ЛЕМА РОЗЕНТАЛЯ ПРО РОЗЩЕПЛЕННЯ ПІДПОСЛІДОВНОСТЕЙ В L_1

©*2005 р. Михайло ПОПОВ*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці 58012

Редакція отримала статтю 8 лютого 2005 р.

Ми наводимо доведення наступної відомої теореми Х. П. Розенталя, яка має назву «леми Розенталя про розщеплення підпослідовностей»: довільна обмежена послідовність (x_n) в L_1 містить підпослідовність (y_n), яка подається у вигляді суми $y_n = d_n + u_n$ для кожного n, де (d_n) мають диз'юнктні носії, а послідовність (u_n) є одностайно інтегровною (або, еквівалентно, слабко збіжною).

У роботі [2] Дж. Бурґейн та Х. Розенталь використовують так звану лему Розенталя про розщеплення підпослідовності. При цьому автори цитують роботу Розенталя, яка, як нам люб'язно сповістив сам Х. Розенталь, ніколи не була опублікована. У статті [4] читач може знайти близький результат, який можна навіть вважати узагальненням леми Розенталя про розщеплення підпослідовності. Крім того, лема Розенталя має узагальнення на ультрастепені просторів $L_1(\mu)$ в [3]. Проте з вказаних джерел не можна дістати прозорого і безпосереднього доведення леми Розенталя про розщеплення. Сама лема формулюється так.

Теорема. *Довільна обмежена послідовність (x_n) в L_1 містить підпослідовність (y_n), яка подається у вигляді суми $y_n = d_n + u_n$ для кожного n, де (d_n) мають диз'юнктні носії, а послідовність (u_n) є одностайно інтегровною (або, еквівалентно, слабко збіжною).*

Наше доведення використовує лише елементарні відомості з теорії міри та інтеграла. Через Σ ми позначаємо σ-алгебру всіх вимірних за Лебеґом підмножин $[0, 1]$; через μ – міру Лебеґа на Σ.

УДК 517.51; MSC 2000: 46E30

Нагадаємо, що множина $X \subseteq L_1$ називається одностайно інтегровною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якої множини $A \in \Sigma$, для якої $\mu(A) < \delta$, і довільного $x \in X$

$$\int\limits_A |x| d\mu < \varepsilon.$$

Неважко переконатися в тому, що множина $X \subseteq L_1$ є одностайно інтегровною тоді і тільки тоді, коли для довільного $\varepsilon > 0$ існує $M \in [0, +\infty)$ таке, що

$$\int\limits_{|x|>M} |x| d\mu < \varepsilon \tag{1}$$

для кожного $x \in X$. Властивість одностайної інтегровності множини відіграє важливу роль в багатьох дослідженнях про L_1.

За критерієм слабкої збіжності в L_1 [1, с. 117], з одного боку, кожна слабко збіжна послідовність в L_1 є одностайно інтегровною, а з іншого, використовуючи той же критерій, можна показати, що з кожної одностайно інтегровної послідовності можна виділити слабко збіжну підпослідовність. Це пояснює слова в дужках у формулюванні теореми.

Доведення. Припустимо, що дана послідовність $(x_n)_1^\infty$ не є одностайно інтегровною. Позначимо через ε_0 інфімум таких $\varepsilon > 0$, що існує $M \geq 0$, для якого виконується (1).

Отже,

$$\big(\forall \varepsilon > \varepsilon_0\big) \big(\exists M \geq 0\big) \big(\forall n \in \mathbb{N}\big) \int\limits_{|x_n|>M} |x_n| d\mu < \varepsilon, \tag{2}$$

причому існує підпослідовність (y_n) послідовності (x_n) така, що для кожного $n \in \mathbb{N}$ справджується нерівність

$$\int\limits_{|y_n|>n} |y_n| d\mu \geq \varepsilon_0 - \frac{1}{n}. \tag{3}$$

Покладемо: $B_n = \{t \in [0,1] : \ |y_n(t)| \leq n\}$, $w_n = y_n \cdot \chi(B_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Доведемо, що послідовність $(w_n)_1^\infty$ є одностайно інтегровною. Якщо це не так, то існує $\delta > 0$ та підпослідовність $(w_{k_n})_{n=1}^\infty$ така, що

$$\int\limits_{|w_{k_n}|>n} |w_{k_n}| d\mu \geq \delta \tag{4}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. З означення ε_0 випливає, що існує $M_1 \geq 0$ таке, що

$$\int\limits_{|y_{k_n}|>M_1} |y_{k_n}| d\mu < \varepsilon_0 + \frac{\delta}{2} \tag{5}$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$. З іншого боку, з оцінок (3), (4) отримаємо, що для $n \geq M_1$

$$\int\limits_{|y_{k_n}|>M_1} |y_{k_n}| d\mu \geq \int\limits_{|y_{k_n}|>n} |y_{k_n}| d\mu = \int\limits_{n<|y_{k_n}|\leq k_n} |y_{k_n}| d\mu + \int\limits_{|y_{k_n}|>k_n} |y_{k_n}| d\mu =$$

$$= \int\limits_{|w_{k_n}|>n} |w_{k_n}| d\mu + \int\limits_{|y_{k_n}|>k_n} |y_{k_n}| d\mu \geq \delta + \varepsilon_0 - \frac{1}{n},$$

що суперечить нерівності (5) для досить великих n.

Покладемо тепер $A_n = [0,1] \setminus B_n$, $v_n = y_n - w_n = y_n \cdot \chi(A_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Оскільки послідовність (v_n) обмежена і для всіх n

$$\|v_n\| = \int\limits_{A_n} |v_n| d\mu \geq n\mu(A_n),$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Виберемо підпослідовність $(v_{m_n})_{n=1}^{\infty}$ таку, що для всіх $n \in \mathbb{N}$

$$\int\limits_{\bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} A_{m_i}} |v_{m_n}| d\mu < \frac{1}{n}. \tag{6}$$

Таким чином, отримаємо диз'юнктні множини $C_n = A_{m_n} \setminus \bigcup\limits_{i=n+1}^{\infty} A_{m_i}$, для яких функції $d_n = v_{k_n} \cdot \chi(C_n)$ матимуть диз'юнктні носії та внаслідок (6) підпослідовність $s_n = v_{k_n} - d_n$ прямує до 0 за нормою, і отже, є одностайно інтегровною. Остаточно одержуємо зображення

$$y_{k_n} = v_{k_n} + w_{k_n} = d_n + (s_n + w_{k_n}),$$

де функції (d_n) — диз'юнктні, а послідовність $u_n = s_n + w_{k_n}$ — одностайно інтегровна. Теорему доведено.

Автор висловлює вдячність Х. Розенталю за корисну інформацію та О. В. Маслюченку і В. В. Михайлюку за допомогу в роботі.

[1] *Банах С.* Курс функціонального аналізу. К.: Радянська школа, 1948. – 216 с.

[2] *Bourgain J., Rosenthal H. P.* Martingales valued in certain subspaces of L^1 // Israel J. Math. – 1980. – 37, № 1–2. – P. 54–75.

[3] *González M., Martínez-Abejón A.* Ultrapowers of $L_1(\mu)$ and the subsequence splitting principle // Israel J. Math. – 2001. – 122. – P. 189–206.

[4] *Weis L.* Banach lattices with the subsequence splitting property // Proc. Amer. Math. Soc. – 1985. – 105, № 1. – P. 87–96.

THE ROSENTHAL SUBSEQUENCE SPLITTING LEMMA IN L_1

Mykhaylo POPOV

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University
2 Kotsyubyns'koho Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

We prove the following known theorem of H. P. Rosenthal called «Rosenthal subsequence splitting lemma»: every bounded sequence (x_n) in L_1 contains a subsequence (y_n) which is a sum $y_n = d_n + u_n$ for each n where (d_n) have disjoint supports and the sequence (u_n) is equi-integrable (or equivalently, weakly null).