МЕТРИЧНІ ОЦІНКИ ДИСКРИМІНАНТА МНОГОЧЛЕНА, КОЕФІЦІЄНТИ ЯКОГО ЛЕЖАТЬ НА ГЛАДКІЙ КРИВІЙ

©*2006 р. Михайло СИМОТЮК*

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3-б, Львів 79601

Редакція отримала статтю 12 серпня 2006 р.

Встановлено метричні оцінки для дискримінанта многочлена з цілочисловим параметром, коефіцієнти якого лежать на гладкій кривій.

1. ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ ТА РЕЗУЛЬТАТІВ

Нехай $L(\lambda, k)$, $k = (k_1, \dots, k_p) \in \mathbb{Z}^p$, — многочлен від λ степеня $n \geq 2$ вигляду $L(\lambda, k) \equiv \lambda^n + \sum\limits_{j=0}^{n-1} A_j(k)\lambda^j$, де $A_j(k) = \sum\limits_{|s| \leq n-j} A_j^s k_1^{s_1} \dots k_p^{s_p}$, $A_j^s \in \mathbb{R}$, $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^p$, $j = 0, 1, \dots, n-1$. Через $D_L(k), k \in \mathbb{Z}^p$, позначимо дискримінант многочлена $L(\lambda, k)$. При дослідженні задач з нелокальними та багатоточковими умовами за змінною t та умовами періодичності за змінними $x_1, \dots, x_p$ для рівняння з частинними похідними

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{i\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{i\partial x_p}\right) u(t, x) = 0,$$

виникає потреба [5, 6] з'ясувати питання про можливість виконання нерівності

$$|D_L(k)| \geq (1 + |k|)^{-\delta}, \quad |k| = |k_1| + \dots + |k_p|, \quad \delta \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

УДК 517.95; MSC 2000: 11J83
Робота виконана при фінансовій підтримці ДФФД України (проект № 10.01/053)

Означення 1. *Вектор* $\vec{A} = \left(A_0^{(n,0,\dots,0)}, \dots, A_0^{(0,0,\dots,n)}\right) \in \mathbb{R}^p$, *складений з коефіцієнтів вільного члена* $A_0(k)$ *при* $k_1^n, \dots, k_p^n$, *будемо називати* δ*-нормальним, якщо для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p$ *виконується нерівність* (1).

Означення 2. *Гладкий підмноговид* $M \subset \mathbb{R}^p$ *будемо називати* δ*-нормальним, якщо майже всі (стосовно міри Лебега на* M*) його точки є* δ*-нормальними. Еквівалентно,* $\operatorname{meas}\{\vec{A} \in M : \vec{A}$ *не є* δ*-нормальним*$\} = 0$.

У [2, 5] встановлено, що $\mathbb{R}^p$ є δ-нормальним многовидом для будь-якого $\delta > (n-1)(p-n)$. В.С.Ільків (див. [6, § 14.3]) підняв питання про характеризацію δ-нормальних підмноговидів в $\mathbb{R}^p$, розмірність яких є нижчою від p; при цьому в теоремі 5 на с. 225 [6, § 14.3] встановлено, що всі точки майже всіх алгебричних многовидів[1] є δ-нормальними при $\delta > (n-1)(p-n)$. Мета даної роботи — описати одновимірні δ-нормальні підмноговиди в $\mathbb{R}^p$.

Означення 3. *Гладку криву* $M = \{(f_1(t), \dots, f_p(t)) : t \in (a,b)\}$ *будемо називати* n*-невиродженою* ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) *в просторі* $\mathbb{R}^p$, *якщо вронскіан* $W(t)$ *системи* $N = \sum\limits_{j=0}^{n-1} C_{p+j-1}^{p-1}$ *функцій*

$$g_s(t) \equiv f_1^{s_1}(t) \cdot \ldots \cdot f_p^{s_p}(t), \quad s \in \mathbb{Z}_+^p, \quad 0 \leq |s| \leq n-1,$$

є відмінним від нуля в кожній точці $t \in (a,b)$.

Відзначимо, що властивість гладкої кривої M бути n-невиродженою не залежить від її параметризації. Це випливає з відомої властивості вронскіана, яка описана в задачі 56 із [4, с. 126]. Зауважимо також, що гладка крива $\{(f_1(t), f_2(t)) : t \in (a,b)\}$ є 2-невиродженою на площині, якщо її кривина відмінна від нуля.

Основним результатом даної роботи є наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо крива* $M = \{(f_1(t), \dots, f_p(t)) : t \in (a,b)\}$, *де* $f_j \in C^{(N-1)}(a,b)$, $j = 1, \dots, p$, $N = \sum\limits_{j=0}^{n-1} C_{p+j-1}^{p-1}$, *є* n*-невиродженою* ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) *в просторі* $\mathbb{R}^p$, *то вона є* δ*-нормальною при* $\delta > p(N-1) - n(n-1)$.

Отже, n-невироджені гладкі криві в просторі $\mathbb{R}^p$ „успадковують" властивість нормальності цього простору, однак з гіршим[2] значенням для показника нормальності δ.

---

[1] стосовно міри Лебега в просторі, координати якого є коефіцієнтами алгебричних рівнянь, що задають ці многовиди

[2] з огляду на очевидну нерівність $N > n$ для $n \geq 2$, $p \geq 2$

Наведемо приклади кривих, для яких властивість n-невиродженості виконується або порушується.

Приклад 1. Якщо $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ — раціонально незалежні дійсні числа, то для довільного $n \geq 2$ крива $\{(e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_p t}) : t \in (a,b)\}$ є n-невиродженою в $\mathbb{R}^p$. Дійсно, в даному випадку показники всіх експонент $e^{(s_1\lambda_1+\ldots+s_p\lambda_p)t}$, $s \in \mathbb{Z}_+^p$, $0 \leq |s| \leq n-1$, є попарно різними, а тому ці експоненти є функціонально незалежними на (a,b). Відзначимо також, що дана крива не є алгебричною кривою.

Приклад 2. Коло $K = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 = 1\}$, гіпербола $H = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 - y_2^2 = 1\}$, парабола $P = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 - y_1^2 = 0\}$ не є n-нормальними кривими в $\mathbb{R}^2$, якщо $n \geq 3$. У цьому легко переконатися, якщо вибрати такі параметризації цих кривих: $y_1 = \cos t$, $y_2 = \sin t$, $t \in [0, 2\pi)$, — для K; $y_1 = \pm \operatorname{ch} t$, $y_2 = \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$, — для H (вибір знаку відповідає вибору між лівою та правою гілками гіперболи); $y_1 = t$, $y_2 = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, — для P.

Таким чином, теорема 1 не дає відповіді на питання про нормальність кривих K, H, P. Цю прогалину заповнюють наступні твердження.

Теорема 2. *Коло K та гіпербола H є δ-нормальними кривими в $\mathbb{R}^2$, якщо $\delta > (n-1)(4-n)$.*

Теорема 3. *Парабола P є δ-нормальною кривою в просторі $\mathbb{R}^2$, якщо $\delta > 4(n-1)$.*

Зауважимо, що з результату В.С.Ільківа випливає, що для майже всіх чисел $\beta \in \mathbb{R}_+$ всі точки кіл $K_\beta = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 = \beta\}$, гіпербол $H_\beta = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 - y_2^2 = \beta\}$, парабол $P_\beta = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_2 - y_1^2 = \beta\}$ є δ-нормальними, якщо $\delta > (n-1)(2-n)$.

2. ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Для доведення сформульованих теорем використаємо такі допоміжні твердження.

Лема 1. [7] *Нехай $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ — така дійснозначна функція, що $f \in C^{(n+1)}(a,b)$ і в кожній точці $t \in (a,b)$ виконуються нерівності*

$$\max_{1 \leq j \leq n+1} |f^{(j)}(t)| \leq C, \qquad \max_{1 \leq j \leq n} |f^{(j)}(t)| \geq c, \quad C, c > 0.$$

Тоді для довільного відрізка $[a_1, b_1] \subset (a,b)$, довжина якого не перевищує c/C, знайдеться таке q, $1 \leq q \leq n$, що $|f^{(q)}(t)| \geq c/2$ для всіх $t \in [a_1, b_1]$.

Лема 2. [5] *Нехай $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ — така дійснозначна функція, що $f \in C^{(n)}(a,b)$ і для всіх $t \in (a,b)$ виконується нерівність $|f^{(n)}(t)| > \delta$, $\delta > 0$. Тоді для довільних $[a_1,b_1] \subset (a,b)$ і $\varepsilon > 0$ виконується нерівність*

$$\operatorname{meas}\{t \in [a_1,b_1] : |f(t)| < \varepsilon\} \le 2n\sqrt[n]{n!\varepsilon/\delta}.$$

3. ДОВЕДЕННЯ ОСНОВНИХ РЕЗУЛЬТАТІВ

Перейдемо до доведення сформульованих теорем.

Доведення теореми 1. Для дискримінанта $D_L(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, многочлена $L(\lambda,k)$ справедливе наступне зображення (див. [3, § 33–35]):

$$D_L(k) = \pm n^n A_0^{n-1}(k) + R(A_0(k),\ldots,A_{n-1}(k)), \tag{2}$$

де $R(z_0,\ldots,z_{n-1})$ — деякий многочлен змінних $z_0,\ldots,z_{n-1}$, степінь якого за змінною z_0 (при фіксованих значеннях змінних $z_1,\ldots,z_{n-1}$) не перевищує $(n-2)$. Якщо $\vec{A} \in M$, $M = \{(f_1(t),\ldots,f_p(t)) : t \in (a,b)\}$, то з рівності (2) дістаємо, що

$$D_L(k) = \pm n^n \left(f_1(t)k_1^n + \ldots + f_p(t)k_p^n + B_0(k)\right)^{n-1} +$$

$$+R\left(f_1(t)k_1^n + \ldots + f_p(t)k_p^n + B_0(k), A_1(k),\ldots,A_{n-1}(k)\right),$$

де $B_0(k) = \sum\limits_{\substack{|s|\le n,\\ s\notin\{\sigma_1,\ldots,\sigma_p\}}} A_j^s k_1^{s_1}\ldots k_p^{s_p}$, $\sigma_j = (\underbrace{0,\ldots,n}_{j},\ldots,0)$, $j = 1,\ldots,p$. Розкриваючи за поліноміальною формулою степені

$$\left(f_1(t)k_1^n + \ldots + f_p(t)k_p^n + B_0(k)\right)^j, \quad j \le n-1,$$

для дискримінанта $D_L(k)$ дістаємо таке зображення:

$$D_L(k) = \pm n^n \left(f_1^{n-1}(t)k_1^{n(n-1)} + \ldots + f_p^{n-1}(t)k_p^{n(n-1)}\right) + S(t,k), \tag{3}$$

де $S(t,k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — лінійна комбінація системи функцій

$$g_s(t), \quad 0 \le |s| \le n-1, \quad s \notin \{\sigma_1,\ldots,\sigma_p\},$$

коефіцієнти якої не перевищують $C_1(1+|k|)^{n(n-1)}$ (тут C_1 — додатна стала, що не залежить від $k \in \mathbb{Z}^p$). Нехай $W_q(f)$, $q = 1,\ldots,p$, — вронскіан системи функцій $f(t)$ та $g_s(t)$, $0 \le |s| \le n-1$, $s \ne \sigma_q$. Для вектора $k \in \mathbb{Z}^p$

через $q(k)$ позначимо $\min\{j : |k_j| = \max_{1\le r\le p}|k_r|\}$. Із формули (3) випливає, що на проміжку (a,b) дискримінант $D_L(k)$ як функція змінної t є розв'язком звичайного диференціального рівняння порядку $(N-1)$

$$W_{q(k)}(D_L(k)) = \pm n^n k_q^{n(n-1)} W_{q(k)}\left(f_{q(k)}^{n-1}(t)\right) = \pm n^n k_{q(k)}^{n(n-1)} W(t). \qquad (4)$$

Нехай $[a_1,b_1]$ — довільний такий відрізок, що $[a_1,b_1]\subset(a,b)$. Оскільки крива M є n-невиродженою в просторі $\mathbb{R}^p$, то існує така стала $C_2>0$, $C_2=C_2(a_1,b_1)$, що $|W(t)|\ge C_2$ для всіх $t\in[a_1,b_1]$. Враховуючи, що $|k_{q(k)}|\ge(1+|k|)/(2p)$, $k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}$, з рівності (4) дістаємо, що в кожній точці $t\in[a_1,b_1]$ виконується нерівність

$$\max_{1\le j\le N-1}\left|\frac{d^j D_L(k)}{dt^j}\right| \ge C_3(1+|k|)^{(n-1)n}, \quad k\in\mathbb{Z}^p\backslash\{\vec{0}\}.$$

де $C_3=C_3(a_1,b_1,n,p)>0$. З рівності (3) випливає, що

$$\forall t\in[a,b] \quad \max_{1\le j\le N}\left|\frac{d^j D_L(k)}{dt^j}\right| \le C_4(1+|k|)^{(n-1)n}, \quad k\in\mathbb{Z}^p.$$

де $C_4=C_4(a_1,b_1,n,p)>0$. Розіб'ємо $[a_1,b_1]$ на відрізки I_j так, щоб виконувались нерівності $\operatorname{meas} I_j\le C_3/C_4$, $1\le j\le[C_4(b_1-a_1)/C_3]+1=m$. Згідно з лемою 1, для кожного відрізка I_j знайдеться показник $r(j)\in\{1,\dots,N-1\}$ такий, що

$$\forall t\in I_j \quad \left|\frac{d^{r(j)} D_L(k)}{dt^{r(j)}}\right| \ge \frac{1}{2}C_3(1+|k|)^{(n-1)n}. \qquad (5)$$

Нехай $E_\delta(k)=\{t\in[a_1,b_1] : |D_L(k)|<(1+|k|)^{-\delta}\}$, $\delta\in\mathbb{R}$, $k\in\mathbb{Z}^p$. Згідно з лемою 2, з нерівності (5) отримуємо, що для довільного $j=1,\dots,m$,

$$\operatorname{meas}(E_\delta(k)\cap I_j)\le C_5(1+|k|)^{-(\delta+n(n-1))/r(j)}, \quad C_5>0, \quad k\in\mathbb{Z}^p. \qquad (6)$$

Враховуючи, що кількість m відрізків розбиття не залежить від $k\in\mathbb{Z}^p$, з оцінок (6) дістаємо, що при $\delta>p(N-1)-n(n-1)$

$$\operatorname{meas} E_\delta(k)\le C_6(1+|k|)^{-\frac{\delta+n(n-1)}{N-1}} = C_6(1+|k|)^{-p-\varepsilon_1}, \quad k\in\mathbb{Z}^p, \qquad (7)$$

де $\varepsilon_1=(\delta+n(n-1))/(N-1)-p>0$. Тому при $\delta>p(N-1)-n(n-1)$ ряд $\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\operatorname{meas} E_\delta(k)$ є збіжним. Тоді з леми Бореля–Кантеллі [5, с. 13] випливає, що міра Лебега тих чисел t, які належать до нескінченної кількості множин $E_\delta(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p$, дорівнює нулю. Теорему доведено.

Доведення теореми 2. Розглянемо випадок правої гілки гіперболи[3], використовуючи таку її параметризацію: $y_1 = \operatorname{ch} t$, $y_2 = \operatorname{sh} t$, $t \in \mathbb{R}$. У цьому випадку з формули (2) дістаємо

$$\begin{aligned} D_L(k) &= \pm n^n \left(\operatorname{ch} t\, k_1^n + \operatorname{sh} t\, k_2^n + B_0(k)\right)^{n-1} + \\ &+ R\left(\operatorname{ch} t\, k_1^n + \operatorname{sh} t\, k_2^n + B_0(k), A_1(k), \ldots, A_{n-1}(k)\right) = \\ &= \pm \tfrac{n^n}{2^{n-1}} \left(e^{(n-1)t}(k_1^n + k_2^n)^{n-1} + e^{-(n-1)t}(k_1^n - k_2^n)^{n-1}\right) + T(t,k), \end{aligned} \tag{8}$$

де $T(t,k)$ — лінійна комбінація функцій e^{jt}, $0 \le |j| \le n-2$, коефіцієнти якої залежать від $k \in \mathbb{Z}^2$. Із формули (8) випливають очевидні рівності

$$\left(\frac{d}{dt} + (n-1)\right) \prod_{|j| \le n-2} \left(\frac{d}{dt} - j\right) D_L(k) = \pm C_7(n)(k_1^n + k_2^n)^{n-1} e^{(n-1)t}, \tag{9}$$

$$\left(\frac{d}{dt} - (n-1)\right) \prod_{|j| \le n-2} \left(\frac{d}{dt} - j\right) D_L(k) = \pm C_7(n)(k_1^n - k_2^n)^{n-1} e^{-(n-1)t}, \tag{10}$$

де $C_7(n) = n^n(2n-2)!/2^{n-1}$. Оскільки для довільного $k \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{\vec{0}\}$ виконується хоча б одна з нерівностей

$$|k_1^n + k_2^n| \ge (1+|k|)^n/2^{2n-1}, \quad |k_1^n - k_2^n| \ge (1+|k|)^n/2^{2n-1},$$

то із співвідношень (9), (10) отримуємо, що для довільного відрізка $[a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$ виконується нерівність

$$\forall t \in [a_1, b_1] \quad \max_{1 \le j \le 2n-2} \left| \frac{d^j D_L(k)}{dt^j} \right| \ge C_8(1+|k|)^{(n-1)n}, \quad k \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{\vec{0}\},$$

де $C_8 = C_8(a_1, b_1, n) > 0$. Легко перевірити, що

$$\forall t \in [a_1, b_1] \quad \max_{0 \le j \le 2n-1} \left| \frac{d^j D_L(k)}{dt^j} \right| \le C_9(1+|k|)^{(n-1)n}, \quad k \in \mathbb{Z}^2,$$

де $C_9 = C_9(a_1, b_1, n) > 0$. Як і при доведенні теореми 1, на підставі лем 1, 2 з отриманих оцінок дістаємо, що при $\delta > (n-1)(4-n)$

$$\operatorname{meas} E_\delta(k) \le C_{10}(1+|k|)^{-2-\varepsilon_2}, \quad k \in \mathbb{Z}^2, \tag{11}$$

де $\varepsilon_2 = \frac{\delta + n(n-1)}{2n-2} - 2 > 0$. Тому при $\delta > (n-1)(4-n)$ ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^2} \operatorname{meas} E_\delta(k)$ є збіжним. З леми Бореля–Кантеллі отримуємо, що майже всі точки правої гілки гіперболи, які відповідають відрізку параметризації $t \in [a_1, b_1]$,

[3]для лівої гілки гіперболи доведення є аналогічним

є δ-нормальними при $\delta > (n-1)(4-n)$. Для завершення доведення теореми залишається врахувати, що відрізок $[a_1, b_1]$ є довільним.

Твердження теореми 2 для кола проводиться аналогічно.

Доведення теореми 3. Для параболи $y_1 = t$, $y_2 = t^2$, $t \in \mathbb{R}$, із формули (2) дістаємо

$$\begin{gathered} D_L(k) = \pm n^n \left(t\, k_1^n + t^2\, k_2^n + B_0(k)\right)^{n-1} + \\ + R\left(t\, k_1^n + t^2\, k_2^n + B_0(k), A_1(k), \ldots, A_{n-1}(k)\right). \end{gathered} \tag{12}$$

З рівності (12) видно, що для $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$ дискримінант $D_L(k)$ є многочленом змінної t степеня $(n-1)$, старший коефіцієнт якого дорівнює $\pm n^n k_1^{n(n-1)}$, тому для всіх $k = (k_1, 0) \in \mathbb{Z}^2 \backslash \{\vec{0}\}$

$$\left|\frac{d^{n-1} D_L(k)}{dt^{n-1}}\right| = n^n (n-1)! |k_1|^{n(n-1)} \geq C_{11}(1+|k|)^{(n-1)n},$$

де $C_{11} = C_{11}(n) > 0$. Якщо ж $k_2 \neq 0$, то з формули (12) випливає, що $D_L(k)$ є многочленом змінної t степеня $(2n-2)$, старший коефіцієнт якого дорівнює $\pm n^n k_2^{n(n-1)}$, тому в цьому випадку

$$\left|\frac{d^{2n-2} D_L(k)}{dt^{2n-2}}\right| = n^n (2n-2)! |k_2|^{n(n-1)} \geq n^n (2n-2)!,$$

якщо $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, k_2 \neq 0$. Згідно з лемою 2 виконуються нерівності

$$\operatorname{meas} E_\delta(k) \leq C_{12}(1+|k|)^{-n-\delta/(n-1)}, \quad k = (k_1, 0) \in \mathbb{Z}^2,$$

$$\operatorname{meas} E_\delta(k) \leq C_{13}(1+|k|)^{-\delta/(2n-2)}, \quad k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2, \quad k_2 \neq 0.$$

Тому при $\delta > 4(n-1)$ ряд $\sum\limits_{k \in \mathbb{Z}^2} \operatorname{meas} E_\delta(k)$ є збіжним. Для завершення доведення теореми залишається використати лему Бореля–Кантеллі.

4. ЗАКЛЮЧНІ ЗАУВАЖЕННЯ

На завершення наведемо зауваження, які стосуються викладених результатів.

Зауваження 1. Незначно модифікуючи доведення попередніх теорем, можна встановити такі результати. Розмірність Гаусдорфа (означення та властивості розмірності Гаусдорфа див. у [1]) множини тих векторів $\vec{A}$, які лежать на n-невиродженій кривій M в просторі $\mathbb{R}^p$ і не є δ-нормальними не перевищує $\frac{p(N-1)}{\delta+n(n-1)}$, якщо $\delta > p(N-1) - n(n-1)$. Розмірність Гаусдорфа множини точок кола K (або гіперболи H), які не є δ-нормальними, не перевищує $\frac{4(n-1)}{\delta+n(n-1)}$, якщо $\delta > (n-1)(4-n)$; а розмірність Гаусдорфа множини точок параболи P, які не є δ-нормальними, не перевищує $\frac{4(n-1)}{\delta}$, якщо $\delta > 4(n-1)$.

Зауваження 2. Перспективним є встановлення p-адичних аналогів результатів даної роботи. Для такого дослідження замість допоміжних тверджень §2 можна використати результати розділу 3 роботи [8].

[1] *Берник В.И., Мельничук Ю.В.* Диофантовы приближения и размерность Хаусдорфа. – Минск: Наука и техника, 1988. – 144 с.

[2] *Берник В.И., Пташник Б.И., Салыга Б.О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4.– С. 637–645.

[3] *Ван дер Варден Б.Л.* Алгебра. – М.: Наука, 1979. – 624 с.

[4] *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: в 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 2. – 432 с.

[5] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[6] *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

[7] *Пяртли А.С.* Диофантовы приближения на подмногообразиях евклидова пространства // Функцион. анализ и его приложения. – 1969. – **3**, вып. 4. – С. 59–62.

[8] *Kleinbock D., Tomanov G.* Flows on S-arithmetic homogeneous spaces and applications to metric diophantine approximation // Preprint, 2004. – P. 1–56.

METRIC ESTIMATES OF DISCRIMINANT OF POLYNOMIAL WHICH COEFFICIENTS BELONG TO SMOOTH CURVE

Mykhaylo SYMOTYUK

Pidstryhach Institute of Applied Problems
in Mechanics and Mathematics of NASU,
3-b Naukova Str., Lviv 79601, Ukraine

The metric estimates of discriminant of polynomial with entire parameter, which coefficients belong to smooth curve, are established.