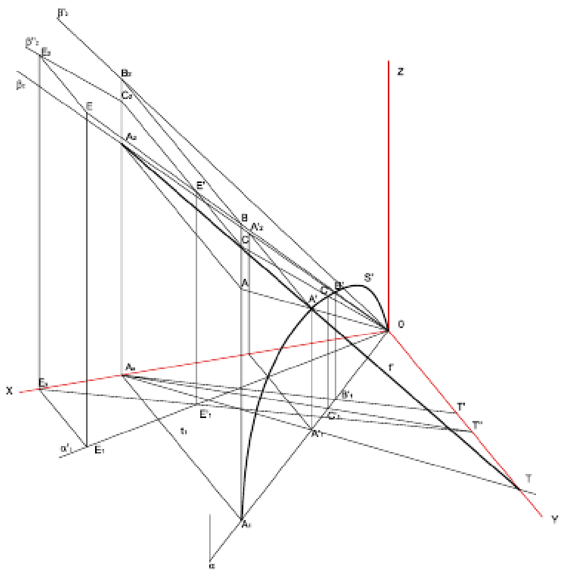

Рис. 2. Проецирование на фронтальную плоскость лучами параболической линейной конгруэнции с фокальной прямой Oy

Проецирование на горизонтальную плоскость проекций *x* Oy (П1) будем осуществлять множеством коник s' касательных в начале координат оси Oz и перспективных относительно горизонтальной плоскости проекций множеству горизонтально проецирующих прямых.

Зададим в системе двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций произвольную точку А (см. рис. 2) и проведем через нее две проецирующие плоскости, α – горизонтально проецирующую, β – фронтально проецирующую, проходящие через оси Oz и Oy соответственно. Соединив точку А с началом координат О, получим линию пересечения этих плоскостей ОА. В плоскости β через фронтальную проекцию А2 точки проведем произвольную прямую t', которая пересечет ось Oy в какой-то точке Т. Прямая t' пересечет линию ОА в точке А'. Точка А' определит единственную конику s' касательную к Oz в точке О и к проецирующей прямой АА' в точке А1.

Примем конику s' и прямую t' за обобщенные проецирующие линии на П1 и П2 соответственно. В таком случае с прямоугольными проекциями А1, А2 совпадут обобщенные проекции другой точки А', т. е. прямоугольные проекции точки А становятся моделью иной точки пространства R'3 совмещенного с пространством R3.

В плоскости α устанавливается взаимнооднозначное центральное преобразование с центром О, в котором горизонтально проецирующей прямой АА1 соответствует коника s' и наоборот. В плоскости β в этом преобразовании соответственным является фронтально проецирующая прямая АА2 и прямая t'.

Вращая плоскость α вокруг оси Oz будем получать новые точки А'i аналогичные точке А' и новые коники s'1, которые составят непрерывный каркас поверхности Г' соответственной дважды проецирующей плоскости А1АА2. Поверхность Г' будем называть обобщенной проецирующей поверхностью. Это будет линейчатая поверхность третьего порядка.

Действительно рассмотрим линейную конгруэнцию Кг1,1 первого порядка и первого класса с фокальными прямыми Oy и А2Ах. Коника s' погруженная в эту конгруэнцию выделит линейчатую поверхность, порядок которой равен сумме класса и порядка Кг1,1 и порядка погружаемой в конгруэнцию кривой т. е. порядок поверхностей равен 1+1+2=4. Поскольку коника s' пересекает фокальную прямую Oy, то в этом случае порядок поверхностей снизится на единицу. Таким образом, обобщенная проецирующая поверхность Г' – третьего порядка. Любая плоскость пересекает такую поверхность по кривой третьего порядка γ'. В плоскостях α i эта кривая распадается на конику s'i и ось Oz. В горизонтальной плоскости проекций кривая γ' распадается на три прямые – A_1Ах и дважды считаемую ось Oy. Во фронтальной плоскости проекций она также распадается на три прямые А2Ах и дважды считаемую ось Oz.

Исследуем вопрос, что представляет собой множество прямых t'i пространства? Это важно для построения соответственных точек произвольным точкам пространства.

В плоскости β лежит пучок прямых с центром Т, т. е. плоскости β соответствует точка Т, как центр пучка прямых. Проведем плоскость β' и возьмем в ней точку В, лежащую на одной горизонтально проецирующей прямой с точкой А. Точке В на конике s' соответствует точка В' (рис. 3).

ISSN 2227-1252
Мости та тунелі: теорія, дослідження, практика, 2014, № 5

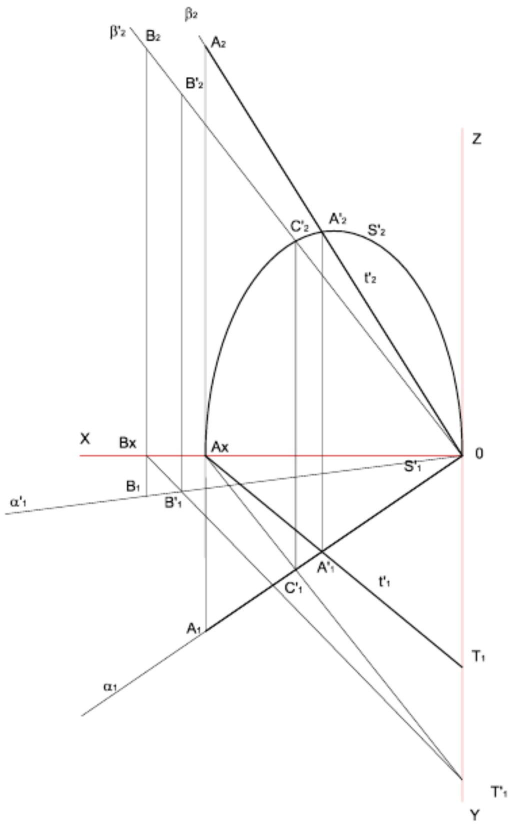

Рис. 3. Комплексный чертеж построения

Прямая B2 B' пересекает ось Oy в точке T '. В этой же точке ось Oy пересекает и проекция AxB'1 прямой B2 B'. Следовательно, плоскости β' на оси Oy соответствует точка T', как центр пучка прямых, лежащих в плоскости β'. Поскольку плоскость β' произвольная, то мы можем утверждать, что каждой плоскости βi на оси Oy соответствует точка, в каждой плоскости пучка с осью Oy лежит один пучок прямых с центром в соответствующей этой плоскости точке. Множество прямых таких пучков является параболической линейной конгруэнцией.

Вышеизложенное позволяет строить соответственные точки в рассматриваемом преобразовании W= R3→ R'3.

Возьмем произвольную точку E пространства R3 и построим соответственную ей точку пространства R'3. Через точку E проведем плоскость β'' из пучка плоскостей с осью Oy и найдем на этой оси точку T'' соответствующую плоскости β''. Плоскость β'' пересекает дважды проецирующую плоскость A1AxA2A по фронтально проецирующей прямой C2C. Точке C на конике s' соответствует точка C', лежащая на луче OC. Прямая C2C' пересекает ось Oy в точке T '' соответствующей плоскости β''. В этой же точке ось Oy пересекает горизонтальная проекция этой прямой Ax C1'. Точка T'', как было показано выше, является центром пучка прямых, входящих в проецирующую конгруэнцию Кг1,1 параболического типа. Горизонтальная проекция T''Ex проецирующего луча T''E2 пересечет проекцию α1' плоскости α', проведенной через точку E и ось Oz, в точке E1', которая является горизонтальной проекцией точки E' соответствующей точке E в преобразовании W. Точку E' находим на луче OE.

Рассмотренные построения просто осуществляются на комплексном чертеже. На рис. 3 заданы проекциями S1'S2' коника s' и прямая t' – проекциями t1' и t2', а также точка A(A1,A2). Для построения точки B' соответствующей произвольной точке B(B1,B2) пространства R3, через последнюю проведем плоскость β'. Плоскость β' пересекает конику s' в точке C'(C1',C'2). Проекция Ax C1' луча проецирующей конгруэнции пересекает ось Oy в точке T1' соответствующей плоскости β'. Горизонтальная проекция T1'Bx, проецирующего луча Кг1,1 на П2 точку B', пересекает проекцию α1' плоскости α', проведенной через точку B и ось Oz, в точке B1', являющейся горизонтальной проекцией точки B' соответствующей точке B в преобразовании W. Фронтальная проекция B2' точки B' находится на фронтальной проекции луча OB2. Таким образом, умея строить соответствующие точки в преобразовании W, можно построить образ пространства R'3 соответствующий любому образу пространства R3.

Выводы

Рассмотренное преобразование пространства может быть применено для конструирования технических форм, поверхностей сложных деталей и агрегатов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Джапаридзе, И. С. Конструктивное отображение проективных преобразований пространства [Текст] / И. С. Джапаридзе. – Тбилиси, ГПИ, 1964. – 124 с.
2. Джапаридзе, И. С. Основные плоскостные модели пространства и их производные [Текст] /

И. С. Джапаридзе. – Тбилиси, ГПИ, 1964. – № 3. – 96 с.
3. Михайленко, В. Е. Формообразование оболочек в архитектуре [Текст] / В. Е. Михайленко, В. С. Обухова, А. Л. Подгорный. – Киев : Будивельник, 1972. – 205 с.
4. Иванов, Г. С. К вопросу модулирования алгебраических поверхностей центральными кремоновыми преобразованиями [Текст] / Г. С. Иванов // Научные труды Московского лесотехнического института. Взимнозначные соответствия в проектировании машин лесной промышленности. – Москва, 1973. – Вып. 54. – 141 с.
5. Hohenberg, F. Projektionen proektiver raume [Text] / F. Hohenberg. – Montsch. Math., 1957. – N1. – P. 61.
6. Малый, А. Д. Система двуосевых проекций с двойными осями [Текст] / А. Д. Малый, В. С. Обухова // Сборник Прикладная геометрия и инженерная графика. – Киев : Будивельник, 1967. – Вып. V. – 172 с.
7. Малый, А. Д. Нелинейные преобразования с двумя плоскостями двойных точек [Текст] / А. Д. Малый // Сборник Прикладная геометрия и инженерная графика. – Киев : Будивельник, 1971. – Вып. XII. – 168 с.
8. Михайленко, В. Є. Інженерна та комп’ютерна графіка [Текст] / В. Є. Михайленко, В. В. Ванін, С. Н. Ковальов. – Киев : Каравела, 2003. – 343 с.

А. Д. МАЛИЙ[1], Ю. Я. ПОПУДНЯК[2], Т. В. УЛЬЧЕНКО[3*], Т. В. СТАРОСОЛЬСЬКА[4]

[1] Каф. «Графика», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (095) 554 83 32
[2] Каф. «Графика», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010,тел. +38 (067) 774 17 47
[3*] Каф. «Графика», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010,тел. +38 (063) 774 66 58, эл. почта ulchenkotv@ya.ru
[4] Каф. «Графика», Дніпропетровський національний університет залізничного транспорту імені В. Лазаряна, вул. Лазаряна, 2, Дніпропетровськ, Україна, 49010, тел. +38 (066) 791 35 94

КВАЗІЛІНІЙНІ ГРАФІЧНІ МОДЕЛІ ПРОСТОРУ

Мета. Метою цієї роботи є дослідження квазілінійних моделей простору. **Методика.** Питання моделювання простору, в тому числі побудова графічних площинних моделей простору, актуальні, як в теоретичному плані, так і в плані застосування досліджених на їх основі нелінійних поверхонь для конструювання технічних форм деталей і агрегатів робочих органів будівельних машин, серединних поверхонь оболонок, поверхонь турбулентних лопаток та ін. **Результати**. У статті вирішувалися завдання: 1.Яким вимогам повинні задовольняти проектуючі криві, іншими словами, якого типу криві можуть бути використані для створення квазилінійної моделі простору; 2. Досліджувалось просторове перетворення, породжене квазімоделлю перетворення двох суміщених просторів; подані конструктивні засоби здійснення зазначеного перетворення на епюрі Монжа. **Практична значимість**. Розглянуте перетворення простору може бути застосоване для конструювання технічних форм, поверхонь складних деталей і конструкцій для будівництва тунелів і мостів.

Ключові слова: моделювання простору; казілінійні моделі; перетворення простору; нелінійні поверхні; графічна конструкція; аксіоматична конструкція

A. D. MALYI[1], YU. YA. POPUDNIAK[2], T. V. ULCHENKO[3*], T. V. STAROSOL’SKA[4]

[1] Dep. «Graphics», Dnipropetrovsk national university of railway transport named after academician V. Lazaryan, 2 Lazaryana Str., Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (095) 554 83 32
[2] Dep. «Graphics», Dnipropetrovsk national university of railway transport named after academician V. Lazaryan, 2 Lazaryana Str., Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (067) 774 17 47
[3*] Dep. «Graphics», Dnipropetrovsk national university of railway transport named after academician V. Lazaryan, 2 Lazaryana Str., Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. 38 (063) 774 66 58 e-mail ulchenkotv@ya.ru
[4] Dep. «Graphics», Dnipropetrovsk national university of railway transport named after academician V. Lazaryan, 2 Lazaryana Str., Dnipropetrovsk, Ukraine, 49010, tel. +38 (066) 791 35 94

QUASILINEAR GRAPHIC MODELS OF SPACE

Purpose. The aim of this work is to study quasilinear space models. **Methodology.** Questions of space modeling, including the construction of graphical models of planar space are actual both in theoretical terms and in terms of their application investigated on basis of nonlinear surfaces to construct forms of technical details and units of construction machinery, middle surfaces of shells, turbulent surfaces of the blades etc. **Findings.** The article solves the following problems: 1. what requirements must satisfy projecting curvesas well as what type of curves can be used to create a quasi-linear model of the space; 2. spatial transformation generated by kvazimodelyu convert two Joint-substituted spaces and filed constructive ways to implement this transformation on the diagram Monge were investigated. **Practical value**. The considered conversion of space can be used for the construction of technical forms, surfaces of complex parts and designs for the construction of tunnels and bridges.

Keywords: modeling of space; kazilinear model transformation of the space; nonlinear surface; graphic design; axiomatic design

Статья рекомендована к публикации, д. т.н., проф. В. Д. Петренко (Украина); д.т.н., проф. С. С. Тищенко (Украина).

Поступила в редколлегию 27.06.2014.
Принята к печати 02.07.2014.