ІНТЕГРОВНІ СИСТЕМИ НА СФЕРІ S^2 З ДОДАТКОВИМ ПЕРШИМ ІНТЕГРАЛОМ ЧЕТВЕРТОГО СТЕПЕНЯ ЗА ІМПУЛЬСАМИ

 Андрій ВУС

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 21 червня 2006 р.

Робота присвячена проблемі повної інтегровності гамільтонових динамічних систем з конфігураційним простором у вигляді двовимірної сфери. Розглянуто питання існування додаткового першого інтеграла у вигляді полінома четвертого степеня за імпульсами та отримано явний опис відповідних інтегровних ріманових метрик.

У теорії скінченновимірних гамільтонових динамічних систем і досі є велика кількість відкритих проблем. Однією з них є проблема інтегровності геодезійних потоків ріманових метрик на сфері S^2.

Нагадаємо, що на довільному гладкому многовиді M з рімановою метрикою ds^2 можна розглянути геодезійний потік — гамільтонову систему з гамільтоніаном $\mathcal{H} = \frac{1}{2}\|\vec{p}\|^2$, де $\vec{p}$ — вектор узагальнених імпульсів і $\|\cdot\|$ — норма на дотичному просторі, індукована метрикою ds^2. У випадку, коли розглядуваний многовид є сферою S^2, відповідний геодезійний потік є гамільтоновою системою з двома ступенями вільності, тому достатньою умовою його інтегровності за Ліувіллем є існування ще однієї функції на дотичному розшаруванні $F : T^*S^2 \to \mathbb{R}$, функціонально незалежної з $\mathcal{H}$, яка є сталою на траєкторіях гамільтонової системи. Вважатимемо, що метрика на сфері в глобальних ізотермічних координатах вже має вигляд

$$ds^2 = \lambda(x, y)(dx^2 + dy^2), \tag{1}$$

УДК 514.745.82; MSC 2000: 35N10, 70H06

а відповідний гамільтоніан — вигляд

$$\mathcal{H} = (p_x^2 + p_y^2)/\lambda(x, y). \tag{2}$$

Надалі перейдемо до глобальної комплексної координати $z \in \mathbb{C}$, де $z = x + iy$. У координатах $(z, \bar{z})$ метрика (1) має вигляд $ds^2 = \lambda(z, \bar{z})dzd\bar{z}$, а відповідний гамільтоніан (2) задається формулою $\mathcal{H} = 4p\bar{p}/\lambda(z, \bar{z})$, де $p = (p_x - ip_y)/2$ — відповідний узагальнений імпульс, $\bar{p} = (p_x + ip_y)/2$.

Питання про існування додаткових перших інтегралів, що є лінійними або квадратичними функціями за імпульсами, є повністю дослідженим (див., наприклад, [4,6]). Однак для випадку додаткових інтегралів вищих порядків відомі лише деякі частинні випадки, які переважно пов'язані з класичними інтегровними задачами динаміки твердого тіла. У результаті за допомогою принципу Мопертюї можна побудувати декілька сімей інтегровних геодезійних потоків на сфері S^2 з додатковими першими інтегралами, що є поліномами третього або четвертого порядку за імпульсами. Дослідження деяких властивостей цих сімей було проведено у [7,8]. Визначальною рисою вищезгаданих інтегровних метрик на S^2 є їхній однопараметричний характер, тобто можливість зобразити відповідну функцію $\lambda(z, \bar{z})$ у вигляді $\lambda(z, \bar{z}) = (h - V(z, \bar{z}))\mu(z, \bar{z})$, де $h \in \mathbb{R}$ — довільне дійсне число. Однак повного опису відповідних інтегровних геодезійних потоків на сфері досі не зроблено. Більше того, у монографії [1] наведено гіпотезу А.Т.Фоменка про неіснування ріманових метрик на сфері, геодезійні потоки яких інтегровні за допомогою інтегралів степеня $n > 4$ і не допускають існування інтегралів менших степенів. Ця гіпотеза і на даний момент залишається відкритою.

У роботі [2] було запропоновано підхід до знаходження додаткового кубічного за імпульсами першого інтеграла, який використовує побудову диференціальних рівнянь на відшукання функції $\lambda(x, y)$ інтегровної метрики (1) у симетричній формі. При цьому отримано загальну систему диференціально-функціональних рівнянь, і описано декілька частинних розв'язків аж до явного опису інтегровних метрик (1) на сфері, геодезійні потоки яких інтегровні за допомогою кубічного за імпульсами першого інтеграла. У цій же роботі було сконструйовано інтегровну гамільтонову систему на сфері, яка хоч і не є геодезійним потоком (функція $\lambda(x, y)$ не є неперервно диференційовною на S^2), але описує рух точки на сфері під дією деякого однозначного потенціального поля. Метою даної роботи є розширення розробленої методики на випадок існування додаткового першого інтеграла, що є поліномом четвертого степеня за імпульсами.

БАЗОВА МОДЕЛЬ

Розглянемо питання про існування додаткового першого інтеграла у вигляді однорідного полінома четвертого степеня

$$F = E^{40}(x,y)p_x^4 + E^{31}(x,y)p_x^3p_y + E^{22}(x,y)p_x^2p_y^2 + \\ + E^{13}(x,y)p_xp_y^3 + E^{04}(x,y)p_y^4 \tag{3}$$

для геодезійного потоку метрики (1) на сфері S^2. У координатах $z, \bar{z}, p, \bar{p}$ додатковий перший інтеграл F має вигляд

$$F = A(z,\bar{z})p^4 + B(z,\bar{z})p^3\bar{p} + C(z,\bar{z})p^2\bar{p}^2 + D(z,\bar{z})p\bar{p}^3 + E(z,\bar{z})\bar{p}^4. \tag{4}$$

Оскільки перший інтеграл F є дійснозначною функцією, то відповідні симетричні функціональні коефіцієнти у рівності (4) є комплексно-спряженими, тобто $E = \overline{A}, D = \overline{B}, C = \overline{C} \in \mathbb{R}$.

Умовою того, що функція (4) є першим інтегралом гамільтонової системи з гамільтоніаном $\mathcal{H}$, є тотожна рівність нулеві дужки Пуассона:

$$\{\mathcal{H}, F\} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{z}}\frac{\partial F}{\partial\bar{p}} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\bar{p}}\frac{\partial F}{\partial\bar{z}} = 0.$$

Прирівнюючи до нуля коефіцієнти при усіх мономах $p^i\bar{p}^j$ у дужці Пуассона $\{\mathcal{H}, F\}$, одержимо систему рівнянь

$$\begin{cases} A_2 = 0, \\ A_1\lambda + B_2\lambda + 4A\lambda_1 + B\lambda_2 = 0, \\ B_1\lambda + C_2\lambda + 3B\lambda_1 + 2C\lambda_2 = 0, \\ C_1\lambda + D_2\lambda + 2C\lambda_1 + 3D\lambda_2 = 0, \\ D_1\lambda + E_2\lambda + D\lambda_1 + 4E\lambda_2 = 0, \\ E_1 = 0, \end{cases} \tag{5}$$

де вжито позначення $A_1 := \partial A/\partial z, A_2 := \partial A/\partial\bar{z}$ і т.п.

Із першого рівняння системи (5) негайно отримуємо, що $A = A(z)$ є голоморфною функцією аргумента $z \in \mathbb{C}$. Відповідно, диференціальні форми $\lambda(z,\bar{z})dzd\bar{z}$, $dz^4/A(z)$, $dz^3d\bar{z}/B(z,\bar{z})$, $dz^2d\bar{z}^2/C(z,\bar{z})$ є інваріантними щодо довільного голоморфного перетворення глобальної координати z, тобто $dz^4/A(z) = d\omega^4/\tilde{A}(\omega), \lambda(z,\bar{z})dzd\bar{z} = \tilde{\lambda}(\omega,\bar{\omega})d\omega d\bar{\omega}$ тощо.

Таким чином, зручно розглядати випадок, коли $A(z) = const = 1/4$, оскільки всі інші інтегровні випадки можуть бути легко отримані за допомогою заміни змінної $d\omega/dz = (4\tilde{A}(\omega))^{1/4}$. Не обмежуючи загальності, надалі вважатимемо, що $A(z) = 1/4$. Введемо позначення: $\beta = -B\lambda$,

$\Phi = C\lambda^2$, $\gamma = -D\lambda$. Тоді відповідна система рівнянь (5) на невідомі функції λ, β, γ набуде вигляду

$$\begin{cases} \beta_2 = \lambda_1, \\ \beta_1\lambda + 2\beta\lambda_1 = \Phi_2, \\ \gamma_2\lambda + 2\gamma\lambda_2 = \Phi_1, \\ \gamma_1 = \lambda_2. \end{cases} \tag{6}$$

Зауважимо, що з другого та третього рівнянь системи (6) випливає, що функція Φ є дійснозначною, а β та γ — комплексно-спряженими. Крім того, функція $\Phi(z, \bar{z})$ сама є інваріантом щодо голоморфних перетворень глобальної координати z, тобто $\Phi(z, \bar{z}) = \widetilde{\Phi}(\omega, \bar{\omega})$.

Система рівнянь (6) дозволяє записати достатню умову інтегровності описуваної гамільтонової системи за допомогою додаткового першого інтеграла четвертого степеня за імпульсами в наступному вигляді:

Теорема 1. *Якщо існує дійснозначна функція* $R(z, \bar{z})$, *яка задовольняє диференціальне рівняння*

$$(R_{111}R_{12} + 2R_{11}R_{112})_1 = (R_{222}R_{12} + 2R_{22}R_{122})_2,$$

то гамільтонова система з гамільтоніаном (2), *де* $\lambda(z, \bar{z}) = \frac{\partial^2 R}{\partial z \partial \bar{z}}$ *допускає додатковий перший інтеграл 4-го степеня за імпульсами.*

Дійсно, при цьому коефіцієнти першого інтеграла F визначаються через R за допомогою рівностей $\beta = R_{11}, \gamma = R_{22}$.

За допомогою підстановки $\beta = S/\lambda$, $\gamma = T/\lambda$ система (6) може бути зведена до вигляду

$$\begin{cases} S_2\lambda - S\lambda_2 = \lambda^2\lambda_1, \\ (S\lambda)_1 = \lambda\Phi_2, \\ (T\lambda)_2 = \lambda\Phi_1, \\ T_1\lambda - T\lambda_1 = \lambda^2\lambda_2. \end{cases}$$

Виключивши Φ з другого та третього рівнянь отриманої системи, запишемо її в такому вигляді:

$$\begin{cases} \lambda^2\lambda_1 + S\lambda_2 = S_2\lambda, \\ T\lambda_1 + \lambda^2\lambda_2 = T_1\lambda, \end{cases} \tag{7}$$

$$(S_1 + S\lambda_1/\lambda)_1 = (T_2 + T\lambda_2/\lambda)_2. \tag{8}$$

Співвідношення (7), (8) — звичайна нелінійна система диференціальних рівнянь із частинними похідними відносно функції λ, лінійна стосовно перших похідних від невідомої функції.

ВЛАСТИВОСТІ ГЛАДКИХ МЕТРИК НА S^2

При дослідженні системи (7), (8) одним із важливих моментів є питання про асимптотичну поведінку розв'язків у критичних точках. Позначимо через ω глобальну координату ($\omega \in \mathbb{C}$) розглядуваної гамільтонової системи на S^2 з метрикою $ds^2 = \tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega})d\omega d\bar{\omega}$. Елементарними міркуваннями (див. [2, 4]) легко показати, що $A(\omega)$ є поліномом не вище 8-го степеня.

Лема 1. *При $\omega \to \infty$ справедливі такі асимптотики:*

$$\tilde{\lambda}(\omega, \bar{\omega}) = \frac{a + o(1)}{\omega^2 \bar{\omega}^2}, \quad \tilde{\beta}(\omega, \bar{\omega}) = (b + o(1))\omega^4, \quad \tilde{\Phi}(\omega, \bar{\omega}) = c + o(1),$$

де a, b, c — деякі константи (можливо, нульові).

Доведення леми цілком аналогічне до доведення відповідного результату Колокольцова [4], одержаного для додаткових квадратичних за імпульсами перших інтегралів. Заміна змінної

$$z = \int_0^{\omega} (4\widetilde{A}(s))^{-1/4} ds \tag{9}$$

переводить глобальну координату ω в локальну координату $z \in K \subset \mathbb{C}$, якій відповідає поліном $A(z) = 1/4$. Образ K площини $\mathbb{C}$ при відображенні за допомогою інтеграла Крістоффеля–Шварца (9) називатимемо *носієм* системи рівнянь (7), (8).

Теорема 2. *Глобальний поліном $\widetilde{A}(\omega)$ з точністю до дробово-лінійного перетворення може мати лише один із наступних виглядів:*

1. $\widetilde{A}(\omega) = 1/4$,
2. $\widetilde{A}(\omega) = \omega^2/4$,
3. $\widetilde{A}(\omega) = \omega^3/4$,
4. $\widetilde{A}(\omega) = \omega^4/4$,
5. $\widetilde{A}(\omega) = (1 - \omega^2)^2/4$,
6. $\widetilde{A}(\omega) = (\omega - a_1)^2(\omega - a_2)^2(\omega - a_3)^2/4$,
7. $\widetilde{A}(\omega) = (\omega - a_1)^3(\omega - a_2)^2/4$.

Доведення теореми використовує однозначність оберненого перетворення $\omega(z) : K \to \mathbb{C}$, що пов'язане з однозначністю відображення, оберненого до (9), і практично повністю повторює міркування роботи [4], проведені для випадку додаткового першого інтеграла, квадратичного за імпульсами.

Усі перераховані в теоремі 2 випадки описують допустимі поліноми $P(\omega)$, для яких рівняння $(\omega'(z))^4 = P(\omega)$ має однозначний розв'язок (див. [3]).

Вкажемо відповідні носії для кожного із поліномів теореми 2:

1. $K = \mathbb{C}$;
2. K — верхня півплощина $\{\omega \in \mathbb{C} : 0 < \arg\omega < \pi\}$;
3. K — сектор $\{\omega \in \mathbb{C} : 0 < \arg\omega < \pi/2\}$;
4. K — смуга $\{\omega \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Im}\omega < 2\pi\}$;
5. K — смуга $\{\omega \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re}\omega < 1\}$;
6. K — половина паралелограма періодів функції Вейєрштраса $\wp(z + C, a, ib)$, один з періодів якої є дійсним, а інший — суто уявним;
7. K — прямокутний трикутник з кутами $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}$ (прообраз функції $\omega = b_1 + 256\wp^2\left(z + C, \frac{b_2 - b_1}{64}, 0\right)$ при відображенні на верхню півплощину), разом з його симетричним відбиттям відносно дійсної осі.

ПРОПОРЦІЙНИЙ ВИПАДОК

Розглянемо спочатку випадок, коли два диференціальні рівняння системи (7) є пропорційними, тобто

$$\begin{cases} \lambda^2\lambda_1 + S\lambda_2 = S_2\lambda, \\ \lambda^2/T = S/(\lambda^2) = S_2/T_1. \end{cases} \tag{10}$$

Враховуючи, що функція $\lambda(z, \bar{z})$ є дійснозначною, а функції $S(z, \bar{z})$ і $T(z, \bar{z})$ є комплексно-спряженими, введемо позначення $S = \lambda^2 t$, $T = \lambda^2/t$, де $|t| = 1$ ($\bar{t} = 1/t$). Тоді система рівнянь (7), (8) набуває вигляду

$$\begin{cases} \lambda_1 + t\lambda_2 = \lambda t_2 + 2t\lambda_2, \\ \lambda_1 t^{-1} + \lambda_2 = (2t^{-1}\lambda_1 - t^{-2}\lambda t_1), \\ (3\lambda\lambda_1 t + \lambda^2 t_1)_1 = (3\lambda\lambda_2 t^{-1} - \lambda^2 t_2 t^{-2})_2, \end{cases}$$

звідки легко знайти, що

$$\begin{cases} t_1 = tt_2, \quad \lambda_1 = (\lambda t)_2, \\ (3\lambda\lambda_1 t + \lambda^2 t_1)_1 = (3\lambda\lambda_2 t^{-1} - \lambda^2 t_2 t^{-2})_2. \end{cases} \tag{11}$$

Лема 2. *Єдиним розв'язком рівняння* $t_1 = tt_2$ *є* $t = -(\bar{z} - \bar{z}_0)/(z - z_0)$.

Доведення. Заміною змінних у рівнянні $t_1 = tt_2$, за якої z та t є новими незалежними змінними, а $\bar{z}$ — функцією, зведемо його до вигляду $\frac{\partial\bar{z}}{\partial z} = -t$, звідки $\bar{z} = -tz + \theta(t)$. Оскільки $|t| = 1$, то $t = \exp(2i\phi)$ для деякого $\phi \in \mathbb{R}$. Тоді будь-яка крива $\phi = const = c$ (лінія рівня функції $t = t(\bar{z}, z) = \exp(2ic)$) є прямою $\bar{z} = -tz + \theta(\exp(ic))$ з тангенсом кута нахилу, що дорівнює $\operatorname{ctg} c$. Тоді з вимоги однозначності визначення $t(z, \bar{z})$ випливає, що $\theta(t) = tz_0 - \bar{z}_0$.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що $z_0 = 0$, оскільки $A(z) = 1/4$ залишається незмінною при довільній лінійній заміні конфігураційної змінної z. Таким чином, $t = -\bar{z}/z$ і тому з другого рівняння системи (11) отримаємо

$$z\lambda_1 + \bar{z}\lambda_2 + \lambda = 0.$$

Запровадивши полярні координати $z = \varrho e^{i\varphi}$, одержимо $\lambda^2 = \varrho^{-2}g(\varphi)$ і тому третє рівняння системи (11) зводиться до вигляду

$$(3g'' - 60g)\sin(4\varphi) + 28g'\cos(4\varphi) = 0. \tag{12}$$

Легко показати, що рівняння (12) має дві сім'ї розв'язків вигляду

$$g(\varphi) = \sin^\alpha(4\varphi)Q(\sin^2(4\varphi)),$$

де $\alpha \in \{0, -4/3\}$ і $Q(s)$ — деякий ряд Маклорена, збіжний в крузі $|s| \leq 1$. Дійсно, шукаючи розв'язки рівняння (12) у вигляді

$$g(\varphi) = \sin^\alpha(4\varphi)\sum_{k=0}^{\infty} c_k \sin^{2k}(4\varphi),$$

легко отримати рекурентне співвідношення на коефіцієнти c_k степеневого ряду, до того ж абсолютно збіжного, оскільки відповідний мажоруючий числовий ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|$ збігається. Відповідна інтегровна ріманова метрика в $\mathbb{C}$ задається функцією

$$\lambda(z, \bar{z}) = \sqrt{\sin^\alpha(4\arg z)Q(\sin^2(4\arg z))/(z\bar{z})}. \tag{13}$$

Легко переконатися, що поведінка функції (13) на нескінченності суперечить твердженню леми 1, а тому відповідна інтегровна система не є геодезійним потоком деякої гладкої на S^2 метрики.

Зауважимо, що за умови $\alpha = 0$ відповідна функція λ відповідає метриці (1), що описує рух частинки по сфері під дією гладкого потенціала з особливістю типу полюса у двох протилежних вершинах сфери, інтегровного за допомогою додаткового інтеграла четвертого степеня, що не зводиться до інтегралів менших степенів. До того ж, такого роду винятковi інтегровні системи досі були відомими лише для випадку існування додаткового першого інтеграла третього степеня за імпульсами.

Вкажемо на ще одну суттєву властивість функції (13). Вона визначена в секторі $\{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$ і продовжується в $\mathbb{C}$ як $\frac{\pi}{2}$–періодична функція аргумента z. Тоді за допомогою рівності (13) можна побудувати ще дві інтегровні системи на сфері:

1. Розглянувши функцію (13) на носії $K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \pi\}$ для глобального полінома $\widetilde{A}(\omega) = \omega^2/4$, згідно з (9) одержимо $z = 2\sqrt{\omega}$, і тому відповідна метрика $ds^2 = \tilde{\lambda}(\omega,\bar{\omega})d\omega d\bar{\omega}$ задає інтегровну систему на сфері, до того ж в явному вигляді

$$\tilde{\lambda}(\omega,\bar{\omega}) = \lambda(z,\bar{z})\frac{dz}{d\omega}\frac{d\bar{z}}{d\bar{\omega}} = \lambda(2\sqrt{\omega}, 2\sqrt{\bar{\omega}})(\omega\bar{\omega})^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\sin^{\alpha}(2\arg\omega)Q(\sin^2(2\arg\omega))} \cdot (\omega\bar{\omega})^{-3/4}.$$

2. Розглянувши функцію (13) на носії $K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \arg z < \pi/2\}$ для глобального полінома $\widetilde{A}(\omega) = \omega^3/4$, згідно з (9) одержимо $z = 4\sqrt[4]{\omega}$, і для відповідної метрики $ds^2 = \tilde{\lambda}(\omega,\bar{\omega})d\omega d\bar{\omega}$ інтегровної системи на сфері матимемо

$$\tilde{\lambda}(\omega,\bar{\omega}) = \lambda(4\sqrt{\omega}, 4\sqrt{\bar{\omega}})(\omega\bar{\omega})^{-3/4} = \frac{1}{4}\sqrt{\sin^{\alpha}(\arg\omega)Q(\sin^2(\arg\omega))}\cdot(\omega\bar{\omega})^{-7/8}.$$

СИСТЕМИ, ПОВ'ЯЗАНІ З ЛАНЦЮЖКАМИ ТОДИ

Повернемося до системи диференціальних рівнянь (6) і перепишемо її у такому вигляді:

$$\begin{cases} \beta_2 = \lambda_1, \\ \beta_1\lambda + 2\beta\beta_2 = \Phi_2, \\ \gamma_2\lambda + 2\gamma\gamma_1 = \Phi_1, \\ \gamma_1 = \lambda_2. \end{cases}$$

Виключивши з другого та третого рівнянь системи функцію Φ, одержимо рівняння $(\beta_1\lambda + 2\beta\beta_2)_1 = (\gamma_2\lambda + 2\gamma\gamma_1)_2$, яке можна подати у вигляді $(\beta_1\lambda + 2\beta\beta_2)_1 \in \mathbb{R}$. З отриманого рівняння виразимо λ через β і γ:

$$\lambda = (3(\gamma_1\gamma_2 - \beta_1\beta_2) + 2(\gamma\gamma_{12} - \beta\beta_{12}))/(\beta_{11} - \gamma_{22}).$$

Варто окремо розглянути випадок, коли знаменник цього виразу дорівнює нулеві: $\beta_{11} - \gamma_{22} = 0$. Тоді з урахуванням рівнянь $\beta_2 = \lambda_1, \gamma_1 = \lambda_2$

одержимо, що $\lambda_{1111} = \lambda_{2222}$. Звідси випливає, що загальний розв'язок зображається рівністю

$$\lambda = f_1(\varepsilon z + \varepsilon^7 \bar{z}) + f_2(\varepsilon^2 z + \varepsilon^6 \bar{z}) + f_3(\varepsilon^3 z + \varepsilon^5 \bar{z}) + f_4(\varepsilon^4 z + \varepsilon^4 \bar{z}), \quad (14)$$

де f_1, f_2, f_3, f_4 — деякі дійсні функції дійсного аргумента, ε — первісний корінь восьмого степеня з одиниці ($\varepsilon = \exp(\pi i/4)$).

Легко виразити β і γ в термінах функцій f_1, f_2, f_3, f_4, зокрема,

$$\beta = \varepsilon^2 f_1 + \varepsilon^4 f_2 + \varepsilon^6 f_3 + f_4 + \psi(z). \quad (15)$$

Звідси, з огляду на рівність $\beta_{11} = \gamma_{22}$, отримуємо, що $\psi''(z) = const \in \mathbb{R}$, а тому ψ є поліномом другого степеня з дійсним старшим коефіцієнтом.

Легко переконатися (див. формулу (14)), що $\lambda(z, \bar{z})$ залишається незмінною при одночасному додаванні до f_1, f_2, f_3, f_4 одного й того ж многочлена другого степеня відповідного аргумента цих функцій. Тому, не обмежуючи загальності, можна вважати, що $\psi(z) = 0$. Тоді, підставляючи (14), (15) в (13), одержимо диференціально-функціональне рівняння

$$\begin{gathered} 2(\ddot{f}_4 f_1 + \ddot{f}_3 f_2 + \ddot{f}_2 f_3 + \ddot{f}_1 f_4 - \ddot{f}_1 f_2 - \ddot{f}_2 f_1 - \ddot{f}_3 f_4 - \ddot{f}_4 f_3) + \\ +3\sqrt{2}(\dot{f}_2 \dot{f}_3 - \dot{f}_1 \dot{f}_2 - \dot{f}_1 \dot{f}_4 - \dot{f}_3 \dot{f}_4) = 0. \end{gathered} \quad (16)$$

Повернувшись до дійсних конфігураційних змінних $x = \mathrm{Re} z, y = \mathrm{Im} z$, одержимо

$$\begin{aligned} \varepsilon z + \varepsilon^7 \bar{z} &= \sqrt{2}(x - y), \quad \varepsilon^2 z + \varepsilon^6 \bar{z} = iz - i\bar{z} = -2y, \\ \varepsilon^3 z + \varepsilon^5 \bar{z} &= \sqrt{2}(x + y), \quad \varepsilon^4 z + \varepsilon^4 \bar{z} = -z - \bar{z} = -2x. \end{aligned}$$

Після перепозначення

$$\begin{aligned} f_1(\sqrt{2}(x - y)) &= v_3(x - y), \quad f_2(-2y) = v_2(y), \\ f_3(\sqrt{2}(x + y)) &= v_4(x + y), \quad f_4(-2x) = v_1(x), \end{aligned}$$

рівняння (16) набуде вигляду

$$\begin{gathered} [v_4(x + y) - v_3(x - y)][v_2''(y) - v_1''(x)] + \\ +2[v_4''(x + y) - v_3''(x - y)][v_2(y) - v_1(x)] + \\ +3v_4'(x + y)[v_2'(y) - v_1'(x)] + 3v_3'(x - y)[v_2'(y) + v_1'(x)] = 0. \end{gathered}$$

Це рівняння свого часу виникло при дослідженні питань інтегровності натуральних систем з гамільтоніаном

$$\begin{gathered} \mathcal{H} = (p_1^2 + p_2^2)/2 + W(x, y), \\ W(x, y) = v_1(x) + v_2(y) + v_3(x - y) + v_4(x + y). \end{gathered}$$

Загальний розв'язок отриманого рівняння невідомий, однак відомий цілий ряд його частинних розв'язків, які наведені в [5]. Зокрема, значний інтерес викликає сім'я розв'язків

$$v_3(t) = v_4(t) = g^2 v(t), \quad v_1(t) = v_2(t) = g_1^2 v(t) + g_2^2 v(2t),$$
$$g_1[g_1^2 - 2g^2 + \sqrt{2} g_1 g_2] = 0,$$

де $v(t)$ — функція, яка має одне з наступних зображень:

1. $v(t) = t^{-2}$,
2. $v(t) = a^2[\mathrm{sh}(at)]^{-2}, \quad a = const$,
3. $v(t) = a^2[\sin(at)]^{-2}$,
4. $v(t) = a^2\wp(at)$, де $\wp(q)$ — функція Вейєрштраса,
5. $v(t) = t^{-2} + a^2t^2$.

Відповідно, для довільного $h > 0$ метрики $ds^2 = \lambda dz d\bar{z}$, де

$$\lambda = (h + W(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z)),$$

описують інтегровні системи на двовимірній сфері. Крім того, усі п'ять випадків описують інтегровні системи на носіях другого та третього типів, що відповідають глобальним поліномам теореми 2, а системи з потенціалами типів 4 та 5 описують інтегровні системи на усіх носіях типів 4–7, що відповідають глобальним поліномам теореми 2.

ВИСНОВКИ

Наведені анзаци дозволили навести цілу низку інтегровних метрик на сфері, до того ж інтегровні системи, що генеруються функцією (13) на трьох носіях, є принципово новимим. Визначальною рисою інтегровних метрик на S^2, пов'язаних з узагальненими ланцюжками Тоди, є їх однопараметричний характер, тобто можливість зобразити відповідну функцію $\lambda(z, \bar{z})$ у вигляді $\lambda(z, \bar{z}) = (h + V(z, \bar{z}))\mu(z, \bar{z})$, де $h \in \mathbb{R}$ — довільне дійсне число, до того ж додатковий перший інтеграл є поліномом (четвертого степеня) за h. Загальна ж постановка питання про повний опис розв'язків системи рівнянь (7), (8) залишається відкритою.

[1] *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Том 2. – Ижевск, 1999. – 448 с.

[2] *Вус А.Я.* Геодезійні потоки на сфері S^2 з додатковим кубічним за імпульсами першим інтегралом // Математичний вісник НТШ, 2005, т. 2. – с. 49–57.

[3] *Голубев В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.–Л., 1950. – 436 с.

[4] *Колокольцов В.Н.* Полиномиальные интегралы геодезических потоков на римановых многообразиях // Дисс. ... канд. физ.–мат. наук. – М., 1984.

[5] *Переломов А.М.* Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. – М.: Наука, 1990. – 238 с.

[6] *Bolsinov A.V., Matveev V.S., Fomenko A.T.* Two-dimensional Riemannian metrics with an integrable geodesic flow. Local and global geometries // Math. Sb. **189** (1998), № 9–10. – P. 1441–1466.

[7] *Borisov A.V., Mamaev I.S.* Generalization of the Goryachev–Chaplygin Case // Regular and Chaotic Dynamics, 2002, V. 7, № 1. – P. 21–30.

[8] *Selivanova E.N.* New Examples of Integrable Conservative Systems on S^2 and the Case of Goryachev–Chaplygin // Comm. Math. Phys., **207** (1999). – P. 641–663.

INTEGRABLE SYSTEMS ON THE SPHERE S^2 WITH ADDITIONAL INTEGRAL OF FOURTH DEGREE IN THE MOMENTA

Andriy VUS

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

The article is devoted to the problem of exact integrability of dynamical systems on the twodimensional sphere. The existence of additional first integrals of fourth degree in the momenta is considered and exact form of the corresponding Riemannian metric on the manifold is obtained.