ХВИЛЯ ТРАНСЛЯЦІЇ ТА МАТЕМАТИЧНА ТЕОРІЯ СОЛІТОНІВ

©2006 р. Валерій САМОЙЛЕНКО, Юлія САМОЙЛЕНКО

Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
вул. Володимирська, 64, Київ 01033

Редакція отримала статтю 12 липня 2006 р.

Подано огляд основних етапів виникнення та розвитку математичної теорії солітонів — нового напрямку сучасної математики, що інтенсивно розвивається протягом останніх 40 років. Розглянуто зв'язок теорії солітонів із різними розділами сучасного природознавства.

1. ВСТУП

Розвиток потужної обчислювальної техніки в XX-ому столітті сприяв значному прогресу теорії нелінійних задач, що формулюються на основі диференціальних, інтегральних чи інтегро-диференціальних рівнянь. Це стало можливим завдяки проведенню обчислювальних експериментів, за результатами яких можна було зробити висновки про властивості та можливу поведінку складних динамічних систем. Завдяки розробці різних методів чисельного розв'язання нелінійних операторних рівнянь та їх реалізації на ЕОМ було досліджено математичні моделі багатьох фізичних явищ та процесів. Тривалий час обчислювальний експеримент був чи не є єдиним ефективним „інструментом" аналізу нелінійних математичних моделей.

Саме завдяки обчислювальним експериментам та відповідно потужній комп'ютерній техніці у XX-ому столітті в природознавстві (фізиці, математиці) було зроблено два визначні відкриття, кожне з яких має велике значення для формування нового мислення в математиці та в

УДК 517.9; MSC 2000: 35Q51, 35Q53, 37K40

науці цілому — нелінійного світогляду. Це — відкриття атрактора в системі нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, що має назву системи Лоренца, та відкриття явища, яке згодом отримало назву солітона [1,2,5,8,12,13,15,17,23,28,30,31,36,42].

Відкриття цих ефектів в нелінійних системах спричинило активні наукові дослідження нелінійних диференціальних рівнянь в різних країнах, сприяло створенню численних наукових колективів, що займалися науковими дослідженнями таких систем, та в кінцевому підсумку призвело до створення математичної теорії солітонів і значному прогресу в розробці математичної теорії хаосу.

Математична теорія солітонів — метод оберненої задачі розсіювання — став потужним інструментом при дослідженні нелінійних [16, 24] диференціальних рівнянь із частинними похідними математичної та теоретичної фізики [6,7,10,19–21,25,26,33,35], ефективність та можливості якого можна порівняти з методом відокремлення змінних в теорії лінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними (методом Фур'є). У сучасній математичній фізиці сформувався новий значний за обсягом напрям, присвячений математичній теорії солітонів, який ще часто називають *теорією нелінійних динамічних систем*.

Створення на основі методу оберненої задачі розсіювання нових методів інтегрування (знаходження розв'язків в явному вигляді) нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними, що знаходять важливі застосування в різноманітних галузях природознавства і в цьому сенсі мають фундаментальне значення, сприяло активному розвитку нових аналітичних методів дослідження та аналізу складних математичних моделей різноманітних фізичних явищ та процесів, які раніше майже не піддавались вивченню, або дослідження яких проводилось за допомогою чисельних методів та вимагали використання потужних ЕОМ.

У даний час теорія солітонів має застосування в квантовій теорії поля, фізиці твердого тіла, нелінійній оптиці, фізиці плазми, гідродинаміці, біології та багатьох інших розділах природознавства [3, 9, 29, 36, 43, 47]. Різним математичним аспектам теорії солітонів присвячено декілька десятків монографій, які почали з'являтися з кінця 70-их років минулого століття.

2. ВІДКРИТТЯ ВІДОКРЕМЛЕНОЇ ХВИЛІ

Виникнення математичної теорії солітонів пов'язують з поняттям відокремленої хвилі або довгої хвилі. Такі хвилі вперше були описані шотландським вченим-інженером Джоном Скоттом Расселлом, який у серпні

1834 року спостерігав незвичну хвилю, що виникла при русі баржі по каналу. Це явище він описує так: „Я вважаю, що найкращу уяву про це явище дає опис обставин першого знайомства з ним. Я спостерігав за рухом баржі, яку швидко тягнула по вузькому каналу пара коней, коли баржа несподівано зупинилася. Маса води, яку баржа привела в рух, не зупинилася, і продовжувала свій рух. Вода зібралася біля носа судна в стані бурхливого руху, потім несподівано відірвалась від носа корабля і покотилася вперед з великою швидкістю, набувши вигляду великого одинокого підвищення, тобто округлого, гладкого водяного пагорба, який продовжував свій рух вздовж каналу і при цьому не змінював своєї форми і не зменшував швидкості. Я кинувся за цією хвилею верхи на коні і наздогнав її. Хвиля рухалась зі швидкістю біля восьми–дев'яти миль на годину, зберігаючи свій початковий вигляд і мала біля тридцяти футів в довжину та від фута до півтора фута в висоту. Її висота поступово зменшувалася і після однієї чи двох миль гонитви я втратив її в заворотах каналу. Так у серпні 1834 року мені вперше довелося зустрітись з незвичайним та красивим явищем, яке я назвав хвилею трансляції (переносу). [1]

З того часу я знайшов, що такі хвилі відіграють важливу роль майже у всіх випадках, коли рідина виявляє опір рухові, і дійшов висновку, що до того ж типу хвиль належать величезні рухомі підвищення рівня моря, які з регулярністю руху небесного тіла входять до наших ріки і котяться вздовж наших берегів.“

Про свою зустріч з відокремленою хвилею і відкритий ним ефект Джон Скотт Расселл вперше доповів у 1838 році. Детальний опис ефекту відокремленої хвилі та виконані ним експерименти Джон Скотт Расселл опублікував у 1844 році [44].

Від самого початку Джон Скотт Расселл зрозумів, що відкрив нове явище, а тому велику частину своєї професійної діяльності присвятив його експериментальному вивченню. Явище відокремленої хвилі настільки зацікавило Джона Скотта Расселла, що, як він пише „для детального вивчення цього явища і для того, щоб точно з'ясувати його природу та закони, що ним керують, я придумав інші способи виникнення цього явища, ніж описаний вище, та застосував різні методи спостережень.“

Джон Скотт Расселл неодноразово пробував відновити в лабораторії відкриту ним „хвилю трансляції“, щоб детально вивчити це явище. З цією метою він проводив експерименти в басейні, що мав відгороджену перегородкою ділянку, де рівень рідини перевищував її рівень в іншій

[1] Зараз ця назва є загально прийнятою – примітка авторів.

частині басейна. Коли перегородка раптово прибиралась, виникала довга дзвоноподібна хвиля, що рухалася вздовж басейна і була такою ж, яку Джон Скотт Расселл спостерігав в каналі.

При зміні умов експерименту, коли об'єм води в першій частині басейна був більшим, у басейні виникали дві довгі відокремлені хвилі. Термін „відокремлена хвиля" було запропоновано самим Джоном Скоттом Расселлом, який керувався тим, що така хвиля не є типовою для коливних рухів рідини.

У [44] Джон Скотт Расселл зауважує: „Це найкрасивіше і найнезвичайніше явище: день, коли я вперше побачив його (явище відокремленої хвилі), був найкращим днем мого життя. Нікому ніколи до мене не пощастило спостерігати це явище або, принаймні, зрозуміти, що воно значить. Тепер воно відоме як відокремлена хвиля трансляції. Ніхто ніколи і уявити не міг, що існує таке явище, як відокремлена хвиля".

Повідомлення Джона Скотта Расселла було зустрінуте багатьма його сучасниками з недовірою та нерозумінням того, що подібне явище можливе. Це ще більшою мірою спонукало Расселла до детальнішого вивчення цього цікавого явища. І Джон Скотт Расселл досяг глибокого розуміння явища, пов'язаного з існуванням відокремленої хвилі, що підтверджується такими його словами: „Коли я описав її (відокремлену хвилю) серу Джону Гершелю, він сказав: „Це просто відрізана половина звичайної хвилі". Але це не так, оскільки звичайні хвилі розповсюджуються частково вище, а частково нижче від рівня поверхні, і, крім того, її швидкість відрізняється від швидкості звичайних хвиль. Тому відокремлена хвиля — це повна хвиля, а не половина, з тією різницею, що вона вся цілком розташована вище поверхні, а не частково вище і частково нижче. Такий водяний горб не може стояти на місці, а поширюється вздовж каналу".

Згодом через багато років виявилося, що подібні хвилі притаманні багатьом фізичним системам, явищам та процесам, що описуються нелінійними диференціальними рівняннями із частинними похідними. Зокрема, подібні явища були виявлені в плазмі, твердих тілах, нелінійній оптиці, акустиці, біологічних системах тощо [19].

У процесі вивчення відокремленої хвилі на воді було виявлено багато цікавих її властивостей, серед яких, наприклад, залежність швидкості руху хвилі від її висоти. Згодом такі відокремлені хвилі у багатьох випадках стали називати солітоном, хоча це поняття і не завжди є тотожним поняттю відокремленої хвилі. Зокрема, коли цунамі (велетенські хвилі в океані, що з'являються внаслідок різних фізичних явищ, наприклад, землетрусів в океані, циклонів) виникає у вигляді не цугу хвиль, а у вигляді однієї-єдиної хвилі, тобто відокремленої хвилі, то такі цунамі часто ототожнюють з солітонами.

Досить цікавим є ще такий факт, пов'язаний з відомим явищем сезонних паводків у Санкт-Петербурзі, коли води Балтійського моря підвищують рівень води у Неві на три і більше метрів і затоплюють місто. Одне з пояснень цього явища пов'язане з теорією відокремлених хвиль, викликаних циклонами в Балтійському морі, які часто там трапляються. При цьому, якщо циклон довго знаходиться на одному місці, то він встигає викликати помітне підняття поверхні моря, тобто утворити водяний пагорб; цьому ж сприяють і вітри, що женуть воду до центра циклону. Після того, як циклон раптово зникає, водяний пагорб осідає і по поверхні води на всі боки розповсюджується відокремлена хвиля, швидкість руху якої тим більша, чим більша його висота. Потрапляючи у вузьку Фінську затоку, така хвиля збільшує свою висоту, наповнює великою масою води Неву і затоплює місто.

Інше цікаве спостереження було зроблене стосовно руху судна на воді. Як відомо, при русі судна на глибокій воді утворюються хвилі від носа і корми судна: одна група хвиль симетрично відносно судна розходиться під гострим кутом від носа судна, а інша – перпендикулярно його руху; такі ж хвилі утворюються навколо корми судна. При русі ж судна на мілкій воді, коли глибина води співмірна з довжиною хвиль, що виникають, і довжина яких має порядок довжини судна, в той момент, коли швидкість судна становить приблизно 0.8–0.9 швидкості хвиль, залишається лише одна поперечна хвиля, яка йде або вздовж носа корабля, або вздовж його корми. Ця хвиля має характерні особливості: вона має тільки підвищення, але не має впадин, тобто це відокремлена хвиля. Така хвиля рухається разом з судном, і, оскільки швидкість її поширення співпадає зі швидкістю руху судна, то цю хвилю називають *супутною*. Якщо в такий момент часу судно різко сповільнить свій рух, то супутна хвиля відірветься від судна і самостійно продовжить свій рух з попередньою швидкістю. Саме цей ефект спостерігав Джон Скотт Расселл у серпні 1834 року.

Утворення супутної хвилі інколи ще називають „ефектом конячки Хьюстона". Цей ефект описав великий англійський фізик Вільям Томсон (лорд Кельвін): „Це відкриття було зроблене випадково на невеликому каналі між Глазго і Ардроссаном. „Розумна" конячка тягнула баржу ексквайра Вільяма Хьюстона. Несподівано господар конячки з подивом помітив, що баржа рухається незвичайно швидко. Конячка тягнула її з набагато меншими зусиллями, ніж звичайно, оскільки бігла зі швидкістю поширення хвиль. При цьому кільваторна хвиля, що завжди виплескувалась на берег, зникла. Містер Хьюстон зрозумів, який зиск обіцяє це „відкриття конячки“ компанії, що володіє транспортом на каналі. З того часу буксирування барж по каналу проводиться з більшою швидкістю, а прибуток компанії набагато збільшився. Баржа починає рухатись з невеликою швидкістю за хвилею, а потім коні за сигналом ривком витягують її на вершину хвилі, де завдяки меншому опору рідини баржа рухається зі швидкістю 7, 8 або 9 миль за годину“.

Як можна пояснити цей ефект? Як відомо, судно при русі на воді долає опір рідини, при цьому частина енергії двигунів судна витрачається на подолання тертя, інша — на утворення вихорів у воді, а третя — на утворення хвиль. Якщо воду вважати рідиною, що перебуває у спокої, то судно при русі своїм носом піднімає догори певну масу води, а кормою опускає її. Але у воді є ділянки, які розташовані далеко від судна, на яких подібна робота не виконується.

Коли судно рухається у вузькій водоймі і швидкість судна v наближається до швидкості хвиль c_w, то судно може піднятися на гребінь супутної хвилі, де йому вже не потрібно здійснювати роботу з підйому та пониження рівня води. Природньо, що в цьому випадку для руху судна потрібно затратити менше енергії. Саме цей ефект зменшення витрат енергії при русі на гребні супутної хвилі помітила і використала „розумна конячка“.

При $v \approx c_w$ значна частина потужності двигунів судна витрачається на створення супутної хвилі. Якщо в такий момент спробувати *плавно* збільшити швидкість судна, щоб перейти через значення c_w, то в широкій водоймі цього не вдасться зробити, бо супутна хвиля буде підніматись все вище і вище, а швидкість судна не зміниться.

Знаменитий російський кораблебудівельник, математик та інженер академік О.М.Крилов (1863–1945) в своїх спогадах описав ситуацію, що трапилась в роки першої світової війни при випробуваннях швидкісного міноносця в Чорному морі, коли командир корабля, який, мабуть, не знав про властивості супутної хвилі, проводив випробування у мілководній затоці, глибина якої становила 20 метрів.

За розрахунковими даними міноносець повинен був розвивати крейсерську швидкість приблизно 50 км/год, але на випробуваннях у згаданій мілководній затоці вдалося досягти швидкості корабля лише біля 45 км/год. І як не прагнули збільшити швидкість корабля — двигуни корабля працювали в форсованому режимі з потужністю, яка майже в півтори разів перевищувала крейсерську, досягти швидкості 50 км/год не вдалося, бо збільшення потужності двигунів корабля призводило лише до утворення величезної хвилі, що рухалася за кораблем. У зв'язку з небезпекою вибуху котлів корабля випробування довелося зупинити, але коли подібні випробування провели на глибокій воді, то вони пройшли успішно. Згодом зрозуміли, що подолати критичну область швидкостей можна, якщо швидко (рвучко) набрати швидкість і цим методом почали користуватися на практиці.

Відкриття Джоном Скоттом Расселлом відокремленої хвилі та її опис [44–46] відіграло визначну роль у розвитку теорії нелінійних систем. Можливо, це відкриття саме в 1834 році завдячує значною мірою особистості Джона Скотта Расселла.

Джон Скотт Расселл народився у 1808 році в Шотландії неподалік від міста Глазго в сім'ї священника, який сподівався, що його син також стане священником. Проте в Расселла дуже рано виявилися здібності до точних наук і він вступає на навчання до університетів і навчається одночасно в трьох з чотирьох існуючих тоді шотландських університетах: Единбурга, Глазго, Сент Андрю. Пройшовши початковий курс навчання, Джон Скотт Расселл у 16 років одержав ступінь бакалавра.

Після закінчення університету він два роки працює на фабриці, потім викладає в Единбурзькому університеті, у 1832–1833 рр. читає курс лекцій з натурфілософії замість померлого професора Леслі, що свідчить про те, що знання та педагогічні здібності молодого Расселла цінувались досить високо, хоча це й не дозволило йому зайняти посаду професора Леслі. На жаль, і повторна у 1838 році спроба стати професором Единбурзького університету не виявилась для Джона Скотта Расселла успішною, хоча він і мав блискучі рекомендації самого Гамільтона. Мабуть ніхто ніколи не зможе дати відповідь на питання про те, чи відкрив би Расселл явище відокремленої хвилі, коли б він став професором Единбурзького університету, а не працював у компаніях, що займалися транспортуванням вантажів по каналах з портових міст Шотландії.

Джон Скотт Расселл виявив себе як талановитий інженер-винахідник: винайшов паровий трамвай, потім працював в Шотландській компанії парових екіпажів, що мала собі за мету встановити регулярне сполучення між Глазго та Единбургом. Потім за дорученням Компанії каналу Юніон досліджував перспективи руху парових суден по цьому каналу і займався будівництвом парових суден. Спроектовані ним корпуси суден були розраховані так, щоб мінімізувати хвильовий опір, який пов'язаний з утворенням біля носа судна хвиль, схожих на відокремлені хвилі. Ці результати були опубліковані у 1865 році в його першій великій праці [45] з кораблебудування, в якій він описав свої перші експерименти з утворення біля носа судна хвиль і способи, за допомогою яких вони приводять у рух воду зі швидкістю, що не залежить від швидкості руху судна.

Згодом Джон Скотт Расселл став одним із засновників Інституту цивільних інженерів, займався проектуванням і будівництвом величезного залізного судна „Great Eastern" (207 метрів у довжину, 25 метрів у ширину, дві парові машини загальною потужністю біля 8 000 кінських сил), відкрив формулу для обчислення товщини атмосфери Землі, виходячи зі швидкості звуку, та запропонував формулу для обчислення розмірів Всесвіту, виходячи зі швидкості світла. Загалом, Джон Скотт Расселл опублікував біля 50 праць, більша частина яких пов'язана з кораблебудівництвом, дослідженням хвиль, паровими двигунами, серед яких книга „Сучасна система кораблебудування" [45].

В останні роки свого життя Джон Скотт Расселл завершив книгу [46], в якій було підсумовано його багаторічні дослідження відокремленої хвилі, в яку було включено працю [44]. Праця [46] була опублікована після його смерті і залишилась непоміченою.

Багато часу Расселл витратив на вивчення основних властивостей відокремлених хвиль. Зокрема, він встановив, що відкриті ним відокремлені хвилі мають такі властивості: 1) сталість швидкості і незмінність форми окремої відокремленої хвилі; 2) залежність швидкості v руху хвилі від глибини h каналу і висоти y_0 хвилі має вигляд

$$v = \sqrt{g(y_0 + h)}, \tag{1}$$

де g — прискорення вільного падіння, при цьому $y_0 < h$; 3) розпад досить великої відокремленої хвилі на дві і більше хвиль.

З цього приводу він пише [44]: „Хвиля набуде ... своєї звичної форми ... і йтиме вперед, зберігаючи об'єм і висоту; вона звільниться від зайвої рідини, що рухалась із нею, залишивши її позаду, і ця залишена хвиля буде рухатись за нею, але з меншою швидкістю, так що хоча спочатку дві хвилі були з'єднані в одне ціле, вони потім відокремлюються одна від одної і з часом все далі і далі розходяться".

Джон Скотт Расселл помітив ще одну важливу характерну рису відокремлених хвиль, коли „... великі первинні хвилі трансляції проходять одна через іншу без будь-яких змін так само, як і малі коливання, що спричинені каменем, кинутим на поверхню води".

Остання властивість була відкрита майже через 130 років після Расселла при зовсім інших обставинах і справила надзвичайне враження на вчених, хоча праця [44], в якій Расселл описав своє відкриття, викликала велику критику в Англії. Його працею зацікавились славнозвісний Джордж Габріель Стокс (1819–1903) та Джордж Біддел Ейрі (1801–1892).

Дж.Г.Стокс вважається одним із засновників сучасної гідродинаміки (у зв'язку з цим можна згадати знамениті рівняння гідродинаміки, які мають назву рівнянь Нав'є-Стокса). Стокс з великою обережністю сприйняв результати Джона Скотта Расселла і фактично заперечив можливість існування відокремленої хвилі, оскільки, на його думку, хвилі не можуть зберігати постійну форму навіть у випадку надзвичайно малої в'язкості, крім того, відокремлена хвиля повинна була б розпадатися навіть у тому випадку, якби не втрачала енергію на тертя.

Дж.Б.Ейрі прискіпливо вивчив доповідь Джона Скотта Расселла і в своїй праці [34] у 1845 році піддав критиці його висновки про відокремлену хвилю. Зокрема, він зазначав, що формула Джона Скотта Расселла (1) для швидкості відокремленої хвилі не може бути виведена з теорії довгих хвиль на мілкій воді, довгі хвилі в каналах не можуть зберігати сталу форму і зробив загальний висновок: „ми не схильні погодитись з тим, що ця хвиля заслуговує на епітети *велика* або *первинна* ...".

Расселл не погодився з критикою Дж.Б.Ейрі і тривалий час з ним дискутував. На той час Дж.Б.Ейрі як директор знаменитої обсерваторії у Грінвічі мав величезний авторитет серед вчених, а тому його занадто категоричне заперечення щодо правильності спостережень і висновків Джона Скотта Расселла про відокремлену хвилю не сприяло збільшенню зацікавленості у вчених до цього явища. Крім того, після критичної статті Дж.Б.Ейрі всі, крім Джона Скотта Расселла, надовго забули про відокремлену хвилю.

З іншого боку, Дж.Б.Ейрі цілком слушно поставив питання про математичний опис виявленої Джоном Скоттом Расселлом відокремленої хвилі і використання при цьому Лагранжевої теорії мілкої води.

3. АНАЛІТИЧНИЙ ОПИС ВІДОКРЕМЛЕНОЇ ХВИЛІ ТА РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА

Доповідь Джона Скотта Расселла [44] мала велике значення, спонукавши дослідження Джозефа Валентина де Буссінеска (1842–1929) і лорда Релея, який навчався у Стокса. Обидва автори незалежно один від одного (Буссінеск у 1872 році, лорд Релей у 1876 році) знайшли наближений математичний опис форми і швидкості відокремленої хвилі на мілкій воді, при цьому їх формули для швидкості співпали з (1). Для математичного опису відокремленої хвилі (піднятого водяного пагорба) Буссінеск і Релей запропонували функцію у вигляді квадрата гіперболічного секанса $\operatorname{sech}^2(x)$. Крім того, Релей пояснив, чому формула (1) не працює при $y_0 \approx h$, що вперше експериментально було показано Расселлом.

Релей розглянув поняття відокремленої хвилі і помітив, що коли її довжина перевищує глибину канала у 6 або 8 разів, то її можна наближено розглядати в рамках теорії довгих хвиль. На підставі своїх досліджень Релей прийшов до твердого переконання про правоту Джона Скотта Расселла.

Згодом з'явилось ще дві-три математичні праці про відокремлену хвилю, було повторено досліди Расселла, але суперечки серед спеціалістів про існування відокремленої хвилі не припинялись, бо надзвичайно великим був авторитет Дж.Б.Ейрі та Дж.Г.Стокса. Але завдяки працям Расселла, Буссінеска, Релея та інших вчених ідея про відокремлену хвилю одержала розвиток і зараз так називають кожний (зазвичай дзвоноподібний) плоский хвильовий імпульс, що рухається в просторі в певному (одному) напрямі і зберігає при цьому свою форму, тобто має сталий профіль. Будь-яка дзвоноподібна функція $u(x - vt)$ описує відокремлену хвилю, що рухається вздовж осі x зі швидкістю v.

Незважаючи на високий науковий авторитет Ейрі та Стокса, в дискусії з ними та їхніми однодумцями взяли участь нідерландські вчені Дідерік Іоханнес Кортевег (1848–1941) та його учень Густав де Фріз. Зауважимо, що Д.І.Кортевег був достатньо відомим вченим, а де Фріз працював шкільним вчителем і про його життя майже нічого не відомо.

Вони почали досліджувати проблему існування та опису відокремленої хвилі і поставили за мету спростувати думку Ейрі про те, що довгі хвилі в каналах повинні обов'язково змінювати свою форму. Це їм вдалося зробити у знаменитій праці [39], яка замислювалась як кандидатська дисертація Густава де Фріза.

У [39] вони зазначають: „... саме бажання напевне вирішити це питання[2] змусило нас виконати доволі громіздкі обчислення, які можна знайти в кінці цієї статті“.

Самі того не підозрюючи, Кортевег і де Фріз досягли найбільшого успіху в математичному описі відокремленої хвилі, коли у 1895 році знайшли рівняння, що найкраще описує основні ефекти, пов'язані з відкритою Джоном Скоттом Расселлом відокремленою хвилею, і яке можна записати у вигляді

$$u_t + uu_x + u_{xxx} = 0. \tag{2}$$

Розв'язки рівняння (2) можна записати за допомогою так званих еліптичних функцій, які детально були вивчені Карлом Якобі (1804–1851).

[2]про існування відокремленої хвилі — примітка авторів

Рівняння Кортевега-де Фріза часто записують у вигляді

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{3}$$

загальний розв'язок якого зображується за допомогою так званої функції Вейерштрасса $\wp(x - vt + \delta)$, де δ — деякий зсув фази. Шукаючи частинний розв'язок рівняння (3) у вигляді $u(t,x) = f(x - vt)$, можна отримати

$$u(t,x) = f(x - vt) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{1}{2}\sqrt{v}(x - vt)\right]. \tag{4}$$

Цей частинний розв'язок рівняння Кортевега-де Фріза має вигляд функції, яка була запропонована Буссінеском та Релеєм, про що згадувалось раніше.

Для загальнішого випадку (при масштабних перетвореннях), коли рівняння Кортевега-де Фріза має вигляд

$$u_t + C_1 uu_x + C_2 u_{xxx} = 0, \tag{5}$$

його частинний розв'язок можна записати за допомогою формули

$$u = u_0\,\mathrm{sech}^2\left[\frac{x - Vt}{L}\right], \tag{6}$$

де

$$L = 2\sqrt{\frac{3C_2}{u_0 C_1}}, \quad V = \frac{u_0 C_1}{3}.$$

Кортевег і де Фріз знайшли періодичні хвильові розв'язки рівняння (2), які не мають синусоїдальної форми і стають наближено синусоїдальними, якщо їхня амплітуда дуже мала. При збільшенні довжини хвилі вони набувають вигляду далеко розміщених один від одного пагорбів, а в граничному випадку — при дуже великій довжині хвилі — залишається один пагорб, який і відповідає відокремленій хвилі.

Рівняння Кортевега-де Фріза стало одним з основних досягнень Кортевега і де Фріза, хоча при житті Кортевега про це майже ніхто не згадував. Праця Кортевега-де Фріза [39] залишилась майже не поміченою, її незабаром швидко забули і лише окремі вчені, що займались задачами гідродинаміки, зрідка повертались до розгляду рівняння Кортевега-де Фріза та проблеми відокремленої хвилі.

Згодом було віддано належну шану цьому рівнянню та його творцям, коли в 1995 році в Амстердамі — на батьківщині Кортевега і де Фріза було проведено міжнародну наукову конференцію, присвячену сторіччю від дня відкриття рівняння Кортевега-де Фріза.

4. ПРОБЛЕМА ФЕРМІ–ПАСТА–УЛАМА

У 1952 році Енріко Фермі (1901–1954) разом з Джоном Паста та Stationніславом Уламом почали проводити в науковій лабораторії Лос-Аламосу числові експерименти на ЕОМ „Maniak I", пов'язані з дослідженням нелінійних задач, однією з яких була задача про вивчення хаотичних коливань в системі зв'язаних нелінійними пружинами точкових мас. Ця задача виникла при з'ясуванні питання про те, чому тверді тіла мають лише скінченну теплопровідність [37].

Розглядаючи в якості моделі твердого тіла систему окремих точкових мас, що розташовані на прямій і які зв'язані пружинами з нелінійним законом взаємодії, тобто у вигляді гратки, Дебай ще у 1914 році припустив, що скінченна теплопровідність такої гратки пов'язана з ангармонійною взаємодією пружин. Якщо сила взаємодії лінійна, тобто виконується закон Гука, то енергія без перешкод переноситься незалежними фундаментальними (нормальними) модами.

Дебай вважав, що, якщо гратка буде слабко нелінійною, то нормальні моди, знайдені для випадку лінеаризованих пружних сил, стануть внаслідок нелінійності взаємодіяти між собою певним чином і цим обмежать перенесення енергії. Загальний ефект нелінійних взаємодій виявився б у скінченності коефіцієнта переносу в рівнянні дифузії.

Це припущення Дебая спонукало Енріко Фермі, Джона Паста та Станіслава Улама вивчити числову модель одновимірної ангармонійного ланцюжка твердих тіл на ЕОМ. Вони планували показати, що гладкі початкові умови, коли енергія системи міститься в найнижчій моді чи в декількох нижчих модах, завдяки нелінійній взаємодії буде поступово перерозподілятися між усіма модами коливань, що відповідало б теоремі про рівномірний розподіл.

Енріко Фермі, Джон Паста та Станіслав Улам розглядали фізичну модель, що складається з N ($N = 32$ або $N = 64$) ідентичних точкових одиничних мас, які розташовані на прямій з фіксованими (однаковими) відстанями між ними, причому так, що кожна точкова маса взаємодіє лише з двома сусідніми (зліва та справа) масами, при цьому перша та остання точкові маси були закріплені за допомогою пружинок до деяких фіксованих точок.

Якщо позначити за допомогою q_n, $n = \overline{1, N}$, координату n-ої точкової маси на прямій відносно їх положення рівноваги, то рівняння руху системи точкових мас записується у вигляді:

$$\frac{d^2 q_n}{dt^2} = f(q_{n+1} - q_n) - f(q_n - q_{n-1}), \tag{7}$$

де функція f описує властивості пружини в даній системі.

Тепер система диференціальних рівнянь (7) має назву ланцюжка Тоди, оскільки значну увагу її вивченню й аналізу приділив японський вчений М.Тода [47].

У якості функції $f(x)$ Енріко Фермі, Джон Паста та Станіслав Улам розглянули функцію вигляду $f(x) = k(x + \alpha x^2)$, де k — коефіцієнт лінійної, а α — коефіцієнт нелінійної жорсткості пружини.

Зауважимо, що системи вигляду (7) вивчались багатьма авторами також для випадку, коли $f(x) = \exp(x)$, і в цьому випадку говорять про експоненціальний потенціал взаємодії частинок, тоді як у випадку $f(x) = k(x + \alpha x^2)$ — про квадратичний потенціал взаємодії частинок.

Енріко Фермі, Джон Паста та Станіслав Улам проводили числовий експеримент для системи вигляду

$$\frac{d^2y_n}{dt^2} = k(y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1})(1 + (y_{n+1} - y_{n-1}), \tag{8}$$

де $n = \overline{1, N-1}$, $y_0 = y_N = 0$, y_n $(n = \overline{1, N-1})$ — відхилення n-ої точкової маси від положення рівноваги. У експериментах Енріко Фермі, Джона Паста та Станіслава Улама зазвичай енергія системи була спочатку зосереджена в декількох нижчих модах лінійної системи. У цьому випадку енергія системи мала б залишатись в цих нижчих модах, а коливання з вищими модами не повинні виникати. У нелінійній системі (з нелінійним потенціалом взаємодії системи) енергія системи мала б перерозподілятись від (початкових) нижчих мод до вищих.

Плануючи експерименти, Енріко Фермі, Джон Паста та Станіслав Улам очікували, що завдяки нелінійності енергія системи буде рівномірно перерозподілена по всім модам коливань. Вони розглядали систему з 64 матеріальних точок, що мала 64 різні власні моди, між якими вони очікували побачити перерозподіл енергії. У випадку, коли їх сподівання стосовно еволюції енергії виправдалися б, це дозволило б розглядати їхню систему як модель встановлення теплової рівноваги більш складних фізичних систем.

Результат експериментів Енріко Фермі, Джона Паста та Станіслава Улама виявився несподіваним — енергія не перерозподілялась, а замість цього початкова енергія в найнижчій моді перерозподілялась по декількох нижчих модах, потім поступово знову збиралась в найнижчій моді (з точністю до 2%), а потім процес майже повторювався.

Енріко Фермі, Джон Паста та Станіслав Улам не змогли знайти пояснення для виявленого ними ефекта. Навіть, якщо розглядати систему (8) як динамічну систему, в якій відбувається явище рекурентності за

Пуанкаре [4], коли будь-яка точка фазового простору під дією системи протягом певного часу *майже повертається* в своє початкове положення, то для системи (8), що складалась з 64 точкових мас, час рекурентності за Пуанкаре, протягом якого траєкторія системи майже повертається в своє початкове положення, є дуже великим.

Процес, який в результаті обчислювального експерименту спостерігали Енріко Фермі, Джон Паста та Станіслав Улам, був більш схожим на поведінку системи лінійно зв'язаних осциляторів на торі, оскільки траєкторія системи (8) в розширеному фазовому просторі була схожа на квазіперіодичну. Якщо, наприклад, ω_1, ω_2 — дві власні сумірні частоти системи, тобто $n\omega_1 \approx m\omega_2$, то фазова точка системи мала б *повернутись* в своє початкове положення через час, що приблизно становить $2\pi n/\omega_2$.

У вчених виникло питання: чому нелінійність у системі (8) не викликає всіх Фур'є-гармонік? Це питання тривалий час цікавило фізиків, хоча цілком могло трапитись, що на результати експериментів Енріко Фермі, Джона Паста та Станіслава Улама могли не звернути увагу і просто їх забути. Але цього не трапилось і, більш того, це питання одержало назву проблеми Фермі–Паста–Улама. Енріко Фермі до останніх днів свого життя цікавився цією проблемою.

Розв'язання проблеми Фермі–Паста–Улама виявилось несподіваним і було дане американськими математиками з Принстонського університету – Мартіном Крускалом та Норманом Забускі, які виявили [48], що з цією проблемою пов'язане рівняння Кортевега-де Фріза, відкрите ще в 1895 році.

Таким чином, через 70 років — у 1965 році — рівняння Кортевега-де Фріза опинилось у центрі уваги вчених (фізиків і математиків), які з часом, накопичивши достатню кількість наукових результатів про дане рівняння, зрозуміли, що рівняння Кортевега-де Фріза має фундаментальне значення і є основою математичної теорії солітонів.

5. РІВНЯННЯ КОРТЕВЕГА-ДЕ ФРІЗА І ВІДКРИТТЯ СОЛІТОНА

У 60–их роках XX–го століття проблемою Фермі–Паста–Улама зацікавились Мартін Крускал та Норман Забускі, які вирішили зрозуміти це незвичне явище. М.Крускал та Н.Забускі розглянули проблему Фермі–Паста–Улама в граничному випадку. Вони вважали, що оскільки енергія системи розподілена в найнижчих модах системи, а зміщення сусідніх мас відрізняється на малу величину $O(h/L)$, де h — довжина пружини між двома сусідніми точковими масами, L — сумарна довжина системи, то можна ввести неперервні зміщення $y(x,t)$ — координати розподіленої точки x в момент часу t, при цьому $y(nh,t) = y_n$. Розвиваючи зміщення $= y_{n+1}$ та y_{n-1} у ряди Маклорена і вважаючи, що $kh^2/m = c^2$, $2\alpha h = \varepsilon$, $h^2/(12\varepsilon) = \delta^2$, з (8) можна знайти

$$y_{tt} - c^2 y_{xx} = \varepsilon c^2 y_x y_{xx} + \varepsilon c^2 \delta^2 y_{xxxx}. \tag{9}$$

При цьому ε вважається малим параметром і доданки порядку ε^2 зігноровані. М.Крускал та Н.Забускі шукали [48] розв'язок рівняння (9) у вигляді

$$y(x,t) = F(\xi,\tau) + \varepsilon y^{(1)}(x,t) + \ldots, \tag{10}$$

де $\xi = x - ct$, $\tau = \varepsilon t$ — повільний час. Залежність $F(\xi,\tau)$ від τ описує еволюцію профілю $F(\xi,\tau)$ на великих відстанях та великих значеннях t порядку $1/\varepsilon$. Рівняння для $y^{(1)}(x,t)$ має вигляд

$$y^{(1)}_{tt} - c^2 y^{(1)}_{xx} = 2cf_{\xi\tau} + c^2 f_\xi f_{\xi\xi} + c^2\delta^2 f_{\xi\xi\xi\xi}. \tag{11}$$

Якщо прийняти $6q = \xi$, $t = c\tau/2$, то одержимо рівняння Кортевега-де Фріза:

$$q_\tau + 6qq_\xi + \delta^2 q_{\xi\xi\xi} = 0. \tag{12}$$

Відокремленій хвилі, що спостерігалась Джоном Скотом Расселлом, відповідає розв'язок рівняння (12) у вигляді квадрата гіперболічного секанса ($\delta^2 = 1$)

$$q = 2\eta^2 \operatorname{sech}^2 \eta(\xi - vt), \tag{13}$$

який можна одержати з періодичного розв'язку (кноїдальної хвилі) за допомогою граничного переходу, коли період стає нескінченним. При цьому, можна математично показати, що швидкість руху відокремленої хвилі залежить від її амплітуди!

М.Крускал та Н.Забускі почали чисельно вивчати розв'язки рівняння Кортевега-де Фріза (12) при різних значеннях параметра δ. Вони помітили, що рівняння Кортевега-де Фріза (12) при $\delta = 0$ має розв'язок, який за скінченний час стає *розривним* в певному сенсі, коли нахил хвилі стає від'ємним.

Але ще більш цікаві результати для рівняння Кортевега-де Фріза були виявлені при його чисельному розв'язуванні з $\delta = 0.022$, періодичними граничними умовами $q(x,t) = q(x+2,t)$ та періодичній початковій умові $q(x,0) = \cos x$. Було помічено, що спочатку ділянки з від'ємними нахилами ставали більш крутими, після чого завдяки доданкові $\delta^2 q_{\xi\xi\xi}$ у рівнянні Кортевега-де Фріза (12), на вершині хвилі утворювались малі осциляційні зміщення зі (своєю) довжиною хвилі порядку δ, які з часом розділялись і утворювали ланцюжок імпульсів, що рухався праворуч. При цьому найбільший імпульс виявлявся самим правим і кожен з них, здавалося б, зберігав свою форму, і мав швидкість, що була пропорційна його амплітуді. Ці імпульси можна було наближено описати формулою у вигляді (13) для розв'язку рівняння Кортевега-де Фріза (12), хоча формула (13) описує відокремлену хвилю (ізольований імпульс) на нескінченій прямій.

Внаслідок періодичних граничних умов ланцюжок імпульсів послідовно відновлювався на лівій частині межі кожної півсмуги $\{t > 0, x_0 < x < x_0 + 2\}$ (x_0 можна вважати довільним), і внаслідок різниці швидкостей більших і менших імпульсів, більші імпульси з (лівої) півсмуги $\{t > 0, x_0 < x < x_0 + 2\}$ наздоганяли менші імпульси з (правої) півсмуги $\{t > 0, x_0 + 2 < x < x_0 + 4\}$.

При цьому виявилась надзвичайно цікава природа взаємодії більших та менших імпульсів: у момент часу, коли більший імпульс наздоганяє менший імпульс, утворюється деякий *нелінійний* імпульс, амплітуда якого менша від амплітуди більшого імпульсу (принцип суперпозиції при цьому не виконується, тобто взаємодія імпульсів нелінійна), потім через деякий час ці імпульси відновлюються так, що кожен з них зберігає свою форму і розміри (висота, ширина, швидкість), але більший імпульс виявляється попереду меншого.

Результатом взаємодії більшого та меншого імпульсів є лише те, що вони міняються порядком розташування та в кожного з них відбувається фазове зміщення, тобто більший імпульс виявляється зміщеним вперед відносно того положення, яке б він займав у випадку, коли б не було зіткнення з меншим імпульсом, а менший імпульс зазнає відповідного фазового зміщення назад.

Така поведінка імпульсів була дуже незвичною. Вони вели себе як частинки, не руйнувалися і не розсіювалися при зіткненні. Через те, щоб підкреслити їх частинкоподібні властивості, ці імпульси, і в деякому сенсі, відокремлені хвилі, дістали від Мартіна Крускала та Нормана Забускі назву *солітонів* (закінчення *он* в слові *солітон* має підкреслити, що відокремлені хвилі ведуть себе подібно до частинок).

Зараз солітонами називають будь-які локалізовані нелінійні хвилі, які взаємодіють з довільними локальними збуреннями і завжди відновлюють асимптотично свою точну початкову форму (з можливим зсувом фази). Кажуть ще, що такі локалізовані нелінійні хвилі взаємодіють пружним чином. Якщо локалізовані нелінійні хвилі взаємодіють не пружним чином, то їх називають просто відокремленими хвилями.

На прикладі рівняння Кортевега-де Фріза було виявлено, що відокремлені хвилі після зіткнення зберігають точно свою початкову форму, що є дивним, оскільки природно припустити, що в процесі їх взаємодії (через нелінійність) вони мали б руйнуватися. Виявлена властивість солітонів показала, що енергія у фізичних системах може поширюватись у вигляді локалізованих стійких пакетів без розсіювання.

Така властивість розв'язків є характерною не лише для рівняння Кортевега-де Фріза, але справджується для розв'язків багатьох нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними (відзначимо лише деякі з них): модифіковане рівняння Кортевега-де Фріза

$$q_\tau + 6q^2 q_\xi + \delta^2 q_{\xi\xi\xi} = 0,$$

рівняння Буссінеска

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha u^2 + \gamma u\right] = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

рівняння sin-Gordon

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \sin u,$$

нелінійне рівняння Шредінгера

$$q_t = i q_{xx} \pm 2iq^2 \bar{q},$$

де $q(t,x)$ — комплекснозначна функція, а $\bar{q}(t,x)$ — функція, комплексно спряжена до $q(t,x)$.

Зауважимо, що не всі нелінійні диференціальні рівняння із частинними похідними мають розв'язки у вигляді відокремленої хвилі. Серед нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, що мають розв'язки у вигляді відокремленої хвилі, більшість становлять рівняння, які не мають розв'язків з частинкоподібними властивостями, тобто більшість нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними не мають солітонів.

Так, наприклад, рівняння, відоме в фізиці елементарних частинок як рівняння φ^4 вигляду

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \lambda\varphi^3 - m^2\varphi, \quad \lambda > 0,$$

має розв'язок у вигляді відокремленої хвилі вигляду

$$\varphi(t,x) = \pm\,\mathrm{th}\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\gamma(x - vt) + \delta\right],$$

але не має розв'язків солітонного типу.

Деякі з нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними мають розв'язки, які ведуть себе майже як солітони в тому сенсі, що, коли зустрічаються їх дві відокремлені хвилі, то після зіткнення ці хвилі відроджуються з малими змінами профілю, при цьому втрачається лише мала кількість енергії.

Такі розв'язки називають солітоноподібними [27] і через, хоч і незначну, але відмінну від нуля, втрату енергії, кажуть, що зіткнення відокремлених хвиль демонструє не пружну солітонну поведінку.

Інколи поняття солітона трактують в більш широкому сенсі, як локалізований розв'язок зі скінченною енергією.

Використання терміну *солітон* залежить також від галузі науки, де він використовується. Наприклад, у фізиці частинок та фізиці твердого тіла взаємна проникливість хвиль не так важлива порівняно з іншими частинкоподібними властивостями, такими як локальність та скінченність енергії. У зв'язку з цим у цих розділах фізики солітонами називають об'єкти, які володіють певними частинкоподібними властивостями, але не є солітонами в сенсі згаданого вище означення.

Форма хвилі також не є визначальною рисою для визначення солітона: якщо солітони для рівняння Кортевега-де Фріза мають вигляд $\operatorname{sech}^2(x)$, то для модифікованого рівняння Кортевега-де Фріза вони мають вигляд $\operatorname{sech}(x)$. Слово *солітон* в першу чергу вказує на частинкоподібні властивості, ніж на форму.

Зараз поняття солітона широко розповсюджене, що пояснюється його універсальністю та значною кількістю його застосувань при поясненні різних процесів у нелінійних середовищах.

Якщо формулу для аналітичного опису одного (окремого) солітона (частинного розв'язку рівняння Кортевега-де Фріза) можна досить просто знайти за допомогою порівняно простих операцій інтегрування, то для того, щоб аналітично описати зіткнення двох і більше солітонів, яке було вивчено за допомогою обчислювальних експериментів, потрібно було розв'язати нові математичні, невідомі до того, проблеми. Розв'язання цієї проблеми привело до створення нового напрямку в математиці, який зараз називають теорією солітонів або ж методом ізомонодромних деформацій. У науковій літературі в СРСР цей метод отримав назву [12] *методу оберненої задачі розсіювання*.

Виникнення методу оберненої задачі розсіювання пов'язано з роботою Гарднера, Гріна, Крускала і Міури [38], в якій для рівняння Кортевега-де Фріза було запропоновано деяку нелінійну заміну змінних, після застосування якої рівняння Кортевега-де Фріза ставало лінійним і явно інтегрувалось. Оскільки при цій заміні використовувався формалізм прямої та оберненої задачі розсіювання для одновимірного (лінійного) рівняння Шредінгера (оператора Штурма-Ліувілля), то цей метод інтегрування стали називати методом оберненої задачі розсіювання.

Згодом у статті П.Лакса [40] були формалізовані результати праці [38] і було запропоновано поняття L, A пари Лакса. Потім у статті В.Є.Захарова і А.Б.Шабата [10] за допомогою розвитку методів Гарднера, Гріна, Крускала і Міури [38] і Лакса [40, 41] було розв'язано задачу Коші для нелінійного рівняння Шредінгера, що має важливі застосування в фізиці. При цьому було показано існування L, A пари Лакса для нелінійного рівняння Шредінгера і стало зрозумілим, що це поняття може бути використане при дослідженні й інших нелінійних диференціальних рівнянь із частинними похідними, а не тільки рівняння Кортевега-де Фріза. Після цього метод оберненої задачі розсіювання почав інтенсивно розвиватись і застосовуватись. Згодом було показано, що рівняння Кортевега-де Фріза є цілком інтегровною нескінченовимірною гамільтоновою системою [11]. Якщо спочатку для розв'язання початкових задач для рівняння Кортевега-де Фріза розглядались початкові умови з певного класу функцій, то згодом було розв'язано періодичну задачу Коші [18, 22]. При цьому були використані сучасні на той час досягнення з теорії диференціальних рівнянь, функціонального аналізу, алгебри, топології, алгебраїчної геометрії, комплексного аналізу. Інтенсивний розвиток методу оберненої задачі розсіювання дозволив розв'язати низку важливих задач в гідродинаміці, фізиці плазми, теорії електричних ланцюгів, біології тощо [5, 7, 8, 12–15, 17–23, 25–28, 30–32].

6. ВИСНОВКИ

Наведений огляд основних етапів виникнення та розвитку математичної теорії солітонів є підтвердженням того, що при плідній співпраці вчених з різних галузей науки (фізиків, механіків, математиків) використання досягнень з різноманітних напрямів сучасної математики дозволяє розв'язати складні математичні проблеми, створити нові ефективні (потужні) математичні методи аналізу і на їх основі знайти можливість досліджувати різні важливі задачі природознавства та техніки.

[1] *Абдуллаев Ф.Х.* Динамический хаос солитонов. – Ташкент: ФАН, 1990. – 167 с.

[2] *Абловиц М., Сигур Х.* Солитоны и метод обратной задачи. – М.: Мир, 1987. – 480 с.

[3] *Андерс И.А., Котляров В.П., Хруслов Е.Я.* Изогнутые асимптотические солитоны уравнения Кортевега-де Фриза // Теорет. и мат. физика. – 1994. – Т. 99, №1. – С.27–36.

[4] *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. – М.: Наука, 1974. – 431 с.

[5] *Богоявленский О.И.* Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. – М.: Наука, 1991. – 320 с.

[6] *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Пуассоновы структуры и алгебры Ли в гамильтоновой механике. – Ижевск: Издательский дом „Удмуртский университет", 1999. – 460 с.

[7] *Гентош О., Притула М., Прикарпатський А.* Диференціально-геометричні та Лі-алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2006. – 408 с.

[8] *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения. – М.: Мир, 1988. – 694 с.

[9] *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. – М.: Наука, 1988. – 368 с.

[10] *Захаров В.Е., Шабат А.Б.* Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах // Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1971. – т. 61, №1. – С.118– 134.

[11] *Захаров В.Е., Фаддеев Л.Д.* Уравнение Кортевега-де Фриза – вполне интегрируемая гамильтонова система // Функц. анализ и его прилож. – 1971. – Т. 5, №4. – С. 18 – 27.

[12] *Захаров В.Е., Манаков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П.* Теория солитонов: метод обратной задачи. – М.: Наука, 1980. – 320 с.

[13] Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов.*Отв. ред. Барьяхтар В.Г., Захаров В.Е., Черноусько В.М.* – Киев: Наук. думка, 1990. – 472 с.

[14] *Кадомцев Б.Б., Рыдник В.И.* Волны вокруг нас. – М.: Знание, 1981. – 151 с.

[15] *Калоджеро Ф., Дегасперис А.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. – М.: Мир, 1985. – 469 с.

[16] *Лезнов А.Н., Савельев М.В.* Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем. – М.: Наука, 1985. – 279 с.

[17] *Лэм Дж. Л.* Введение в теорию солитонов. – М.: Мир, 1983. – 294 с.

[18] *Марченко В.А.* Периодическая задача Кортевега-де Фриза // Мат. сб. – 1974. – Т. 95, №3. – С. 331 – 356.

[19] *Митропольский Ю.А., Боголюбов Н.Н.(мл.), Прикарпатский А.К., Самойленко В.Г.* Интегрируемые динамические системы: спектральные и алгебро-геометрические аспекты. – Киев: Наукова думка, 1987. – 296 с.

[20] *Мозер Ю.* Интегрируемые гамильтоновы системы и спектральная теория. – Ижевск: Ижевская республиканская типография, 1999. – 296 с.

[21] *Нижник Л.П.* Обратные задачи рассеяния для гиперболических уравнений. – Киев: Наукова думка, 1991. – 232 с.

[22] *Новиков С.П.* Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза // Функц. анализ и его прилож. – 1974. – Т. 8, №3. – С. 54 – 66.

[23] *Ньюэлл А.* Солитоны в математике и физике. – М.: Мир, 1989. – 324 с.

[24] *Олвер П.* Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989. – 637 с.

[25] *Прикарпатский А.К., Микитюк И.В.* Алгебраические аспекты интегрируемости нелинейных динамических систем на многообразиях. – Киев: Наукова думка, 1991. – 286 с.

[26] *Самойленко А.М., Прикарпатський Я.А.* Алгебро-аналітичні аспекти цілком інтегровних динамічних систем та їх збурень. – К.: Ін-т математики НАН України, 2002. – 237 с.

[27] *Самойленко В.Г., Самойленко Ю.І.* Асимптотичні розвинення для однофазових солітонно-подібних розв'язків рівняння Кортевега-де Фріза зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, №1. – С.111 – 124.

[28] *Солитоны. Ред. Буллаф Р., Кодри Ф.* – М.: Мир, 1983. – 408 с.

[29] *Стокер Дж.* Волны на воде. – М.: ИЛ, 1959.

[30] *Тахтаджян Л.А., Фаддеев Л.Д.* Гамильтонов подход в теории солитонов. – М.: Наука, 1986. – 527 с.

[31] *Филиппов А.Т.* Многоликий солитон. – М.: Наука, 1986. – 223 с.

[32] *Хруслов Е.Я.* Асимптотические решения задачи Коши для уравнения Кортевега-де Фриза с начальными данными типа ступеньки // Мат. сб. – 1976. – Т.99, №2. – С.261 – 286.

[33] *Шутц Б.* Геометрические методы математической физики. – Волгоград: Платон, 1995. – 303 с.

[34] *Airy G.B.* Tides and waves, Encyclopedia Metropolitana. – London, 1845. – V. 5. – P. 241 – 396.

[35] *Blaszak M.* Multi-Hamiltonian theory of dynamical system. – Springer, 1988. – 350 p.

[36] *Davydov A.S.* Solitons in biology // Physica Scripta. – 1979. – v. 20, no. 2. – P. 307-315.

[37] *Fermi E., Pasta J.R., Ulam S.M.* Studies of nonlinear problems. Technical Report LA – 1940, Los Alamos Sci. – 1955.

[38] *Gardner C.S., Green J.M., Kruskal M.D., Miura R.M.* Method for solving the Korteveg-de Vries equation // Physical Review Letters. – 1967. – 19. – P. 1095–1097.

[39] *Korteweg D.J., de Vries G.* On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary waves // Philos. Mag. 1895. – v. 39. – p. 422 – 433.

[40] *Lax P.D.* Integrals of nonlinear equations of evoluation and solitary waves // Communications Pure Applied Mathematics. – 1968. – V.21, n.15. – P. 467 – 490. (Переклад російською мовою: Интегралы нелинейных эволюционных уравнений и уединенные волны // Математика. – 1969. – т.13, №15. – С.128–150.

[41] *Lax P.D.* Periodic solutions of the Korteweg-de Vries equation // Lecture in Appl. Mathem. – 1974. – V. 15. – P.467 – 490.

[42] *Lonngren K., Scott A. (Editors).* Solitons in action. – N.-Y.: Academic Press, 1978. Перклад російською: Солитоны в действии. – М.: Мир, 1981. – 312 с.

[43] Nonlinear wave motion. *Editor Newell A.C.* Lectures in Applied Mathematics. – Providence: American Mathematical Society, 1974, V. 15. – 229 p.

[44] *Russell J. Scott.* Report on waves // Reports Fourteenth Meeting of the British Assoc., John Murray, London. – 1844. – p. 311.

[45] *Russell J. Scott.* The modern system of naval architecture. – London: Day and Son, 1865. – 1. – 208 p.

[46] *Russell J. Scott.* The wave of translation in the ocean of water, air and ether. – London: Trubner, 1895.

[47] *Toda M.* Theory of nonlinear lattices. – Berlin: Springer, 1981.

[48] *Zabusky N.J., Kruskal M.D.* Interacion of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // Physical Review Letters. – 1965, **15**. – P. 240 – 243.

THE WAVE OF TRANSLATION AND MATHEMATICAL THEORY OF SOLITONS

Valeriy SAMOYLENKO, Yuliya SAMOYLENKO

Kyiv National Taras Shevchenko University,
64 Volodymyrska Str., Kyiv 01033, Ukraine

There are described main stages of origin and development of mathematical theory of solitons that is new section of modern mathematics intensively developing during last 40 years. Relation of the soliton theory with different section of nature sciences is considered.