ІСНУВАННЯ СПЕЦІАЛЬНОГО ПОВНОГО ІНВОЛЮТИВНОГО НАБОРУ ПЕРШИХ ІНТЕГРАЛІВ

© *2006 р. Сергій ПІДКУЙКО*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 16 січня 2006 р.

Відомо, що гамільтонові системи n тіл на прямій з потенціалами попарної взаємодії або взаємодії найближчих сусідів завжди мають додатковий перший інтеграл — повний імпульс. Припустимо, що така система цілком інтегровна за Ліувілем. Чи можна стверджувати, що повний інволютивний набір перших інтегралів можна вибрати так, щоб серед його інтегралів був повний імпульс?

У даній роботі формулюються достатні умови на набір перших інтегралів, що дає змогу дати позитивну відповідь на поставлене питання. Цікаво відзначити, що на існуючий набір перших інтегралів не накладається умови інволютивності.

Розглядається гамільтонова система з гамільтоніаном

$$H = \frac{1}{2}\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + W(x_1, x_2), \tag{1}$$

де $W(x_1, x_2)$ — функція двох змінних, гладка в деякій області в $\mathbb{R}^2$.

Зазначимо, що гамільтонові системи трьох тіл на прямій з потенціалами попарної взаємодії або взаємодії найближчих сусідів можна лінійним канонічним перетворенням звести до вигляду (1). Це пов'язано з тим, що кожна з таких систем має додатковий перший інтеграл — повний імпульс системи.

Основним результатом даної роботи є достатні умови для існування повного інволютивного набору перших інтегралів гамільтонової системи

УДК 517.913; MSC 2000: 37K10

(1), який включає імпульс p_3, що, очевидно, є першим інтегралом даної гамільтонової системи.

Теорема. *Нехай P, Q — поліноміальні за імпульсами перші інтеграли гамільтонової системи* (1), *що задовольняють умови*

- *P, Q — поліноміальні за імпульсами p_1, p_2, p_3,*
- *набір (H, P, Q, p_3) — функціонально незалежний в області $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^6$ фазового простору.*

Тоді для довільної точки $u \in \mathcal{U}$ знайдеться окіл $\mathcal{O}(u) \subset \mathcal{U}$ цієї точки і перший інтеграл R гамільтонової системи (1), *що мають такі властивості:*

- *R — поліноміальний за імпульсами p_1, p_2, p_3,*
- *набір (H, R, p_3) є повним інволютивним набором перших інтегралів гамільтонової системи з гамільтоніаном* (1) *в околі $\mathcal{O}(u)$,*
- *R не залежить від x_3.*

Введемо позначення, які використовуються нижче у роботі. Дужку Пуасона функцій F і G позначимо так:

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^{3} (\partial_{x_i} F \cdot \partial_{p_i} G - \partial_{x_i} G \cdot \partial_{p_i} F).$$

Нехай $f = (f^1, \ldots, f^n) : \mathcal{U} \subset \mathbf{R}^\mathbf{m} \to \mathbf{R}^\mathbf{n}$. Ранг матриці Якобі $f'(u)$ відображення f в точці $u \in \mathcal{U}$ будемо позначати $\operatorname{rank}(f^1, \ldots, f^n)(u)$. Функціональну залежність набору функцій в області розуміємо як лінійну залежність скрізь у цій області диференціалів цього набору функцій (це, зокрема, означає, що ранг матриці Якобі відображення, координатними функціями якого є функції даного набору, є строго меншим за кількість функцій у наборі); або як існування гладкої функції, яка відмінна від нуля скрізь у деякій відкритій всюди щільній множині даної області і на наборі функцій даного набору тотожно дорівнює нулю (див. [2]).

Доведення теореми.

Зауваження 1. *Якщо F — перший інтеграл гамільтонової системи* (1), *то $\partial_{x_3} F$ теж є першим інтегралом гамільтонової системи* (1).

Справді, $0 = \partial_{x_3}\{F, H\} = \{\partial_{x_3} F, H\}$.

Зауваження 2. *Нехай F — перший інтеграл гамільтонової системи* (1). *Тоді F є поліномом від x_3.*

Запишемо перший інтеграл F у вигляді суми однорідних відносно імпульсів компонент:

$$F = F_0 + F_1 + \ldots + F_n,$$

де F_k — однорідна відносно p_1, p_2, p_3 компонента F степеня k. Тоді дужка Пуасона $\{F, H\}$ є поліномом від p_1, p_2, p_3 степеня $(n+1)$. Отже, кожна її однорідна від p_1, p_2, p_3 компонента дорівнює нулю, зокрема, найстарша:

$$\{F, H\} = 0 \implies \left\{F_n, \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)\right\} = 0 \implies \sum_{i=1}^{3} \partial_{x_i} F \cdot p_i = 0.$$

Відомо [3], що в цьому випадку F_n є поліномом від

$$p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_1x_2 - p_2x_1,\ p_1x_3 - p_3x_1,\ p_3x_2 - p_2x_3.$$

Далі використовуємо індукцію за n. Якщо $n = 1$, то твердження є очевидним. Крок індукції випливає з того, що, згідно із зауваженням 1, $\partial_{x_3}^{n+1} F$ є першим інтегралом гамільтонової системи (1), до того ж степеня $< n$ (відносно імнульсів).

Нехай F — перший інтеграл гамільтонової системи (1). Згідно із зауваженням 2, його можна записати у вигляді полінома від x_3 :

$$F = F_m + F_{m-1}x_3 + \ldots + F_0 x_3^m, \tag{2}$$

де функції $F_0, \ldots, F_m$ не залежать від x_3 (і є поліномами від імпульсів).

Зауваження 3. $\{F_0, H\} = 0 = \{F_0, p_3\}$.

Перше твердження випливає із зауваження 1, друге — з незалежності функції F_0 від x_3.

Нехай для довільної точки $u \in \mathcal{U}$ існують перший інтеграл (2) гамільтонової системи (1) і такий окіл $\mathcal{O}(u) \subset \mathcal{U}$ точки u, що задовольняють умову: набір (H, F_0, p_3) є функціонально незалежним в $\mathcal{O}(u)$. Тоді за інтеграл R у твердженні теореми можна взяти F_0, і тоді доведення теореми завершено. Припустимо тепер протилежне. Нехай існує область $\mathcal{U}_0$ в $\mathcal{U}$, що задовольняє умову: для будь-якого першого інтеграла (2) гамільтонової системи (1)

$$\operatorname{rank}(H, F_0, p_3) \equiv 2 \text{ в } \mathcal{U}_0. \tag{3}$$

Позначимо через $\mathcal{B}$ сукупність пар $(F,\, G)$ поліноміальних за імпульсами перших інтегралів гамільтонової системи (1), що мають таку властивість:

$$\operatorname{rank}(H,\, F,\, G,\, p_3) \not\equiv 3 \ \text{в} \ \mathcal{U}_0. \tag{4}$$

Пару $(F,\, G) \in \mathcal{B}$ будемо називати ***мінімальною***, якщо вона має мінімально можливу суму степенів відносно змінної x_3 :

$$\deg_{x_3} F + \deg_{x_3} G.$$

(згідно із зауваженням 2, інтеграли F і G є поліномами від x_3). Згідно з умовою теореми, множина $\mathcal{B}$ є непорожньою, отже, мінімальні пари в $\mathcal{B}$ існують. Виберемо одну з них і позначимо її $(F,\, G)$. Нехай

$$m = \deg_{x_3} F, \quad m = \deg_{x_3} G, \quad m \leq n.$$

Зауваження 4. $m \geq 1$.

Якщо $m = 0$, то $F = F_0$. Отже, згідно з вибором $\mathcal{U}_0$,

$$\operatorname{rank}(H,\, F,\, G,\, p_3) \equiv 3,$$

що суперечить тому, що пара $(F,\, G) \in \mathcal{B}$.

Зауваження 5. $m < 1$.

Нехай $m = 1$. Розглянемо функцію $S = F_0^n T - T_0 F^n$. Згідно із зауваженням 3 і вибором $\mathcal{U}_0$ (умова (3)), $(S,\, G) \in \mathcal{B}$. Тоді приходимо до суперечності із вибором мінімальної пари $(F,\, G)$, оскільки $\deg_{x_3} S < \deg_{x_3} F$.

Нехай $m > 1$. Розглянемо функцію $S = \partial_{x_3} F$. Згідно із зауваженням 1, S — перший інтеграл гамільтонової системи (1). Оскільки $\deg_{x_3} S < \deg_{x_3} F$, то внаслідок мінімальності пари $(F,\, G)$, пари $(S,\, G)$, $(S,\, F) \notin \mathcal{B}$. Отже,

$$\operatorname{rank}(H,\, S,\, G,\, p_3) \equiv 3, \quad \operatorname{rank}(H,\, S,\, F,\, p_3) \equiv 3, \quad \text{в} \ \mathcal{U}_0. \tag{5}$$

Оскільки, крім того, $\operatorname{rank}(H,\, S,\, p_3) \equiv 3$ в $\mathcal{U}_0$ (що випливає з вигляду H, p_3 та нерівності $m > 1$), то з (5) випливає, що $\operatorname{rank}(H,\, F,\, G,\, p_3) \equiv 3$ в $\mathcal{U}_0$, а це суперечить умові теореми.

Згідно із зауваженнями 4 і 5, припущення про існування області $\mathcal{U}_0$ із властивістю (3) — хибне, що завершує доведення теореми.

Зазначимо, що задачу про існування повного інволютивного набору перших інтегралів, що включає повний імпульс, розглянуто у роботі [1]. У даній роботі використано методи її дослідження.

[1] *Vus A. Ya., Pidkuyko S.I.* Exact Reduction of Liouville Integrable Hamiltonian Systems with Polynomial Additional Integrals // Matematychni Studii. – 2004, **21**, № 1. – P. 109–112.

[2] *Narasimhan R.* Analysis on Real and Complex Manifolds. Advanced Studies in Pure Mathematics. – North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968. – 232 p.

[3] *Підкуйко С.І.* Алгебраїчні інтеграли задачі n тіл в $\mathbb{R}^k$ // Математичні студії. – 2000, **14**, № 1. – С. 97–108.

ON EXISTANCE OF THE FULL INVOLUTIVE SPECIAL COLLECTION OF FIRST INTEGRALS

Serhiy PIDKUYKO

Ivan Franko Lviv National University
1 Universytetska Str., Lviv 7900, Ukraine

It is well-known that Hamiltonian systems of n-body problem on the line with pair-wise or immediate-neighbour interaction always have the additional first integral — the full momentum. Let the Hamiltonian system be completely integrable by Liouville. Is it possible to claim that full involutive collection of first integrals can be chosen in such way that the full momentum would be among them.

In this paper sufficient conditions for the collection of first integrals are formulated enabling to give a positive answer on the above question. It is interesting to note that the existing collection of first integrals does not need to be involutive.