ПРО ЗАСТОСУВАННЯ НОВОГО АНАЛІТИЧНО-ЧИСЛОВОГО МЕТОДУ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ БІГАРМОНІЧНОГО РІВНЯННЯ У ОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ

©2006 р. Віктор РЕВЕНКО

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів 79601

Редакція отримала статтю 10 липня 2006 р.

Запропоновано новий аналітично-числовий спектральний метод для розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння. Метод базується на мінімізації квадратичної форми, що характеризує інтеграл квадратичного відхилення знайденого розв'язку від заданих граничних умов. Чисельно розв'язана відповідна крайова задача, проведено числовий аналіз. Знайдено напружено-деформований стан прямокутної пластини.

1. ВСТУП

На даний час достатньо розробленими є аналітичні методи розв'язування крайових задач для рівнянь другого і першого порядків у канонічних областях [2, 10, 13]. При розв'язуванні крайових задач для бігармонічного рівняння велике застосування знаходять методи теорії комплексної змінної [5], проте для обмежених областей за наявності кутових точок ці методи не є ефективними. При розв'язуванні крайової задачі у обмежених областях з кутовими точками для рівнянь із частинними похідними високого порядку виникають значні труднощі математичного і обчислювального характеру. А саме, не достатньо вивчені питання конкретного вибору і побудови часткових розв'язків, не достатньо розроблені

УДК 539.3; MSC 2000: 35Q72

аналітично-числові методи, які дозволяють із заданою точністю одночасно задовольнити декілька граничних умов, не обґрунтовано збіжність розв'язків нескінченних систем лінійних рівнянь, які виникають у цих задачах тощо.

У роботах [6, 8] теоретично обґрунтовано і запропоновано застосовувати новий спектральний аналітично-числовий метод для розв'язування плоскої задачі теорії пружності у прямокутній області. У [9] цей метод розвинуто для розв'язування тривимірної задачі теорії пружності, яка описується системою рівнянь із частинними похідними шостого порядку. Відзначимо, що для реалізації запропонованого методу необхідно: 1) знайти повну систему часткових розв'язків відповідного рівняння із частинними похідними для заданої однозв'язної області; 2) побудувати квадратичну форму, яка характеризує відхилення знайденого розв'язку від граничних умов на крайовій поверхні і знайти коефіцієнти цієї форми в явному вигляді. Якщо задача 1) для заданого рівняння із частинними похідними розв'язана, то цей метод можна модифікувати до довільної однозв'язної області, що відкриває широкі перспективи для застосування цього аналітично-числового методу.

У даній статті показано, що аналітично-числовий метод інтегральних моментів, запропонований в роботах [6, 8] можна узагальнити і використати до розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння у обмежених криволінійних областях з кутовими точками. Також доведено нерівність Бесселя, виконання якої з врахуванням додатності введених квадратичних форм забезпечує збіжність розв'язку. Запроваджено інтегральну міру оцінки точності виконання граничних умов. На основі проведених теоретичних досліджень створено програмний комплекс і чисельно розраховано напружено-деформований стан (НДС) прямокутної пластини. Досліджено також деякі аспекти числової реалізації: точність виконання граничних умов, збіжність, швидкодія. Наведено розподіл нормальних та дотичних напружень у пластині. Розв'язування крайової задачі цим методом проводиться кількома етапами: I) виділення основного напружено-деформованого стану (НДС); II) побудова повної нескінченної системи власних функцій; III) використання інтегрального методу моментів для знаходження коефіцієнтів розвинення.

2. ПОСТАНОВКА КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ОБМЕЖЕНОЇ ОДНОЗВ'ЯЗНОЇ ОБЛАСТІ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ

Розглянемо плоску статичну задачу для тонкої пластини сталої товщини h, яка займає однозв'язну випуклу область D з кутовими точками за відсутності масових сил [1,8,11]. На контурі L області D задані граничні умови в нормальних та дотичних напруженнях

$$h\sigma_n(x,y)|_L = \sigma_g|_L, \quad h\tau_n(x,y)|_L = \tau_g|_L, \tag{1}$$

де зовнішні нормальні та дотичні навантаження σ_g, τ_g є кусково-неперервними функціями на контурі L. Відзначимо, що значення зовнішніх навантажень σ_g, τ_g на контурі L не є цілком довільними, а повинні справджувати деякі локальні та інтегральні умови [5, 8], які накладають на ці функції певні обмеження. Знайдемо локальні умови, яким повинні задовольняти навантаження σ_{gj}, τ_{gj}, $j = 1, 2$, при підході вздовж контура до кутової точки з різних боків. Щоб встановити їх, розглянемо умови рівноваги у кутовій точці випуклої області D з кутом β.

Теорема. *Граничні значення зовнішніх навантажень σ_{gj}, τ_{gj}, $j = 1, 2$ у кутовій точці контуру L, при підході до неї з різних боків задовольняють умовам*

$$(\sigma_{g2} - \sigma_{g1})\cos\beta = (\tau_{g2} - \tau_{g1})\sin\beta, \tag{2}$$

де β — кут області D після прикладення зовнішніх навантажень.

Доведення. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що дотична до верхньої сторони кутової області в кутовій точці після деформації пластини є паралельною до осі Ox. Зовнішні напруження σ_{g2}/h, τ_{g2}/h, які задані на нижній стороні кута (індекс 2), у кутовій точці можна виразити через нормальні та дотичні напруження [11]

$$\sigma_{g2}/h = \sigma_x \sin^2\beta + \sigma_y \cos^2\beta - 2\tau_{xy}\sin\beta\cos\beta,$$
$$\tau_{g2}/h = (\sigma_x - \sigma_y)\sin\beta\cos\beta + \tau_{xy}(\sin^2\beta - \cos^2\beta).$$

Якщо врахувати, що згідно з вибором системи координат, у кутовій точці $\sigma_y = \sigma_{g1}/h$, $\tau_{xy} = \tau_{g1}/h$, то після виключення невідомого значення напруження σ_x із цих рівнянь випливає умова (2).

Проаналізуємо умову (2). Ця умова для неперервних зовнішніх навантажень завжди виконується. Якщо при переході через кутову точку задано стрибок зовнішніх нормальних навантажень, то відповідно повинен існувати стрибок дотичних напружень, що дорівнює $\tau_{g1} - \tau_{g2} = (\sigma_{g2} - \sigma_{g1})\operatorname{ctg}\beta$. Для прямого кута ці умови спрощуються $\beta = \pi/2$, $\operatorname{ctg}\pi/2 = 0$, отже $\tau_{g1} = \tau_{g2}$, а нормальні напруження можуть набувати довільних значень на різних сторонах кута. Це співпадає з відомими результатами [11].

Проаналізуємо, які обмеження накладає умова (2) на зусилля в точках гладкості контура L. Для точок на гладкій поверхні маємо: $\beta = \pi$, $\sin\beta = 0$, а з умови (2) випливає, що при підході до заданої точки вздовж границі зліва і справа виконується рівність $\sigma_{g2} = \sigma_{g1}$. Отже, нормальні напруження не повинні мати точок розриву неперервності на поверхні, гладкій після деформації. Із рівнянь рівноваги також випливає, що в точках гладкості контура L виконується рівність $\tau_{g1} = \tau_{g2}$. Аналіз формули (2) показує, що у загальному випадку наявність розриву неперервності нормальних або дотичних напружень на гладкому контурі пов'язана з відповідною зміною кута контура у точці розриву, що веде до порушення гіпотез лінійної теорії пружності у цій точці.

2.1. Розділення НДС на основний і збурений. Необхідність цього розділення випливає з відомого факту, що збурений НДС швидко спадає при віддаленні від границі пластини, а основний — ні, отже, математично вони описуються функціями з різними характеристиками в області D. Слідуючи роботам [6, 8], виділимо основний напружений стан, який відповідає головному вектору сил і моментів, прикладених до контура пластини. Припустимо, що в область D можна вписати прямокутник П із сторонами $2a$, $2b$. Початок декартової системи координат розмістимо в точці симетрії прямокутника, вісь y спрямуємо паралельно до сторін прямокутника довжини $2b$, вісь x — паралельно до сторін довжини $2a$. Буквами A, B, C, D позначимо вершини прямокутника, починаючи із точки (a, b) у напрямку проти годинникової стрілки. Сторони прямокутника між вершинами B і C, C і D і т.д. позначимо цифрами 1, 2, 3, 4, а відповідні лінії контура L — $L_1, \ldots, L_4$. Розподілені нормальні та дотичні зовнішні навантаження σ_g, τ_g створюють на контурах L_j пластини D відповідні нормальні T_j, та дотичні Q_j зусилля і моменти M_j, які будемо визначати відносно середин сторін введеного прямокутника П [7, 8]. Пошук бігармонічної функції напружень $\Phi(x, y)$, яка задовольняє граничні умови (1), будемо послідовно зводити до розв'язування простіших задач. Основний розв'язок бігармонічного рівняння відповідає заданим нормальним T_j та дотичним Q_j зусиллям та моментам M_j, $j = \overline{1,4}$ і описується поліноміальною функцією напружень. Для багатьох важливих випадків навантаження плоскої пластини цю функцію можна подати у вигляді

$$\Phi_0(x, y) = \frac{T_2}{4ha}x^2 + \frac{T_1}{4hb}y^2 + \frac{T_3 - T_1}{32ha^3b}(y^2(4a^3 + 6a^2x - 2x^3) +$$

$$+2x^5/5 + 2a_1x^3) + \frac{M_2}{4ha^3}x^3 + \frac{M_4 - M_2}{8ha^3b}(x^3 - 3a^2x)(y + b), \qquad (3)$$

де $a_1 = b^2 - 2a^2/5$. Функція $\Phi_0(x,y)$ задовольняє бігармонічне рівняння і відповідає таким нормальним та дотичним напруженням:

$$\sigma_y^0 = \frac{T_2}{2ha} + \frac{T_3 - T_1}{8ha^3b}[3(a_1 - y^2)x + 2x^3] + \frac{3M_2}{2ha^3}x + 3\frac{M_4 - M_2}{4ha^3b}x(y+b),$$

$$\sigma_x^0 = \frac{T_1}{2hb} + \frac{T_3 - T_1}{8ha^3b}(2a^3 + 3a^2x - x^3),$$

$$\tau^0 = 3\left[\frac{T_3 - T_1}{8ha^3b}y - 3\frac{M_4 - M_2}{8ha^3b}\right](x^2 - a^2).$$

Після виділення цих зусиль із граничних умов на контурі пластини (1) залишається збурене (самозрівноважене) відносно кожної сторони пластини зовнішнє навантаження.

У роботах [6, 8] теоретично показано, що функцію напружень збуреного стану для прямокутної пластини можна подати у вигляді ряду за власними бігармонічними функціями

$$\begin{aligned}\Phi(\alpha,\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} \mathrm{Re}\{b[z_k^{-1}c_k^j \exp\left(vz_k((-1)^j\alpha - 1)\right)\varphi\left(z_k\gamma\right) + \\ +\xi_k^{-1}c_k^{2+j}\exp\left(v\xi_k((-1)^j\alpha - 1)\right)\psi\left(\xi_k\gamma\right)] + \\ +a[z_k^{-1}c_k^{4+j}\exp\left(cz_k((-1)^j\gamma - 1)\right)\varphi\left(z_k\alpha\right) + \\ +\xi_k^{-1}c_k^{6+j}\exp\left(c\xi_k((-1)^j\gamma - 1)\right)\psi\left(\xi_k\alpha\right)]\},\end{aligned} \tag{4}$$

де $\varphi(z_k\gamma) = \gamma\sin(z_k\gamma) - \mathrm{tg}(z_k)\cos(z_k\gamma)$, $\psi(\xi_k\gamma) = -\mathrm{ctg}(\xi_k)\sin(\xi_k\gamma) + \gamma\cos(\xi_k\gamma)$, $\alpha = x/a$, $\gamma = y/b$ — безрозмірні змінні; $v = a/b$, $c = b/a$ — відношення сторін; c_k^j, $j = \overline{1,8}$, — невідомі комплексні коефіцієнти; z_k, ξ_k — комплексні безрозмірні спектральні числа, ненульові корені характеристичних рівнянь [3]

$$F^+(z) \equiv \sin(2z) + 2z = 0, \quad F^-(\xi) \equiv \sin(2\xi) - 2\xi = 0, \tag{5}$$

для яких $\mathrm{Re}(z_k) > 0$, $\mathrm{Re}(\xi_k) > 0$. Функція напружень (4) дозволяє задовольнити довільні самозрівноважені граничні навантаження на виділеному контурі прямокутника П. Отже, розширяючи прямокутник до однозв'язної області D, можна використати зображення (4), щоб задовольнити самозрівноважені граничні умови на контурі L.

2.2. Перетворення і виконання граничних умов. Граничні умови (1), слідуючи [5], подамо як проекції зовнішніх зусиль на осі x, y

$$\left.\frac{d}{ds}\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_L = X_\sigma|_L, \quad \left.\frac{d}{ds}\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_L = -Y_\sigma|_L, \tag{6}$$

де $X_\sigma|_L = \cos\varphi\,\sigma_g - \sin\varphi\,\tau_g|_L$, $Y_\sigma|_L = \sin\varphi\,\sigma_g + \cos\varphi\,\tau_g|_L$ — проекції зовнішніх нормальних і дотичних зусиль $\sigma_g|_L$, $\tau_g|_L$ на осі x, y. Після інтегрування співвідношень (6) вздовж контура L одержимо граничні умови у такому вигляді:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\int_0^s Y_\sigma ds + C_1 = P_1(\alpha,\gamma), \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = \int_0^s X_\sigma ds + C_2 = P_2(\alpha,\gamma), \tag{7}$$

де C_1, C_2 — сталі інтегрування. Підставимо у (7) функцію напружень (4), одержимо явний вигляд граничних умов на контурі L

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} \mathrm{Re}\{(-1)^j[c_k^j f_j(vz_k,\alpha)\varphi(z_k\gamma) + c_k^{2+j} f_j(v\xi_k,\alpha)\psi(\xi_k\gamma)]+ \\
+c_k^{4+j} f_j(cz_k,\gamma)\psi(z_k\alpha) + c_k^{6+j} f_j(c\xi_k,\gamma)\chi(\xi_k\alpha)\} = P_1(\alpha,\gamma), \\
\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} \mathrm{Re}\{c_k^j f_j(vz_k,\alpha)\psi(z_k\gamma) + c_k^{2+j} f_j(v\xi_k,\alpha)\chi(\xi_k\gamma) + \\
+(-1)^j[c_k^{4+j} f_j(cz_k,\gamma)\varphi(z_k\alpha) + c_k^{6+j} f_j(c\xi_k,\gamma)\psi(\xi_k\alpha)]\} = P_2(\alpha,\gamma),
\end{gathered} \tag{8}$$

де $f_j(z,\alpha) = \exp\left(z((-1)^j\alpha - 1)\right)$, $\chi_k(\gamma) = m_k\cos(z_k\gamma) - \gamma\sin(z_k\gamma)$, $m_k = 1/z_k - \mathrm{ctg}(z_k)$. Відзначимо, що функції φ, ψ, χ, які використовуються в граничних умовах (8), у вершинах прямокутника П ($\alpha = \pm1$, $\gamma = \pm1$) набувають нульових значень. Отже, якщо вибрати за початок обходу контура L вершину прямокутника П, то сталі інтегрування C_1, C_2 у (7) слід прийняти нульовими. Крім того, оскільки розглядається збурений (самозрівноважений відносно кожної сторони) напружений стан, то й відомі функції P_1, P_2 у вершинах прямокутника також дорівнюють нулю. Це є узгодженням умов навантаження з вибором функцій, за якими розвивається розв'язок. Контур L вершинами прямокутника П розбивається на чотири ділянки, на яких всі величини в граничних умовах (8) почергово можна виразити тільки через змінну γ або α. Так, на ділянці 1 змінна γ змінюється від 1 до -1, а α — від -1 до -1, рівняння кривої L — відоме і на цій ділянці α виражається через γ і, отже, всі величини у граничних умовах можна виразити через неї. На ділянці 2, навпаки, змінна α змінюється від -1 до 1, а γ можна виразити через α і т.д.

Вкажемо на те, що умови (8) фактично задають важливу математичну задачу розвинення на проміжках $[-1, 1]$ восьми самозрівноважених функцій, які одержуються з P_1, P_2 за системами функцій, зв'язаних із φ, ψ, χ. Сформулюємо наступну задачу.

Проблема. *Дослідити, при яких умовах зображення* (8) *є точним,* *і побудувати конструктивний алгоритм знаходження комплексних коефіцієнтів c_k^j, $j = \overline{1,8}$.*

Не зупиняючись на строгому розв'язанні першої частини цієї проблеми, розробимо чисельний алгоритм, який дозволяє встановити прості критерії істинності розвинення (8).

3. МІНІМІЗАЦІЯ МІРИ НАБЛИЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ДО ЗАДАНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВ

Для знаходження невідомих комплексних коефіцієнтів c_k^j, $j = \overline{1,8}$, обмежимося у співвідношеннях (4), (8) скінченою кількістю N по індексу k членів ряду. Перейдемо у граничних умовах (8) від комплексних до дійсних позначень. Оскільки окремі члени ряду (4) є розв'язками бігармонічного рівняння, а отже, і плоскої задачі, то достатньо знайти невідомі коефіцієнти із умови мінімуму граничного відхилення напружень, які задаються функціями (8) від відомих зовнішніх граничних навантажень у правій частині. У [6, 8] теоретично розроблено метод інтегральних моментів при розв'язуванні бігармонічного рівняння в прямокутній області. Модифікуємо його на випадок криволінійної області. Виділимо у невідомих комплексних коефіцієнтах c_k^j, $j = \overline{1,8}$, дійсну і уявну частини: $c_k^j = x_{8k-8+j} + iy_{8k-8+j}$; аналогічно вчинимо з комплексними функціями, які стоять біля цих коефіцієнтів. Мірою наближення розв'язку (4) до заданих зовнішніх навантажень в граничних умовах (8) є інтеграл квадратичного відхилення вздовж контура L

$$
\begin{aligned}
&\Psi\{x_1,\ldots,x_{8N},y_1,\ldots,y_{8N}\} = \\
&= \oint_L \{\{\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{N}[x_{8k-8+j}\chi_{rk}^j(\alpha,\gamma) - y_{8k-8+j}\chi_{yk}^j(\alpha,\gamma)] - P_1(\alpha,\gamma)\}^2 + \\
&+\{\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{N}[x_{8k-8+j}\psi_{rk}^j(\alpha,\gamma) - y_{8k-8+j}\psi_{yk}^j(\alpha,\gamma)] - P_2(\alpha,\gamma)\}^2\}ds = P^2 + \\
&+\sum_{k,j=1}^{8N}\left\{x_k x_j V_k^{1,j} - 2x_j y_k V_k^{2,j} + y_j y_k V_k^{4,j}\right\} - 2\sum_{k=1}^{8N}\{x_k P_{r,k} - y_k P_{y,k}\},
\end{aligned}
\tag{9}
$$

де

$$
\chi_{rk}^j(\alpha,\gamma) = \operatorname{Re}\chi_k^j(\alpha,\gamma),\ \ \chi_{yk}^j(\alpha,\gamma) = \operatorname{Im}\chi_k^j(\alpha,\gamma),\ \ \psi_{rk}^j(\alpha,\gamma) = \operatorname{Re}\psi_k^j(\alpha,\gamma),
$$

$$
\psi_{yk}^j(\alpha,\gamma) = \operatorname{Im}\psi_k^j(\alpha,\gamma), \quad \chi_k^j(\alpha,\gamma) = (-1)^j f_j(vz_k,\alpha)\varphi(z_k\gamma),
$$

$$\chi_k^{2+j}(\alpha,\gamma) = (-1)^j f_j(v\xi_k,\alpha)\psi(\xi_k\gamma), \quad \chi_k^{4+j}(\alpha,\gamma) = f_j(cz_k,\gamma)\psi(z_k\alpha),$$
$$\chi_k^{6+j}(\alpha,\gamma) = f_j(c\xi_k,\gamma)\chi(\xi_k\alpha), \psi_k^j(\alpha,\gamma) = f_j(vz_k,\alpha)\psi(z_k\gamma),$$
$$\psi_k^{2+j}(\alpha,\gamma) = f_j(v\xi_k,\alpha)\chi(\xi_k\gamma), \quad \psi_k^{4+j}(\alpha,\gamma) = (-1)^j f_j(cz_k,\gamma)\varphi(z_k\alpha),$$
$$\psi_k^{6+j}(\alpha,\gamma) = (-1)^j f_j(c\xi_k,\gamma)\psi(\xi_k\alpha), \quad j=1,2;$$

для однакових індексів

$$V_{8k-8+j}^{1,8k-8+j} = \oint_L [\chi_{rk}^j(\alpha,\gamma)^2 + \psi_{rk}^j(\alpha,\gamma)^2]ds,$$
$$V_{8k-8+j}^{4,8k-8+j} = \oint_L [\chi_{yk}^j(\alpha,\gamma)^2 + \psi_{yk}^j(\alpha,\gamma)^2]ds,$$

для різних

$$V_{8k-8+j}^{1,8m-8+n} = 2\oint_L [\chi_{rk}^j(\alpha,\gamma)\chi_{rm}^n(\alpha,\gamma) + \psi_{rk}^j(\alpha,\gamma)\psi_{rm}^n(\alpha,\gamma)]ds,$$
$$V_{8k-8+j}^{2,8m-8+n} = \oint_L [\chi_{yk}^j(\alpha,\gamma)\chi_{rm}^n(\alpha,\gamma) + \psi_{rk}^j(\alpha,\gamma)\psi_{rm}^n(\alpha,\gamma)]ds,$$
$$V_{8k-8+j}^{4,8m-8+n} = 2\oint_L [\chi_{yk}^j(\alpha,\gamma)\chi_{ym}^n(\alpha,\gamma) + \psi_{yk}^j(\alpha,\gamma)\psi_{ym}^n(\alpha,\gamma)]ds,$$
$$P_{r,8k-8+j} = \oint_L [\chi_{rk}^j(\alpha,\gamma)P_1(\alpha,\gamma) + \psi_{rk}^j(\alpha,\gamma)P_2(\alpha,\gamma)]ds,$$
$$P_{y,8k-8+j} = \oint_L [\chi_{yk}^j(\alpha,\gamma)P_1(\alpha,\gamma) + \psi_{yk}^j(\alpha,\gamma)P_2(\alpha,\gamma)]ds,$$
$$P^2 = \oint_L [P_1(\alpha,\gamma)^2 + P_2(\alpha,\gamma)^2]ds, \quad j,n=\overline{1,8}, \quad k,m=\overline{1,N}.$$

Дійсні x_k і уявні y_k частини комплексних коефіцієнтів c_k визначимо з умови мінімуму функціонала (9), що є додатно визначеною квадратичною формою. Для цього знайдемо частинні похідні $\frac{\partial\Psi}{\partial x_j}$, $\frac{\partial\Psi}{\partial y_j}$, $j=\overline{1,8N}$, прирівняємо їх до нуля і одержимо систему $16N$ лінійних рівнянь для визначення $16N$ невідомих x_k, y_k,

$$\sum_{k=1}^{8N}\left\{x_k V_{k,j}^1 - y_k V_{k,j}^2\right\} = P_{r,j}, \quad \sum_{k=1}^{8N}\left\{-x_k V_{j,k}^2 + y_k V_{k,j}^4\right\} = -P_{y,j}. \tag{10}$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь (10) чисельно і знайдемо дійсні коефіцієнти x_k, y_k, а отже, і комплексні коефіцієнти c_k, $k=\overline{1,8N}$. Покажемо, що для розв'язків системи (10) виконується нерівність Бесселя.

Нерівність Бесселя. *Для будь-яких квадратично інтегровних на контурі L функцій $P_1(\alpha,\gamma)$, $P_2(\alpha,\gamma)$ виконується нерівність*

$$Min\Psi = \oint_L [P_1(\alpha,\gamma)^2 + P_2(\alpha,\gamma)^2]ds - \sum_{k=1}^{8N} \{x_k P_{r,k} - y_k P_{y,k}\} \geq 0. \quad (11)$$

Якщо нерівність (11) *перетворюється в рівність, то граничні умови* (8) *виконуються точно у метриці простору L_2.*

Доведення. Оскільки функціонал $\Psi\{x_1,\ldots,x_{8N},y_1,\ldots,y_{8N}\}$ є невід'ємним, то з правої частини умов (9) після врахування рівнянь (10) випливає нерівність (11). Якщо нерівність (11) насправді перетворюється в рівність, то мінімум функціонала дорівнює нулю і з умов (9) випливає

$$\oint_L \{\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{N}[x_{8k-8+j}\chi^j_{rk}(\alpha,\gamma) - y_{8k-8+j}\chi^j_{yk}(\alpha,\gamma)] - P_1(\alpha,\gamma)\}^2 ds = 0,$$

$$\oint_L \{\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{N}[x_{8k-8+j}\psi^j_{rk}(\alpha,\gamma) - y_{8k-8+j}\psi^j_{yk}(\alpha,\gamma)] - P_2(\alpha,\gamma)\}^2 ds = 0,$$

що доводить останню частину твердження.

Відзначимо, що знайдений розв'язок системи рівнянь (10) володіє згідно з енергетичною нерівністю Бесселя, стійкістю. Крім того, мінімум функціонала (9) у випадку, якщо система вибраних функцій повна, прямує при до нуля $N \to \infty$, якщо ж неповна — до фіксованого числа.

Знайдемо чисельно відношення $Min\Psi/P^2$. Якщо воно буде меншим, ніж 10^{-4}, то розв'язок знайдено із відносною точністю не менше 0.01. Якщо воно буде більше, ніж 10^{-4}, то збільшуємо кількість членів ряду N і повторно проводимо обчислення. Тобто, цей метод побудований на інтегральному контролі точності виконання граничних умов. Крім того, безпосередньо за точками контролюється максимальне відхилення знайдених напружень від заданих граничних навантажень. Далі за знайденою функцією напружень визначаємо НДС пластини.

4. КРАЙОВА ЗАДАЧА ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ

Цій задачі присвячено велику кількість робіт. Квадратну пластину, навантажену на протилежних сторонах однаковими розподіленими зусиллями, розглянуто методом суперпозицій у [14]. У [4] наведено огляд літератури по проблемі розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння у прямокутній області. Для апробації запропонованого методу розв'яжемо крайову задачу для прямокутної пластини, яка займає прямокутну область $D = \{(x, y) \in [-a, a] \times [-b, b]\}$. У цьому випадку область D співпадає із прямокутником П. Вважаємо, що сторони 2, 4 прямокутника вільні від навантажень, а на сторонах 1, 3 задані симетричні відносно змінної y нормальні $\sigma_{g,m}(\gamma)$ і несиметричні дотичні напруження $\tau_{g,m}(\gamma)$. Функцію напружень збуреного стану (4) для цього навантаження подамо у такому вигляді:

$$\Phi(\alpha, \gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \operatorname{Re}\{b^2 [z_k^{-2} c_k^j \exp\left(v z_k((-1)^j \alpha - 1)\right) \varphi(z_k \gamma) . \tag{12}$$

Напруження, які діють в пластині, визначаються за формулами [7, 8]:

$$\begin{aligned}
\sigma_y(x, \gamma) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \operatorname{Re}\{c_k^j \exp\left(v z_k((-1)^j \alpha - 1)\right) \varphi(z_k \gamma)\}, \\
\sigma_x(x, \gamma) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \operatorname{Re}\{c_k^j \exp\left(v z_k((-1)^j \alpha - 1)\right) \chi(z_k \gamma)\}, \qquad (13) \\
\tau(x, \gamma) &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \operatorname{Re}\{(-1)^j c_k^j \exp\left(v z_k((-1)^j \alpha - 1)\right) \psi(z_k \gamma)\}.
\end{aligned}$$

Для цієї задачі зручніше безпосередньо використовувати граничні умови (1), і вищенаведений виклад веде до такої системи рівнянь:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{2N} \{x_k V_{k,j}^1 - y_k V_{k,j}^2\} &= \sum_{m=1}^{2} \int_0^1 [\sigma_{g,m}(\gamma) \chi_{rj}^m(\gamma) + \tau_{g,m}(\gamma) \psi_{rj}^m(\gamma)] d\gamma, \\
\sum_{k=1}^{2N} \{-x_k V_{j,k}^2 + y_k V_{k,j}^4\} &= -\sum_{m=1}^{2} \int_0^1 [\sigma_{g,m}(\gamma) \chi_{yj}^m(\gamma) + \tau_{g,m}(\gamma) \psi_{yj}^m(\gamma)] d\gamma,
\end{aligned}$$

де $j = \overline{1, 2N}$, а всі інші коефіцієнти подані в [7].

5. ЧИСЛОВИЙ АНАЛІЗ

Запропонований алгоритм реалізований при знаходженні НДС прямокутної пластини. Числові розрахунки показують, що нульові граничні умови на горизонтальних сторонах пластини 2, 4 виконуються з точністю 10^{-18} і залежать тільки від точності знаходження комплексних коренів першого рівняння (5), що характеризує високу точність запропонованого методу. У статті досліджено вплив навантажень, заданих на стороні пластини 1, на розподіл напружень біля сторони 3. Чисельним експериментом встановлено, що вже при $a > 1.25\,b$ відносний вплив навантаження не перевищує 0.01, що підтверджує теоретичні висновки, одержані у [6, 8]. Тобто, якщо відношення сторін прямокутника більше, ніж 1.3, то при технічних розрахунках збуреного НДС взаємним впливом навантажень, прикладених до менших сторін, можна знехтувати.

5.1. Параболічний розподіл зовнішнього навантаження. Для випадку, коли на протилежних сторонах квадрата прикладені однакові навантаження, відомі наближені розв'язки цієї задачі [4, 12]. Для порівняння числових результатів розглянемо приклад про розтяг квадрата однаковими нормальними зусиллями $\sigma_{g1}(\gamma) = \sigma_{g3}(\gamma) = 1.5\sigma_0(1-\gamma^2)$, розподілених по сторонам 1, 3, і нульовими дотичними $\tau_{g1}(b\gamma) = \tau_{g3}(b\gamma) = 0$ (див. [4, 12]). Для цього навантаження основний напружений стан задається рівністю $T_1 = T_3 = S\sigma_0$, де $S = 2hb$ — площа перерізу пластини, σ_0 — стале напруження в напрямку осі x, а всі інші зусилля і моменти дорівнюють нулеві. Права частина системи рівнянь (10) для параболічного розподілу нормальних напружень визначається формулою $P_k = 1.5\sigma_0[(m_k z_k - 3)F_k + \cos(z_k)]/z_k$, де $F_k = [(z_k^2 - 2)\sin(z_k) + 2\cos(z_k)]/z_k^3$. Внаслідок плавності розподілу зовнішнього навантаження вже при $N = 10$, мінімум функціонала дорівнює $Min\Psi = 6.5 * 10^{-6}$, а граничні умови виконуються з точністю 10^{-3}. Збільшуючи значення N, наближаємо мінімум функціонала до нуля. Так, при $N = 20$ він дорівнює $3.7 * 10^{-8}$, при $N = 40$ — $1.5 * 10^{-9}$. Точність виконання граничних умов постійно зростає і прямує до нуля.

γ	0	0.1	0.4	0.6	0.8	0.9	1
$\sigma_{g1}(\gamma)$	1.500	1.485	1.260	0.960	0.540	0.285	0
$\sigma_y(1,\gamma)$	0.616	0.606	0.468	0.259	0.095	0.018	0
$\sigma_x(0,\gamma)$	1.288	1.263	1.117	0.935	0.745	0.668	0.616
$\sigma_x(0.8,\gamma)$	1.470	1.455	1.237	0.952	0.570	0.347	0.205
$\sigma_y(0.8,\gamma)$	0.205	0.201	0.148	0.089	0.030	0.009	0.0
$\tau(0.8,\gamma)$	0.000	0.025	0.095	0.121	0.104	0.068	0.000
$\sigma_y(0,\gamma)$	-0.210	-0.207	-0.152	-0.090	-0.029	-0.008	0.000
$\tau(0,\gamma)$	0.000	0.000	0.000	0.00	0.000	0.000	0.000

Таблиця 1. Розподіл нормальних і дотичних напружень при зовнішньому параболічному навантаженні залежно від безрозмірної змінної γ в різних перерізах квадрата.

У таблиці наведено числовий розподіл напружень в квадраті: $\sigma_0 = 1$, $N = 50$, $Min\Psi = 5.3 * 10^{-10}$, граничні умови виконуються з точністю

10^{-5}. Оскільки знайдені напруження є симетричними відносно змінних α і β, то результати наведено тільки для першого квадранта. Повний час розв'язування цієї задачі на комп'ютері Pentimum-III, не перевищує однієї хвилини. Наближені числові розв'язки цієї тестової задачі наведені в [4]. Порівняльний аналіз показує, що наведені в [4] напруження $\sigma_x(0,\gamma)$ ($N = K = 7$) з точністю до третього знака після коми співпадають із такими ж напруженнями, наведеними в таблиці.

6. ВИСНОВКИ

У роботі запроваджено інтегральну міру точності виконання граничних умов на контурі пластини, мінімізація якої дозволяє побудувати ефективний алгоритм знаходження розв'язку крайової задачі. Встановлено збіжність запропонованого методу, що випливає із доведеної нерівності Бесселя та додатності запроваджених квадратичних форм. Чисельно знайдений мінімум квадратичної форми дає інтегральну оцінку точності виконання граничних умов на контурі пластини. Чисельним експериментом встановлено ефективність, швидкодію і високу точність нового аналітично-числового методу розв'язування двовимірних крайових задач теорії пружності. Метод базується на аналітичному розв'язанні крайової граничної задачі, побудові власних функцій і числовій мінімізації квадратичної форми, яка є інтегральною мірою наближення шуканого розв'язку до заданих граничних умов. Надалі доцільно розробити застосування запропонованого методу до розв'язування двовимірних та тривимірних мішаних крайових задач.

[1] *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности. – Т. 3. Равновесие упругих тел канонической формы. – К.: Наук. думка, 1985. – 280 с.

[2] *Курант З., Гильберт Д.* Методы математической физики. – М.–Л.: Гос. изд. тех.-теор. лит., 1951. – Том I – 476 с. – Том II – 546 с.

[3] *Космодамианский А.С., Шалдырван В.А.* Толстые многосвязные пластины. – К.: Наук. думка, 1978. – 240 с.

[4] *Мелешко В.В.* Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Мат. методи та фіз.-мех. поля, 2004, **47**, № 3. – С. 45–68.

[5] *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

[6] *Ревенко В.П.* Побудова розв'язку плоскої задачі теорії пружності для прямокутної пластини методом інтегральних моментів // Доп. НАН України, 2004, № 8. – С. 59–65.

[7] *Ревенко В.П.* Розвиток спектрального методу Остроградського для розв'язування плоскої задачі теорії пружності в прямокутній області // Математичний вісник НТШ, 2004, том 1. – С. 105–119.

[8] *Ревенко В.П.* Розвиток спектрального методу Штурма-Ліувілля розв'язування крайової задачі для бігармонічного рівняння // Нелінійні коливання, 2003, **6**, № 3. – С. 368–377.

[9] *Ревенко В.П.* Спектральний метод розв'язання задачі Кірша у тривимірній постановці // Доп. НАН України, 2006, № 1. – С. 59–66.

[10] *Стеклов В.А.* Основные задачи математической физики. – М.: Наука, 1983. – 432 с.

[11] *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 576с.

[12] *Тимошенко С.П.* Теория упругости. — Л–М.: Гостехиздат, 1934. – 451 с.

[13] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 735 с.

[14] *Meleshko V.V.* Equilibrium of elastic rectangle: Mathieu-Inglis-Pickett solution revisited // J. Elasticity. – 1995, **40**. – P. 207–238.

ABOUT APPLICATION OF A NEW ANALYTICALLY-NUMERICAL METHOD TO SOLVED OF THE BOUNDARY-VALUE PROBLEM FOR THE BIHARMONIC EQUATION IN THE BOUNDED DOMAIN WITH ANGULAR POINTS

Victor REVENKO

Pidstryhach Institute of Applied Problems
in Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., Lviv 79601, Ukraine

The new analytically-numerical spectral method to the decision of the boundary-value problem for the biharmonic equation is offered. The method is based on minimization of the square-law form which characterizes integral of a square-law deviation of the found solution from the set boundary conditions. The boundary-value problem is numerically solved. The calculation analysis is conducted. The stressed-strained state of a rectangular plate is found.