ЛОКАЛЬНО НІЛЬПОТЕНТНІ ГРУПИ, ЩО ЗАДОВОЛЬНЯЮТЬ СЛАБКУ УМОВУ МІНІМАЛЬНОСТІ ДЛЯ НЕАБЕЛЕВИХ СУБНОРМАЛЬНИХ ПІДГРУП

©2006 р. *Володимир ОНІЩУК*

Луцький державний технічний університет,
вул. Львівська, 75, Луцьк 43018

Редакція отримала статтю 26 травня 2006 р.

Вивчаються групи з слабкою умовою мінімальності для неабелевих субнормальних підгруп. Показано, що локально нільпотентна група без кручення такого роду гіперцентральна і є розширенням абелевої групи з допомогою мінімаксної групи.

Нехай X — довільна сім'я підгруп деякої групи. Будемо говорити, що група G задовольняє слабку умову мінімальності (максимальності) для X-підгруп, якщо в ній не існує нескінченно спадного (зростаючого) ланцюга X-підгруп

$$G_1 > G_2 > \cdots > G_k > \cdots (G_1 < G_2 < \cdots < G_k < \cdots),$$

для якого індекси $|G_k : G_{k+1}|$ є нескінченними для всіх натуральних чисел k.

Слабкі умови мінімальності та максимальності для підгруп були введені Д.І.Зайцевим [2]. У роботі [3] показано, що при деяких додаткових обмеженнях групи з такими умовами є мінімаксними, тобто мають скінченний субнормальний ряд, кожний фактор якого задовольняє умові мінімальності чи максимальності для підгруп.

Як і в [3], для звичайної умови мінімальності будемо використовувати символ min (максимальності — max), для слабкої умови мінімальності — символ min $-\infty$ (для слабкої умови максимальності — символ max $-\infty$).

УДК 512.544; MSC 2000: 20D35

Д.І.Зайцев [4] описав локально майже розв'язні групи зі слабкою умовою мінімальності для неабелевих підгруп. У роботі [6] Л.А.Курдаченко встановив, що локально нільпотентна група G тоді і тільки тоді задовольняє слабку умову мінімальності для субнормальних підгруп, коли вона є мінімаксною групою.

У даній роботі вивчаються групи з слабкою умовою мінімальності для неабелевих субнормальних підгруп. Як показує наступний приклад, аналогічний результат не можна отримати навіть для періодичних локально нільпотентних груп, що задовольняють умову $\min-\infty$ для неабелевих субнормальних підгруп.

Нехай $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \ldots$ — прямий добуток квазіциклічних 2-груп і $\langle b \rangle$ — циклічна група другого порядку. Визначимо півпрямий добуток $G = A\lambda\langle b \rangle$ наступним чином: $a^b = a^{-1}$. Легко перевірити, що комутант групи $G' = [G, G] = A$. Доведемо, що всі субнормальні підгрупи в групі G абелеві. Нехай H — неабелева субнормальна підгрупа в G. Тоді $G = AH$ і $A \bigcap H$ — нормальний дільник в G. Фактор-група $G/A \bigcap H = \overline{G} = \overline{A}\lambda\langle \overline{b} \rangle = \overline{A}\lambda\langle \overline{h} \rangle$. Оскільки підгрупа $\langle \overline{h} \rangle$ — субнормальна в $\overline{G}$, то фактор-група $\overline{G}$ є нільпотентною. Отже, $\overline{A}$ — одинична підгрупа. Оскільки $G' \leq A \bigcap H$, то $A \bigcap H = A$ і $A \leq H$. Таким чином, $H = G$.

Лема 1. *Нехай у групі G існує неабелева субнормальна підгрупа H, яка розкладається в прямий добуток нескінченної множини підгруп. Тоді група G не задовольняє ні умові $\min-\infty$, ні умові $\max-\infty$ для неабелевих субнормальних підгруп.*

Лема 2. *Якщо група G задовольняє умові $\min-\infty$ (відповідно умові $\max-\infty$) для неабелевих субнормальних підгруп, то довільна її фактор-група задовольняє умові $\min-\infty$ ($\max-\infty$) для неабелевих субнормальних підгруп.*

Лема 3. *Якщо група G задовольняє умові $\min-\infty$ (відповідно умові $\max-\infty$) для неабелевих субнормальних підгруп, то довільна її неабелева субнормальна підгрупа задовольняє умові $\min-\infty$ (відповідно умові $\max-\infty$) для неабелевих субнормальних підгруп.*

Твердження лем 1, 2, 3 є очевидними.

Лема 4. *Якщо нормальний дільник A локально нільпотентної групи G є абелевим, а фактор-група G/A — циклічною, то G — гіперцентральна група.*

Доведення. Оскільки фактор-група G/A циклічна, то нехай $G/A = \langle bA \rangle$. Тоді $G = A\langle b \rangle$, де A — абелевий нормальний дільник групи G. Спочатку доведемо, що централізатор елемента b в групі G $C_A(b)$ відмінний від одиниці. Для цього візьмемо неодиничний елемент a, який належить до підгрупи A, і розглянемо підгрупу H, породжену двома елементами a та b, тобто $H = \langle a, b\rangle$. Легко бачити, що $H = (A \bigcap H)\langle b\rangle$.

Введемо позначення: $A_1 = A \bigcap H$. Тоді A_1 — нормальний дільник в підгрупі H і $H = A_1\langle b\rangle$. Оскільки H — скінченно породжена підгрупа в групі G, то H — нільпотентна група. За теоремою із [5], централізатор $C_{A_1}(b)$ елемента b в підгрупі A_1 відмінний від одиниці. Оскільки $C_{A_1}(b) \leq C_A(b)$, то $C_A(b)$ також відмінний від одиниці. Так як $C_A(b) \leq Z(G)$, то група G володіє нетривіальним центром Z_1.

Нехай у групі G побудовані члени верхнього центрального ланцюга Z_α для всіх $\alpha < \omega$. Якщо число ω — граничне, то покладемо, що Z_ω є об'єднанням всіх Z_α. Якщо ж число $\omega - 1$ існує, то група $AZ_{\omega-1}/Z_{\omega-1} \simeq A/(A \bigcap Z_{\omega-1})$ є абелевим нормальним дільником у фактор-групі $G/Z_{\omega-1}$ і група $G/Z_{\omega-1}$ є її розширенням за допомогою циклічної групи. За доведеним вище, центр групи $G/Z_{\omega-1}$ нетривіальний. Його прообраз в G позначимо через Z_ω. Отже, верхній центральний ланцюг групи G не може обірватися, доки не співпаде з самою групою G.

Лема 5. *Нехай G — локально нільпотентна p-група. Якщо група G задовольняє умову* $\min - \infty$ *для неабелевих субнормальних підгруп, то вона є черніковською.*

Доведення. Нехай група G задовольняє умову $\min - \infty$ для неабелевих субнормальних підгруп. Тоді в групі G існує така неабелева субнормальна підгрупа H, в якій кожна субнормальна підгрупа нескінченного індексу є абелевою. Якщо A — максимальна абелева нормальна підгрупа в H, то у фактор-групі H/A кожна неодинична нормальна підгрупа має скінченний індекс. Таким чином, фактор-група H/A задовольняє умові максимальності для нормальних підгруп. За теоремою Глушкова [1], H/A — нільпотентна група зі скінченною кількістю твірних. Оскільки, згідно з [7], нільпотентна p-група зі скінченною кількістю твірних є скінченною, то H/A — скінченна група. За лемою 4 одержуємо, що H — гіперцентральна група.

Нехай $H = H_1 \Delta H_2 \Delta \ldots \Delta H_n = G$ — субнормальний ряд групи G. Фактор-групи H_{i+1}/H_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ задовольняють умову мінімальності для субнормальних підгуп. Згідно з результатами, отриманими у [6], фактор-групи H_{i+1}/H_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — черниковські групи. Отже (див. [7]), фактор-групи H_{i+1}/H_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — розв'язні групи. Оскільки H_1 — розв'язна і фактор-група H_2/H_1 — розв'язна, то і H_2 — розв'язна група. Використовуючи індукцію, легко встановити, що G — розв'язна група.

Розглянемо два випадки.

1) Комутант $G' = [G, G]$ — абелева група. Нехай B — максимальна абелева підгрупа, яка містить G'. Тоді B — нормальний дільник групи G, фактор-група G/B — абелева і централізатор $C_G(B) = B$. З огляду на результати, отримані у [6], фактор-група G/B — черніковська група.

2) Комутант G' групи G — неабелева група. Група G' містить абелеву підгрупу A. Фактор-група G'/A — черніковська. За індукцією доведемо, що G — черніковська група.

Теорема 1. *Нехай G — періодична локально нільпоентна група. Якщо група G задовольняє умову $\min - \infty$ для неабелевих субнормальних підгруп, то вона черніковська.*

Доведення. Відомо [7], що періодична локально нільпотентна група G є прямим добутком локально силовських p-груп:

$$G = P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_n \times \cdots .$$

Якщо в групі G існують неабелеві нескінченні силовські підгрупи, то нехай P_1 одна із них. За лемою 5 підгрупа P_1 — черніковська. Фактор-група G/P_1 задовольняє умові $\min - \infty$ для всіх субнормальних підгруп. Внаслідок теореми Курдаченко [6], фактор-група G/P_1 — черніковська група. Отже, в цьому випадку G — черніковська група.

Теорема 2. *Якщо локально нільпотентна група G без кручення задовольняє слабку умову мінімальності для неабелевих субнормальних підгруп, то вона гіперцентральна і є розширенням абелевої групи з допомогою мінімаксної групи.*

Доведення. Нехай група G задовольняє умову $\min - \infty$ для неабелевих субнормальних підгруп. За лемою 3 в групі G існує така неабелева субнормальна підгрупа H, в якій довільна субнормальна підгрупа нескінченного індексу є абелевою.

Якщо A — максимальна абелева нормальна підгрупа в групі H, то у фактор-групі H/A кожна неодинична нормальна підгрупа має скінченний індекс. Зокрема, у фактор-групі H/A виконується умова максимальності для нормальних підгруп. За теоремою Глушкова [1], фактор-група H/A є нільпотентною групою зі сінченною кількістю твірних. Тоді фактор-група H/A або скінченна, або нескіченна циклічна група. За лемою 4 одержуємо, що H — гіперцентральна група.

Нехай $H = H_1 \triangle H_2 \triangle \ldots \triangle H_n = G$ — субнормальний ряд групи G. Фактор-групи H_{i+1}/H_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ задовольняють умову $\min - \infty$ для всіх субнормальних підгруп із H_{i+1}/H_i. За теоремою Курдаченко

[6], фактор-група H_{i+1}/H_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ мінімаксна. За доведеним вище, підгрупа H_1 — гіперцентральна, а фактор-група H_2/H_1 — мінімаксна. За теоремою Глушкова [1], H_2 — гіперцентральна група.

Нехай тепер B — максимальна абелева нормальна підгрупа у групі G. Фактор-група G/B задовольняє умову $\min -\infty$ для всіх субнормальних підгруп. Дійсно, якщо X/B — неодинична субнормальна підгрупа в G/B, то X — субнормальна підгрупа в G. Оскільки $C_G(B) = B$, то B — максимальна абелева підгрупа в групі G, а, отже, X — неабелева субнормальна підгрупа. За теоремою Курдаченко [6], фактор-група G/B — мінімаксна.

Теорема 3. *Якщо локально нільпотентна група G задовольняє умову* $\min -\infty$ *для субнормальних підгруп, то вона є розширенням абелевої групи з допомогою мінімаксної групи.*

Доведення. Нехай A — максимальна абелева нормальна підгрупа в G. Так як фактор-група G/A задовольняє умову $\min -\infty$ для всіх нормальних підгруп, то вона — гіперцентральна група за теоремою Курдаченко [6]. Таким чином, центр фактор-групи G/A відмінний від одиниці, тобто $Z(G/A) \neq 1$.

Нехай $\langle gA \rangle \leq Z(G/A)$. Тоді $A\langle g \rangle$ — неабелева підгрупа групи G. Оскільки фактор-група $G/A\langle g \rangle$ задовольняє умову $\min -\infty$ для субнормальних підгруп, то вона мінімаксна за теоремою Курдаченко [6]. З огляду на ізоморфізм $G/A\langle g \rangle \simeq (G/A)/(A\langle g \rangle/A)$, фактор-група G/A — мінімаксна група.

[1] *Глушков В.М.* О некоторых вопросах теории нильпотентных и локально нильпотентных групп // Матем. сборник. – 1952. – Т. 30, № 1. – С. 79–104.

[2] *Зайцев Д.И.* Группы, удовлеторяющие слабому условию минимальности // Укр. мат. журн. – 1968. – Т. 20, № 4. – С. 472–482.

[3] *Зайцев Д.И.* К теории минимаксних груп // Укр. мат. журн. – 1971. – Т. 23, № 5. – С. 652–660.

[4] *Зайцев Д.И.* Группы, удовлеторяющие слабому условию минимальности для неабелевих подгрупп // Укр. мат. журн. – 1971. – Т. 23, № 5. – С. 661–665.

[5] *Зайцев Д.И., Онищук В.А.* О локально нильпотентных группах с централизатором, удовлеторяющим условию конечности // Укр. мат. журн. – 1991. – Т. 43, № 7–8. – С. 1084–1087.

[6] *Курдаченко Л.А.* Группы, удовлеторяющие слабым условиям минимальности и максимальности для субнормальних подгрупп // Матем. заметки. – 1981. – Т. 29, № 1. – С. 19–30.

[7] *Черников С.Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 382 с.

LOCALLY NILPOTENT GROUPS THAT SATISFY A WEAK MINIMALITY CONDITION FOR NON-ABELIAN SUBNORMAL SUBGROUPS

Volodymyr ONISHCHUK

Lutsk State Technical University,
75 Lvivska Str., Lutsk 43018, Ukraine

We study the groups with a weak minimality condition form non-abelian subnormal subgroups. It is proved that any locally nilpotent torsion free group of such kind is hypercentral and is an extension of an abelian group by a minimax group.