МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ: ВІД ЕЙЛЕРА ДО СЬОГОДНІШНІХ ДНІВ

©*2006 р. Анатолій ПРИКАРПАТСЬКИЙ* [1,2], *Петро КАЛЕНЮК* [3,4], *Микола ПРИТУЛА* [5]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3-б, Львів 79601, Україна
[2]АГМ-Університет Науки та Технологій, вул. Міцкевича, 30, Краків 30059, Польща
[3]Національний університет „Львівська політехніка“, вул. С.Бандери, 12, Львів 79013, Україна
[4]Інститут математики, Жешувський університет, вул. Рейтана 16 А, Жешув 35-310, Польща
[5]Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1, Львів 79000, Україна

Редакція отримала статтю 5 липня 2006 р.

Подано короткий огляд сучасного стану методу відокремлення змінних та його основних застосувань.

1. ВСТУП

Метод відокремлення змінних (МВЗ), зокрема, у таких найпростіших формах як відокремлення змінних в декартових, сферичних чи еліпсоїдальних координатах, є одним із фундаментальних понять сучасного математичного арсеналу. Коротко, МВЗ може бути охарактеризований як редукція багатовимірної проблеми до множини одновимірних проблем. Започаткований у працях Ейлера, Даламбера і Фур'є (теорія хвиль), Ліувілля, Лагранжа та Якобі (в гамільтоновій механіці), МВЗ впродовж тривалого часу був єдиним відомим методом „точного“ розв'язування багатьох задач математичної фізики.

УДК 547.946, 517.9; MSC 2000: 35Q53

Наприкінці 19-го століття на арену методів дослідження багатовимірних проблем математичної фізики вийшли потужні теоретико-групові підходи, започатковані у працях С.Лі та А.Пуанкаре. Зараз в історії застосування теоретико-групових методів настав критичний момент завдяки встановленим зв'язкам між зображеннями груп Лі, спеціальними функціями та МВЗ. Тепер існує пряма можливість сконструювати певний теоретико-груповий алгоритм, застосування якого до заданого диференціального чи диференціально-різницевого рівняння дасть раціональну можливість описати всеможливі системи координат, що дозволяють відокремлення змінних.

Розвиток ідей, що пов'язують групи Лі, спеціальні функції та МВЗ, стимулювався багатьма працями. Перша глибока праця, де вивчались ці проблеми, була виконана Е.Картаном у 1929 р., хоча її часткові результати вже активно використовувались раніше в працях багатьох математиків, про що вказано в оглядових лекціях О.Вігнера, прочитаних у Прінстонському університеті у 1955 р. Із сучасним станом застосувань теоретико-групових методів у теорії відокремлення змінних можна ознайомитись за відомими монографіями Н.Віленкіна та У.Міллера „Метод розділення змінних", книгою А.Переломова „Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли", а також працями [1–8], де наведено ряд застосувань при дослідженні нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах.

2. МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ У МЕХАНІЦІ ТА ГРУПИ ЛІ

Нехай задана класична механічна гамільтонова система, яка має N ступенів вільності ($N \in \mathbf{Z}_+$) і є інтегровною в сенсі Ліувілля. Це означає, що задана дужка Пуассона на фазовому просторі $\mathbf{M}^{2N}$ парної розмірності та N незалежних законів збереження $H_j \in D(\mathbf{M}^{2N})$, $j = \overline{1, N}$, що комутують відносно цієї дужки, тобто для всіх $j, k = \overline{1, N}$

$$\{H_j, H_k\} = 0. \tag{2.1}$$

Дужка Пуасона $\{\cdot, \cdot\}$, яка діє на множині функцій $D(\mathbf{M}^{2N})$ на просторі $\mathbf{M}^{2N}$, за означенням є кососиметричною та невиродженою білінійною формою.

Означення. *Система канонічних змінних Дарбу $\{p_j, q_k : j, k = \overline{1, n}\}$, $0 \leq n \leq N$, на фазовому підпросторі $\mathbf{T}^n \subset \mathbf{M}^{2N}$ називаєтся відокремленою, якщо існують співвідношення вигляду*

$$h_j = H_j, \quad j = \overline{1, N}, \quad \{q_j, p_k\} = -\delta_{jk}, \quad j, k = \overline{1, N},$$

$$\Phi_j(q_j, p_j; H_1, \ldots, H_N) = 0, \quad j = \overline{1, N}, \tag{2.2}$$

що пов'язують закони збереження h_j, $j = \overline{1, N}$, та змінні Дарбу.

Гамільтон та Якобі ще в середині 19 століття запровадили фундаментальне поняття функції дії механічної системи як генератора канонічних перетворень до змінних Дарбу (φ, I), які називаються дія-кут. А саме, нехай функція $S(h, q)$ визначається таким чином, що

$$h_j = h_j(I_1, \ldots, I_n), \quad j = \overline{1, N},$$

$$\varphi_j := \frac{\partial S(h(I), q)}{\partial I_j}, \quad p_j := \frac{\partial S(h(I), q)}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, N}, \tag{2.3}$$

причому справджується рівняння Гамільтона–Якобі

$$H_j\left(q, \frac{\partial S(h(I), q)}{\partial q_j}\right) = h_j(I), \quad j = \overline{1, N}. \tag{2.4}$$

З огляду на (2.4), співвідношення (2.2) одразу ведуть до наступного відокремлення змінних на підпросторі $\mathbf{T}^N$, що розв'язує рівняння (2.4)

$$S(h(I), q) = S_1(h, q_1) + \ldots + S_n(h, q_n), \tag{2.5}$$

де для фіксованих $h_k \in \mathbf{R}$, $k = \overline{1, N}$,

$$\Phi_j\left(q_j, \frac{\partial S_j(h, q_j)}{\partial q_j}; h_1, \ldots, h_N\right) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.6}$$

Розв'язуючи рівняння (2.6), отримуємо функції $S_j(h, q_j)$, $j = \overline{1, N}$ на підпросторі $\mathbf{T}^N \subset \mathbf{M}^{2N}$, що продовжують явно „імпульси" (2.3) нашої гамільтонової системи, тим самим розв'язуючи задачу еволюції на підпросторі $\mathbf{T}^N$. Дійсно, еволюція на $\mathbf{T}^N$ задається рівняннями Гамільтона у змінних (q, p) :

$$\frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}, \quad \frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad j = \overline{1, N}, \tag{2.7}$$

яка у змінних $(I, \phi) \in \mathbf{T}^N$ є еквівалентною наступним рівнянням:

$$\frac{dI_j}{dt} = \frac{\partial h(I)}{\partial \varphi_j}, \quad \frac{d\varphi_j}{dt} = -\frac{\partial h(I)}{\partial I_j}, \quad j = \overline{1, N}, \tag{2.8}$$

тобто

$$\varphi_j = -\frac{\partial h(I)}{\partial I_j} t + \varphi_{j0} \equiv -\omega_j t + \varphi_{j0}, \quad j = \overline{1, N}. \tag{2.9}$$

Отже, у випадку компактності підпростору $\mathbf{T}^N$, отримуємо квазіперіодичний рух із частотами ω_j, $j=\overline{1,N}$, на торі $\mathbf{T}^N \subset \mathbf{M}^{2N}$, який є простором орбіт даної гамільтонової системи на підмноговиді рівняння $H_j = h_j$, $j=\overline{1,N}$. Таким чином, задача про опис траєкторій гамільтонової системи (2.7) на $\mathbf{M}^{2N}$ є цілком роз'язаною.

3. МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ У КВАНТОВОМУ ВИПАДКУ

Замінимо тепер умову (2.1) квантовою умовою комутативності деяких самоспоряжених операторів у гільбертовому просторі Φ:

$$[\mathbf{H}_j,\mathbf{H}_k]=0, \quad j,k=\overline{1,N}, \tag{3.1}$$

а умову (2.2) — умовою такої ж форми:

$$\Phi_j(\hat{x}_j,\hat{p}_j;\mathbf{H}_1,\ldots,\mathbf{H}_N)=0, \quad j=\overline{1,N}, \tag{3.2}$$

де $\hat{x}_j$ і $\hat{p}_j$ — операторні зображення алгебри Лі–Гейзенберга у гільбертовому просторі Φ:

$$[\hat{q}_j,\hat{q}_k]=0=[\hat{p}_j,\hat{p}_k], \quad [p_j,q_k]=-i\hbar\delta_{jk}, \quad j,k=\overline{1,N}, \tag{3.3}$$

де $\hat{p}_j := \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_j}$, $j=\overline{1,N}$. У виразах (3.2) оператори $\hat{x}$ і $\hat{p}$ впорядковані так, як вони записані, тобто першими будуть оператори $\mathbf{H}_j, j=\overline{1,N}$, потім ідуть оператори $\hat{p}_j, j=\overline{1,N}$, і нарешті — оператори множення $\hat{q}_j, j=\overline{1,N}$. Нехай тепер, згідно з принципами квантової механіки, функція $\Psi(q_1,\ldots,q_N)$ є спільною власною функцією комутуючих самоспряжених операторів $\mathbf{H}_j$, $j=\overline{1,N}$, із власними значеннями $h_j\in\mathbf{R}$, $j=\overline{1,N}$:

$$\Psi\in\Phi, \quad \mathbf{H}_j\Psi=h_j\Psi, \quad j=\overline{1,N}. \tag{3.4}$$

Тоді, очевидно, функція $\Psi\in\Phi$ також задовольняє системі диференціальних рівнянь

$$\Phi_j\left(q_j,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_j};h_1,\ldots,h_N\right)\Psi=0, \quad j=\overline{1,N}. \tag{3.5}$$

З умови (3.5) випливає, що

$$\Psi=\prod_j^n\Psi_j(q_j), \tag{3.6}$$

де

$$\Psi_j(q_i) = \Phi_j\left(q_j, \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_j}; h_1, \ldots, h_N\right), \quad j = \overline{1, N}, \tag{3.7}$$

тобто, вихідна багатовимірна квантова спектральна задача (3.4) зводиться до системи одновимірних багатопараметричних спектральних задач (3.7). Цей приклад наочно показує природу виникнення багатопараметричних спектральних задач як задач факторизації деяких комутативних операторних множин у гільбертовому просторі Ф. При цьому варто зауважити, що операторні вирази (3.7) слід розглядати як символи деяких псевдодиференціальних операторів в гільбертовому просторі Ф, що задають у поліноміальному за $\hat{p}_1, \ldots, \hat{p}_N$ випадку звичайні диференціальні оператори у Ф, а у випадку тригонометричних поліномів за $\hat{p}_j, \ldots, \hat{p}_N$ — скінченнорізницеві рівняння. Якщо записати

$$\Psi(q) := \exp\left[-\frac{i}{\hbar}S(q)\right], \quad \Psi_j(q_j) = \exp\left[-\frac{i}{\hbar}S_j(q_j)\right], \quad j = \overline{1, N}, \tag{3.8}$$

то при $\hbar \to 0$ легко встановити відповідність квантового відокремлення змінних (3.8) класичному (2.5).

Розвиток МВЗ для апріорно заданої сумісної системи операторних рівнянь (3.4), що зводяться до системи (3.5), розглянемо у наступному розділі.

4. МЕТОД ВІДОКРЕМЛЕННЯ ЗМІННИХ ТА БАГАТОПАРАМЕТРИЧНІ СПЕКТРАЛЬНІ ЗАДАЧІ

Розв'язування задач математичної фізики за допомогою методу Фур'є веде до дослідження спектральних задач для звичайних диференціальних рівнянь, що містять один параметр — сталу відокремлення. Це й стимулювало дослідження таких спектральних задач, які з розвитком функціонального аналізу були узагальнені.

При відокремленні змінних у задачах для рівнянь із частинними похідними виникають багатопараметричні спектральні задачі — багатопараметричні аналоги задачі Штурма–Ліувілля. Класичним прикладом є задача про коливання мембрани із закріпленим краєм. У найпростішому випадку прямокутної мембрани відокремлення змінних в декартовій системі координат веде до двох однопараметричних задач Штурма–Ліувілля. Для круглої мембрани після відокремлення змінних у полярній системі координат одержуємо двопараметричну задачу. Однак у цьому випадку двопараметричність ослаблена і легко усувається. Дійсно, беручи до уваги періодичність розв'язку кутового розвинення, визначаємо значення параметра, що входить в нього і підставляємо знайдені значення в радіальне рівняння. У результаті одержуємо однопараметричні задачі, при розв'язуванні яких виникають функції Бесселя.

Нетривіальна двопараметрична задача виникає при відокремленні змінних в еліптичних координатах для мембрани еліптичної форми. Вона складається з двох рівнянь Матьє, кожне з яких містить два параметри α і μ:

$$u_1''(\xi) + (\lambda ch^2\xi + \mu)u_1(\xi) = 0,$$

$$u_2''(\eta) + (-\lambda cos^2\eta + \mu)u_2(\xi) = 0,$$

де $\xi \in [0, \Xi]$, $\eta \in [0, 2\pi]$, Ξ — визначається розмірами мембрани. Ця задача є частинним випадком такої n-параметричної задачі:

$$y_i''(x_i) + \left(q_i(x_i) + \sum_{j=1}^{n} \lambda_j p_{ij}(x_i)\right) y_i(x_i) = 0, \quad x_i \in [a_i, b_i],$$

$$y_i(a_i)\cos\alpha_i - y_i'(a_i)\sin\alpha_i = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

$$y_i(b_i)\cos\beta_i - y_i'(b_i)\sin\beta_i = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

де $p_{i,j}(x_i)$, $q_i(x_i)$ — відомі неперервні функції, $\alpha_i \in [0, \pi)$, $\beta_i \in (0, \pi]$ $(i = \overline{1,n})$ — фіксовані числа.

Вектор $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ називається власним значенням задачі, якщо існують нетривіальні розв'язки $y_i(x_i, \lambda)$ цієї задачі. Добуток цих розв'язків $y(x, \lambda) = \prod_{i=1}^{n} y_i(x_i, \lambda)$ називається власною функцією задачі, що відповідає власному значенню λ. Таке означення власної функції багатопараметричних задач успадковане від МВЗ.

У роботах А.Діксона і Д.Гільберта досліджувались проблеми розвинення функцій у ряди Фур'є за системами власних функцій багатопараметричних аналогів задачі Штурма–Ліувілля.

Підходи Діксона та Гільберта є принципово різними. Так, Діксон за допомогою властивостей лишків для функцій двох комплексних змінних[1] встановив поточкову збіжність деякої послідовності часткових сум відповідних рядів до функції, що розвиваються в ряд. Гільберт розвинув підхід до дослідження багатопараметричних задач за допомогою техніки рівнянь із частинними похідними.

У 1960-их рр., в основному завдяки роботам Ф.Аткінсона, розпочався новий етап у розвитку багатопараметричних спектральних задач. Інтенсивні дослідження велись як для задач, сформульованих вище, так і для

[1]поняття лишків для таких функцій запровадив А.Пуанкаре

задач в абстрактній постановці. Вони полягають у дослідженні системи рівнянь

$$\left(A_i + \sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_{ik}\right) x_i = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

де A_i, B_{ik} — деякі лінійні оператори, визначені в сепарабельних гільбертових просторах $\mathbf{H}_i$, $x_i \in \mathbf{H}_i, \lambda_k \in \mathbf{C}$.

Розвиток багатопараметричної спектральної теорії стимулювався переконанням, що будь-який аспект однопараметричної теорії повинен мати свій багатопараметричний аналог. Однак на цьому шляху виникають серйозні перешкоди. Наприклад, до останнього часу не було задовільного означення кореневого вектора таких задач.

Означення власних і приєднаних векторів багатопараметричних спектральних задач було запропоновано кілька років тому [8] в рамках концепції узагальненого МВЗ. Ці означення природні, оскільки вони враховують джерела і мету дослідження багатопараметричних спектральних задач. Вони знайшли застосування при дослідженні розв'язності широкого класу диференціально-операторних рівнянь.

[1] *Гентош О., Притула М., Прикарпатський А.* Диференціально-геометричні та Лі-алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах. – Львів: Вид–во Львів. ун-ту, 2006. – 408 с.

[2] *Голод П.І., Клімик А.І.* Математичні основи теорії симетрій. – К.: Наук. думка, 1992. – 368 с.

[3] *Каленюк П.И., Баранецкий Я.О., Нитребич З.Н.* Обобщенный метод разделения переменных. – К.: Наук. думка, 1993. – 232 с.

[4] *Самойленко А.М., Прикарпатський Я.А.* Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень. – К.: Ін-т математики НАН України, 2002. – 237 с.

[5] *Babelon O. Talon M.* Hamiltonian structures and Lax equations // Phys. Lett., 237, № 3–4, (1990). – P. 411-416.

[6] *Blaszak M.* Multi-Hamiltonian theory of dynamical systems. – Springer, 1991. – 350 p.

[7] *Prykarpatsky A.K., Mykytiuk I.V.* Algebraic integrability of nonlinear dynamical systems on manifolds. – Kluwer, 1998. – 553 p.

[8] *Sklyanin E.K.* Separation of variables // Progress Theor. Phys. Supplement, 1995, № 118. – P. 35–60.

THE SEPARATION VARIABLES METHOD: FROM EULER TO NOWADAYS

Anatolij PRYKARPATSKY [1,2], *Petro KALENYUK* [3,4], *Mykola PRYTULA* [5]

[1]Pidstryhach Instytute of Applied Problems in Mechanics and Mathematics of NASU, 3-b Naukova Str., Lviv 79601, Ukraine
[2]AGH University of Science and Technology, Al. Mickiewicza 30, 30-059 Krakow, Poland
[3]Lviv Polytechnic National University 12 S.Bandery Str., Lviv 79013, Ukraine
[4]Instytut Matematyki, Uniwersytet Rzeszowski, 16 A Rejtana Str., 35-310 Rzeszów, Poland
[5]Ivan Franko Lviv National University, 1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

A short review of the separation variables method modern state its applications is presented.