ІСНУВАННЯ ГРАНИЧНИХ РОЗПОДІЛІВ ДЛЯ СІМ'Ї ФУНКЦІОНАЛІВ ВІД НАПІВМАРКОВСЬКИХ ПРОЦЕСІВ

©*2006 р. Ярослав ЄЛЕЙКО* [1], *Наталія БУГРІЙ* [2]

[1]Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000
[2]Національний університет „Львівська політехніка“,
вул. С.Бандери, 12, Львів 79013

Редакція отримала статтю 7 серпня 2006 р.

Розглянуто сім'ю напівмарківських процесів зі скінченним простором станів, для яких середній час перебування у кожному фіксованому стані прямує до нескінченності, а хвіст розподілу часу перебування в кожному стані є правильно змінною функцією на нескінченності з показником $-\alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$, таким, що $\alpha_k \to 1$ при $k \to \infty$. Досліджено існування граничних розподілів сім'ї функціоналів від такого процесу.

1. ВСТУП

Гранична поведінка інтегральних адитивних функціоналів від напівмарковських процесів без виконання умови скінченності середнього часу перебування в кожному фіксованому стані розглянута в [1,6,7]. Граничний розподіл такого функціонала існує і є невиродженим, якщо хвіст розподілу часу перебування в кожному фіксованому стані є правильно змінним з показником $-\alpha$ $(0 \le \alpha < 1)$. У випадку, коли хвіст розподілу часу перебування в стані є правильно змінною функцією на нескінченності з показником -1 і середнє цього часу є нескінченним, питання про існування граничного розподілу для інтегрального адитивного функціоналу остаточно не є дослідженим. У даній праці розглядаємо випадок, коли в якості показника вибрано таку послідовність $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, що $\alpha_k \to 1$ при $k \to \infty$.

УДК 519.21; MSC 2000: 60J25

2. ОСНОВНА ЧАСТИНА

Розглянемо сім'ю напівмарковських процесів $X^\alpha(t)$, що залежать від малого параметра $\alpha \in [0,1)$, зі скінченним числом станів $\{1,2,\dots,m\}$ та неперервним часом. Нехай $\eta^\alpha(t) = t-\tau^\alpha_{N(t)}$, де $\tau_1^\alpha, \tau_2^\alpha, \dots, \tau_k^\alpha, \dots$ — послідовні стрибки процесу $X^\alpha(t)$, $N(t) = \max\limits_{k\geq 1}\{\tau_k^\alpha \leq t\}$ — час, який проходить з моменту останньої зміни стану до моменту t (величина недоскоку). Позначимо

$$\tau_1^\alpha = \tau^\alpha = \inf\{t>0 \ : \ X^\alpha(0) \neq X^\alpha(t)\},$$

$$F_{ij}^\alpha(t) = \mathbb{P}\{\tau^\alpha \leq t, \ X^\alpha(\tau^\alpha) = j \mid X^\alpha(0) = i\},$$

$$F_i^\alpha(t) = \sum_{j=1}^m F_{ij}^\alpha(t) = \mathbb{P}\{\tau^\alpha \leq t \mid X^\alpha(0)=i\}, \quad i,j=\overline{1,m}.$$

Припустимо, що вкладений ланцюг Маркова напівмарковського процесу $X^\alpha(t)$ не залежить від параметра α. Матриця $P = ||p_{ij}||_{i,j=1}^m$, де $p_{ij} = \mathbb{P}\{X^\alpha(\tau^\alpha) = j \mid X^\alpha(0) = i\}$, вкладеного ланцюга Маркова є нерозкладною і, отже, для неї існує єдиний стаціонарний розподіл $p_1,\dots,p_m$. Вважатимемо, що середній час перебування напівмарковського процесу в кожному фіксованому стані є нескінченним. Запровадимо функціонал від цього процесу

$$\rho^\alpha(t) = \int\limits_0^t f(X^\alpha(u))du, \quad t \geq 0,$$

де f — додатна обмежена функція на $[0,\infty)$.

Теорема 1. *Нехай $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1)$ — така послідовність, що $\alpha_k \to 1$ при $k\to\infty$;*

$$1-F_i^{\alpha_k}(t) \sim a_i\frac{L(t)}{t^{\alpha_k}} \quad \text{при} \quad t\to\infty, \quad i=\overline{1,m}, \quad k\in\mathbb{N}, \tag{1}$$

де L — повільно змінна функція на нескінченності, a_i, $i=\overline{1,m}$, — деякі невід'ємні сталі, $\sum\limits_{i=1}^n a_ip_i > 0$. Тоді

1) існує власний розподіл G^0, для якого в кожній точці неперервності

$$G^0(x) = \lim_{k\to\infty}\lim_{t\to\infty}\mathbb{P}\Big\{\frac{\rho^{\alpha_k}(t)}{t} \leq x \mid X^{\alpha_k}(0) = i\Big\}, \quad i=\overline{1,m},$$

і

$$\int_0^\infty \frac{1}{\lambda + x}\, dG^0(x) = \frac{\sum\limits_{j=1}^m a_j p_j}{\sum\limits_{i=1}^m a_i p_i(\lambda + f(i))}, \quad \lambda > 0;$$

2) існує невласний розподіл G^w, зосереджений на $[0,\infty) \times (0,1)$, для якого в кожній точці неперервності

$$G^w(x) = \lim_{k\to\infty} \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\Big\{ \frac{\rho^{\alpha_k}(t)}{t} \le x,\ \frac{\eta^{\alpha_k}(t)}{t} \ge w \mid X^{\alpha_k}(0) = i \Big\},$$

де $w \in (0,1)$, $i = \overline{1,m}$.

Доведення. Нехай $k \in \mathbb{N}$. Позначимо

$$\varphi^{s,v}_{i,\alpha_k}(t) = M_i[e^{-s\rho^{\alpha_k}(t)}, \eta^{\alpha_k}(t) \ge v], \quad s \ge 0, \quad 0 < v \le t,$$

де M_i — умовне математичне сподівання при умові $X^{\alpha_k}(0) = i$, $i = \overline{1,m}$. Для $\varphi^{s,v}_{i,\alpha_k}(t)$ запишемо формулу повної ймовірності за моментом виходу з початкового стану:

$$\varphi^{s,v}_{i,\alpha_k}(t) = M_i[e^{-s\rho^{\alpha_k}(t)},\ \eta^{\alpha_k}(t) \ge v,\ \tau^{\alpha_k} > t] +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_0^t M_i[e^{-s(\rho^{\alpha_k}(t) \pm \rho^{\alpha_k}(u))},\ \eta^{\alpha_k}(t) \ge v,\ \tau^{\alpha_k} \in du,\ X^{\alpha_k}(\tau^{\alpha_k}) = j] =$$

$$= M_i[e^{-s\rho^{\alpha_k}(t)},\ t \ge v,\ \tau^{\alpha_k} > t] +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_0^t \mathbb{P}[\tau^{\alpha_k} \in du,\ X^{\alpha_k}(\tau^{\alpha_k}) = j \mid X^{\alpha_k}(0) = i] \times$$

$$\times M_i[e^{-s\rho^{\alpha_k}(u)} e^{-s(\rho^{\alpha_k}(t) - \rho^{\alpha_k}(u))},\ \eta^{\alpha_k}(t) \ge v \mid X^{\alpha_k}(\tau^{\alpha_k}) = j,\ \tau^{\alpha_k} = u] =$$

$$= M_i[e^{-s\rho^{\alpha_k}(t)},\ t \ge v,\ \tau^{\alpha_k} > t] +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_0^t F^{\alpha_k}_{ij}\{du\} e^{-sf(i)u} M_j[e^{-s\rho^{\alpha_k}(t-u)},\ \eta^{\alpha_k}(t-u) \ge v].$$

Отже, отримано рівняння марковського відновлення (див. [2, с. 38])

$$\varphi^{s,v}_{i,\alpha_k}(t) = M_i[e^{-s\rho^{\alpha_k}(t)},\ t \ge v,\ \tau^{\alpha_k} > t] +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\int_{0}^{t} F_{ij}^{\alpha_k}\{du\}e^{-sf(i)u}\varphi_j^{s,\alpha_k}(t-u), \quad i=\overline{1,m}, \quad t>0. \qquad (2)$$

Його розв'язок має вигляд [2, с. 40]

$$\varphi_{i,\alpha_k}^{s,v}(t)=\int_{0}^{t}\sum_{j=1}^{m}U_{ij}^{s,\alpha_k}\{dx\}M_j[e^{-s\rho^{\alpha_k}(t-x)},\ t-x\geq v,\ \tau^{\alpha_k}>t-x]=$$

$$=\int_{0}^{t-v}\sum_{j=1}^{m}U_{ij}^{s,\alpha_k}\{dx\}M_j[e^{-s\rho^{\alpha_k}(t-x)},\ \tau^{\alpha_k}>t-x], \quad i=\overline{1,m}, \quad t>0, \quad (3)$$

де $U_{ij}^{s,\alpha_k}\{[0,x]\}\overset{def}{=}U_{ij}^{s,\alpha_k}(x)$ — елементи матриці відновлення $U^{s,\alpha_k}(x)$, що відповідає рівнянню (2), тобто для $x>0$

$$U^{s,\alpha_k}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(F^{s,\alpha_k}(x))^{n*}, \quad F^{s,\alpha_k}(x)=\left|\left|\int_0^x e^{-sf(i)u}F_{ij}^{\alpha_k}\{du\}\right|\right|_{i,j=1}^{m}.$$

Знайдемо

$$M_j[e^{-s\rho^{\alpha_k}(t)},\ \tau^{\alpha_k}>t]=e^{-sf(j)t}M_j[\tau^{\alpha_k}>t]=e^{-sf(j)t}[1-F_j^{\alpha_k}(t)], j=\overline{1,m}.$$

Зафіксуємо $s>0$ та $w\in(0,1)$. Замінимо в рівності (3) s на s/t, v на tw, після чого подамо праву частину отриманої рівності у вигляді

$$\int_{0}^{1-w}\sum_{j=1}^{m}U_{ij}^{\frac{s}{t},\alpha_k}\{tdy\}e^{-sf(j)(1-y)}[1-F_j^{\alpha_k}(t(1-y))], \quad i=\overline{1,m}, \quad t>0. \quad (4)$$

Будемо досліджувати при $t\to\infty$ асимптотику матричної міри

$$U^{\frac{s}{t},\alpha_k}(ty)=||U_{ij}^{\frac{s}{t},\alpha_k}(ty)||_{i,j=1}^{m}.$$

Розглянемо матрицю $\Phi_s^{\alpha_k}(\lambda)=||\varphi_{ij}^{\alpha_k}(s,\lambda)||_{i,j=1}^{m}$, де

$$\varphi_{ij}^{\alpha_k}(s,\lambda)=\int_{0}^{\infty}F_{ij}^{\alpha_k}\{du\}e^{-\lambda u}e^{-sf(i)u}=M_i[e^{-(\lambda+sf(i))\tau^{\alpha_k}},\ X^{\alpha_k}(\tau^{\alpha_k})=j],$$

$\lambda\geq 0$, $\lambda+sf(i)\neq 0$. Перетворення Лапласа для $U^{s,\alpha_k}(y)$ дорівнює

$$\int_{0}^{\infty}e^{-\lambda y}U^{s,\alpha_k}\{dy\}=[E-\Phi_s^{\alpha_k}(\lambda)]^{-1},$$

де E — одинична матриця. Як і в [7], отримуємо, що при $t \to +\infty$

$$c_t^{\alpha_k} \cdot [E - \Phi_{\frac{s}{t}}^{\alpha_k}\Big(\frac{\lambda}{t}\Big)]^{-1} \to ||1 \cdot p_j||_{i,j=1}^m,$$

де $c_t^{\alpha_k} = 1 - \Big(p, \Phi_{s/t}^{\alpha_k}\Big(\frac{\lambda}{t}\Big) \cdot \mathbf{1}\Big)$, $p = \mathrm{colon}(p_1, \ldots, p_m)$, $\mathbf{1} = \mathrm{colon}(1, \ldots, 1)$. Використовуючи співвідношення (1) та тауберову теорему [4, с. 513], при $t \to \infty$ дістаємо

$$1 - M_i[e^{-(\frac{\lambda}{t} + \frac{s}{t} f(i))\tau^{\alpha_k}}] \sim t^{-\alpha_k} L(t) \Gamma(1 - \alpha_k)(\lambda + s f(i))^{\alpha_k} a_i, \quad i = \overline{1, m}.$$

Знайдемо асимптотику $c_t^{\alpha_k}$ при $t \to \infty$:

$$c_t^{\alpha_k} = 1 - \sum_{i,j=1}^m p_i M_i[e^{-(\frac{\lambda}{t} + \frac{s}{t} f(i))\tau^{\alpha_k}}, \ X^{\alpha_k}(\tau^{\alpha_k}) = j] =$$

$$= \sum_{i=1}^m p_i (1 - M_i[e^{-(\frac{\lambda}{t} + \frac{s}{t} f(i))\tau^{\alpha_k}}]) \sim$$

$$\sim t^{-\alpha_k} L(t) \Gamma(1 - \alpha_k) \sum_{i=1}^m a_i p_i (\lambda + s f(i))^{\alpha_k}.$$

Тоді при $t \to \infty$ одержимо

$$t^{-\alpha_k} L(t) \Gamma(1 - \alpha_k) \int_0^\infty e^{-\lambda y} U^{\frac{s}{t}, \alpha_k}\{t dy\} \to \frac{||1 \cdot p_j||_{i,j=1}^m}{\sum\limits_{i=1}^m a_i p_i (\lambda + s f(i))^{\alpha_k}}.$$

Згідно з узагальненою теоремою неперервності [4, с. 499]

$$t^{-\alpha_k} L(t) \Gamma(1 - \alpha_k) U_{ij}^{\frac{s}{t}, \alpha_k}\{t dy\} \to p_j \mu_{s, \alpha_k}\{dy\}, \quad i, j = \overline{1, m}, \tag{5}$$

слабко при $t \to \infty$, де

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y} \mu_{s, \alpha_k}\{dy\} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^m a_i p_i (\lambda + s f(i))^{\alpha_k}}, \quad \lambda \geq 0, \quad s > 0, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

З (4) випливає, що

$$\lim_{t \to \infty} \varphi_{i, \alpha_k}^{\frac{s}{t}, w}(t) = \lim_{t \to \infty} \sum_{j=1}^m \int_0^{1-w} e^{-s f(j)(1-y)} [1 - F_j^{\alpha_k}(t(1-y))] U_{ij}^{\frac{s}{t}, \alpha_k}\{t dy\} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} \sum_{j=1}^{m} \int_{0}^{1-w} \frac{e^{-sf(j)(1-y)}[1 - F_j^{\alpha_k}(t(1-y))]}{t^{-\alpha_k} L(t)\Gamma(1-\alpha_k)} \times$$
$$\times\, t^{-\alpha_k} L(t)\Gamma(1-\alpha_k) U_{ij}^{\frac{s}{t},\alpha_k}\{tdy\}, \quad i = \overline{1,m}. \tag{7}$$

Для будь-яких $y \in [0, 1-w]$, $w \in (0,1)$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-sf(j)(1-y)}[1 - F_j^{\alpha_k}(t(1-y))]}{t^{-\alpha_k} L(t)\Gamma(1-\alpha_k)} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-sf(j)(1-y)} L(t(1-y)) a_j}{(1-y)^{\alpha_k} L(t)\Gamma(1-\alpha_k)} =$$
$$= \frac{a_j e^{-sf(j)(1-y)}}{(1-y)^{\alpha_k}\Gamma(1-\alpha_k)}, \quad j = \overline{1,m}.$$

Згідно з [3, с. 10], дана збіжність є рівномірною за $y \in [0, 1-w]$.

З формули (5) отримуємо, що для будь-якої обмеженої неперервної на $[0,\infty)$ функції g виконується рівність

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha_k} L(t)\Gamma(1-\alpha_k) \int_{0}^{\infty} g(y) U_{ij}^{\frac{s}{t},\alpha_k}\{tdy\} = p_j \int_{0}^{\infty} g(y)\mu_{s,\alpha_k}\{dy\}. \tag{8}$$

У рівності (6) покладемо $\lambda = 0$:

$$\mu_{s,\alpha_k}\{[0,\infty)\} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} a_i p_i (sf(i))^{\alpha_k}}, \quad s > 0.$$

Нехай $g \equiv 1$. Тоді з рівності (8) отримуємо

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha_k} L(t)\Gamma(1-\alpha_k) U_{ij}^{\frac{s}{t},\alpha_k}\{[0,\infty)\} = p_j \mu_{s,\alpha_k}\{[0,\infty)\}, \quad i,j = \overline{1,m}.$$

Отже,

$$\sup_{t>0} t^{-\alpha_k} L(t)\Gamma(1-\alpha_k) U_{ij}^{\frac{s}{t},\alpha_k}\{[0,\infty)\} < +\infty, \quad i,j = \overline{1,m}.$$

Границя (7) існує (див. [6, с. 312]) одночасно з границею

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{j=1}^{m} a_j t^{-\alpha_k} L(t) \int_{0}^{1-w} \frac{e^{-sf(j)(1-y)}}{(1-y)^{\alpha_k}} U_{ij}^{\frac{s}{t},\alpha_k}\{tdy\}, \quad i = \overline{1,m}.$$

Покладаючи у рівності (8) $g(y) = I_{[0,1-w]}(y) \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{a_j}{\Gamma(1-\alpha_k)} \frac{e^{-sf(j)(1-y)}}{(1-y)^{\alpha_k}}$, знаходимо, що попередня границя дорівнює

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{a_j p_j}{\Gamma(1-\alpha_k)} \int\limits_0^{1-w} \frac{e^{-sf(j)(1-y)}}{(1-y)^{\alpha_k}} \mu_{s,\alpha_k}\{dy\}.$$

Тому

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{\infty} e^{-sy}\, \mathbb{P}\Big\{\frac{\rho^{\alpha_k}(t)}{t} \in dy,\ \frac{\eta^{\alpha_k}(t)}{t} \geq w \mid X^{\alpha_k}(0) = i\Big\} =$$

$$= \lim_{t\to\infty} M_i\Big\{e^{-s\frac{\rho^{\alpha_k}(t)}{t}},\ \frac{\eta^{\alpha_k}(t)}{t} \geq w\Big\} = \lim_{t\to\infty} \varphi_{i,\alpha_k}^{\frac{s}{t},w}(t) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j p_j}{\Gamma(1-\alpha_k)} \int\limits_0^{1-w} \frac{e^{-sf(j)(1-y)}}{(1-y)^{\alpha_k}} \mu_{s,\alpha_k}\{dy\}, \quad s > 0, \tag{9}$$

$w \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$. За теоремою неперервності [4, с. 496] сума в правій частині (9) є перетворенням Лапласа розподілу $G^{\alpha_k,w}$, тобто

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-sy} dG^{\alpha_k,w}(y) = \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j p_j}{\Gamma(1-\alpha_k)} \times$$

$$\times \int\limits_0^{1-w} \frac{e^{-sf(j)(1-y)}}{(1-y)^{\alpha_k}} \mu_{s,\alpha_k}\{dy\} \equiv \Phi_k(s,w),\ s > 0,\ w \in (0,1),\ k \in \mathbb{N}, \tag{10}$$

(нижче у зауваженні 1 показано, що вираз справа є скінченним) і в кожній точці неперервності $G^{\alpha_k,w}$

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\Big[\frac{\rho^{\alpha_k}(t)}{t} \leq y,\ \frac{\eta^{\alpha_k}(t)}{t} \geq w \mid X^{\alpha_k}(0) = i\Big] = G^{\alpha_k,w}(y), \quad i = \overline{1,m}.$$

Зауважимо, що (10) виконується і для $s = 0$, $w = 0$ (див. [6, с. 314]).

Розглянемо послідовність $\{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0,1)$ таку, що $\alpha_k \to 1$ при $k \to \infty$. Тоді за теоремою Хеллі [4, с. 326] для довільного $w \in [0,1)$ послідовність розподілів $\{G^{\alpha_k,w}\}_{k\in\mathbb{N}}$ містить підпослідовність $\{G^{\alpha_{k_l},w}\}_{l\in\mathbb{N}}$, яка збігається до деякої границі G^w (у власному або невласному розумінні), тобто в кожній точці неперервності G^w

$$G^w(y) = \lim_{l\to\infty} G^{\alpha_{k_l},w}(y). \tag{11}$$

Це рівносильно [5, с. 334] тому, що

$$\lim_{l\to\infty}\int\limits_0^\infty g(y)dG^{\alpha_{k_l},w}(y)=\int\limits_0^\infty g(y)dG^w(y),\quad l\in\mathbb{N},\tag{12}$$

де функція g є такою ж, як у (8).

Згідно з формулою (6), $s^{\alpha_k}\mu_{s,\alpha_k}\{\frac{1}{s}dy\}=\mu_{1,\alpha_k}\{dy\}$, $k\in\mathbb{N}$. Після лінійної заміни змінних $y'=sy$ запишемо праву частину рівності (10) у вигляді

$$\sum_{j=1}^m\frac{a_jp_j}{\Gamma(1-\alpha_k)}\int\limits_0^{s(1-w)}\frac{e^{-f(j)(s-y')}}{(s-y')^{\alpha_k}}\mu_{1,\alpha_k}\{dy'\},\quad k\in\mathbb{N}.\tag{13}$$

Домножимо (10) на $e^{-\lambda s}$ і проінтегруємо за s від 0 до ∞:

$$\int\limits_0^\infty ds\int\limits_0^\infty e^{-s(\lambda+y)}dG^{\alpha_k,w}(y)=$$

$$=\sum_{j=1}^m\frac{a_jp_j}{\Gamma(1-\alpha_k)}\int\limits_0^\infty ds\int\limits_0^{s(1-w)}\frac{e^{-\lambda s}e^{-f(j)(s-y')}}{(s-y')^{\alpha_k}}\mu_{1,\alpha_k}\{dy'\},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Змінимо порядок інтегрування

$$\int\limits_0^\infty dG^{\alpha_k,w}(y)\int\limits_0^\infty e^{-s(\lambda+y)}ds=$$

$$=\sum_{j=1}^m\frac{a_jp_j}{\Gamma(1-\alpha_k)}\int\limits_0^\infty\mu_{1,\alpha_k}\{dy'\}\int\limits_{y'/(1-w)}^\infty\frac{e^{-\lambda s}e^{-f(j)(s-y')}}{(s-y')^{\alpha_k}}ds,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Виконуючи заміну $s'=[\lambda+f(j)](s-y')$, отримаємо

$$\int\limits_0^\infty\frac{1}{\lambda+y}\,dG^{\alpha_k,w}(y)=\sum_{j=1}^m\frac{a_jp_j}{\Gamma(1-\alpha_k)}\int\limits_0^\infty e^{-\lambda y'}\mu_{1,\alpha_k}\{dy'\}\times$$

$$\times\int\limits_{y'w\frac{\lambda+f(j)}{1-w}}^\infty\frac{e^{-s'}[\lambda+f(j)]^{\alpha_k-1}}{(s')^{\alpha_k}}ds',\quad k\in\mathbb{N}.\tag{14}$$

Розглянемо два випадки.

1) Нехай $w = 0$. Тоді згідно з (11), в кожній точці неперервності G^0 $G^0(y) = \lim_{l\to\infty} G^{\alpha_{k_l},0}(y)$, де $\{\alpha_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. Оскільки $\int_0^\infty \frac{e^{-s'}}{(s')^{\alpha_k}}\, ds' = \Gamma(1-\alpha_k)$, то формула (14) для підпослідовності при $w = 0$ матиме вигляд

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda+y}\, dG^{\alpha_{k_l},0}(y) = \sum_{j=1}^m a_j p_j [\lambda + f(j)]^{\alpha_{k_l}-1} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda y'} \mu_{1,\alpha_{k_l}}\{dy'\}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Згідно з (6), в кожній точці неперервності $G^{\alpha_{k_l},0}$ отриманий вираз співпадає з

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda+y}\, dG^{\alpha_{k_l},0}(y) = \frac{\sum\limits_{j=1}^m a_j p_j [\lambda + f(j)]^{\alpha_{k_l}-1}}{\sum\limits_{i=1}^m a_i p_i [\lambda + f(i)]^{\alpha_{k_l}}}, \quad \lambda > 0, \quad l \in \mathbb{N},$$

де $G^{\alpha_{k_l},0}(y) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\{\frac{\rho^{\alpha_{k_l}}(t)}{t} \le y \mid X^{\alpha_{k_l}}(0) = i\}$, $i = \overline{1,m}$. У (12) покладемо $g(y) = \frac{1}{\lambda+y}$, $y \ge 0$, $\lambda > 0$. Тоді дістанемо

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda+y} dG^0(y) = \lim_{l\to\infty} \int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda+y} dG^{\alpha_{k_l},0}(y) =$$
$$= \lim_{l\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^m a_j p_j [\lambda + f(j)]^{\alpha_{k_l}-1}}{\sum\limits_{i=1}^m a_i p_i [\lambda + f(i)]^{\alpha_{k_l}}} = \frac{\sum\limits_{j=1}^m a_j p_j}{\sum\limits_{i=1}^m a_i p_i [\lambda + f(i)]}.$$

Нехай тепер $g(y) = e^{-sy}$, $s > 0$, $y \ge 0$. Згідно з (12)

$$\int\limits_0^\infty e^{-sy} dG^0(y) = \lim_{l\to\infty} \int\limits_0^\infty e^{-sy} dG^{\alpha_{k_l},0}(y) = \lim_{l\to\infty} \Phi_{k_l}(s,0). \tag{15}$$

Оскільки (див. [6, с. 314]) $\lim\limits_{\substack{w\to 0\\ s\to 0}} \Phi_{k_l}(s,w) = 1$, $l \in \mathbb{N}$, то, покладаючи у (15) $s = 0$, отримаємо, що $G^0\{[0,\infty)\} = 1$, тобто розподіл G^0 є власним.

Якою б не була інша підпослідовність $\{\alpha_{k_q}\}_{q\in\mathbb{N}} \subset \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, існуватиме власний розподіл G^1, для якого $\lim_{q\to\infty} G^{\alpha_{k_q},0}(y) = G^1(y)$ в кожній точці неперервності G^1 і

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda+y} dG^0(y) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda+y} dG^1(y).$$

Отже, за теоремою 1 [4, с. 496], $G^0 \equiv G^1$. Тому за теоремою 1 [4, с. 326] отримуємо, що в кожній точці неперервності G^0 $G^0(y) = \lim\limits_{k\to\infty} G^{\alpha_k,0}(y)$. Таким чином, встановлено існування власного розподілу G^0, для якого в кожній точці неперервності

$$G^0(y) = \lim_{k\to\infty}\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}\Big\{\frac{\rho^{\alpha_k}(t)}{t} \le y \,\Big|\, X^{\alpha_k}(0) = i\Big\}, \quad i = \overline{1,m}.$$

2) Нехай $w \in (0,1)$. Тоді за (11) $G^w(y) = \lim\limits_{l\to\infty} G^{\alpha_{k_l},w}(y)$ в кожній точці неперервності G^w, де $\{\alpha_{k_l}\}_{l\in\mathbb{N}} \subset \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$. З формул (10), (12) отримуємо

$$\int_0^\infty e^{-sy}\, dG^w(y) = \lim_{l\to\infty}\int_0^\infty e^{-sy}\, dG^{\alpha_{k_l},w}(y) =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\sum_{j=1}^m \frac{a_j p_j}{\Gamma(1-\alpha_{k_l})}\int_0^{1-w} \frac{e^{-sf(j)(1-y)}}{(1-y)^{\alpha_{k_l}}}\mu_{s,\alpha_{k_l}}\{dy\},\ w\in[0,1),\ s\ge 0, \quad (16)$$

де

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y}\mu_{s,\alpha_{k_l}}\{dy\} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^m a_i p_i[\lambda + sf(i)]^{\alpha_{k_l}}}, \quad \lambda > 0, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Нехай $s = 0$. Тоді

$$\int_0^\infty e^{-\lambda y}\mu_{0,\alpha_{k_l}}\{dy\} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^m a_i p_i \lambda^{\alpha_{k_l}}}, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Звідси

$$\mu_{0,\alpha_{k_l}}\{dy\} = \frac{y^{\alpha_{k_l}-1}}{\sum\limits_{i=1}^m a_i p_i \Gamma(\alpha_{k_l})}\,dy, \quad l \in \mathbb{N}.$$

З рівності (16) знайдемо, що

$$\int_0^\infty dG^w(y) = \lim_{l\to\infty}\int_0^\infty dG^{\alpha_{k_l},w}(y) = \lim_{l\to\infty}\sum_{j=1}^m \frac{a_j p_j}{\Gamma(1-\alpha_{k_l})}\int_0^{1-w}\frac{\mu_{0,\alpha_{k_l}}\{dy\}}{(1-y)^{\alpha_{k_l}}} =$$

$$= \lim_{l\to\infty}\frac{1}{\Gamma(1-\alpha_{k_l})\Gamma(\alpha_{k_l})}\int_0^{1-w}\frac{y^{\alpha_{k_l}-1}}{(1-y)^{\alpha_{k_l}}}\,dy =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \frac{\sin \pi\alpha_{k_l}}{\pi} \Big(\int\limits_0^{1-w} \frac{dy}{(1-y)^{\alpha_{k_l}}} + \int\limits_0^{1-w} \frac{y^{\alpha_{k_l}-1}-1}{(1-y)^{\alpha_{k_l}}}\, dy \Big), \quad w \in (0,1). \qquad (17)$$

Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^{1-w} \frac{y^{\alpha_{k_l}-1}-1}{(1-y)^{\alpha_{k_l}}}\, dy, \quad w \in (0,1), \quad l \in \mathbb{N}.$$

Для будь-яких $y \in (0, 1-w]$ і великих $l \in \mathbb{N}$ оцінимо

$$\frac{y^{\alpha_{k_l}-1}-1}{(1-y)^{\alpha_{k_l}}} = \frac{1-y^{1-\alpha_{k_l}}}{y^{1-\alpha_{k_l}}(1-y)^{\alpha_{k_l}}} < \frac{1}{y^{1-\alpha_{k_l}} w^{\alpha_{k_l}}} < \frac{1}{\sqrt{y}\, w}.$$

Оскільки $\frac{1}{y^{1/2}}$ інтегровна на $(0, 1-w]$ і

$$\lim_{l\to\infty} \frac{1-y^{1-\alpha_{k_l}}}{y^{1-\alpha_{k_l}}(1-y)^{\alpha_{k_l}}} = 0 \quad (0 < y \le 1-w),$$

то за теоремою Лебега про перехід до границі під знаком інтеграла

$$\lim_{l\to\infty} \int\limits_0^{1-w} \frac{y^{\alpha_{k_l}-1}-1}{(1-y)^{\alpha_{k_l}}}\, dy = \int\limits_0^{1-w} \lim_{l\to\infty} \frac{y^{\alpha_{k_l}-1}-1}{(1-y)^{\alpha_{k_l}}}\, dy = 0.$$

Таким чином,

$$G^w\{[0,+\infty)\} = \lim_{l\to\infty} \frac{\sin \pi\alpha_{k_l}}{\pi} \int\limits_0^{1-w} \frac{dy}{(1-y)^{\alpha_{k_l}}} =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \frac{\sin \pi\alpha_{k_l}}{\pi} \Big(-\frac{(1-y)^{1-\alpha_{k_l}}}{1-\alpha_{k_l}} \Big)\Big|_0^{1-w} = \lim_{l\to\infty} \frac{\sin \pi\alpha_{k_l}}{\pi} \, \frac{1-w^{1-\alpha_{k_l}}}{1-\alpha_{k_l}}.$$

Використовуючи правило Лопіталя, для $w \in (0,1)$ отримаємо рівність

$$G^w\{[0,+\infty)\} = \lim_{l\to\infty} \frac{\pi \cos \pi\alpha_{k_l}(1-w^{1-\alpha_{k_l}}) + \sin \pi\alpha_{k_l}\, w^{1-\alpha_{k_l}} \ln w}{-\pi} = 0.$$

Як і в попередньому випадку, якою б не була інша підпослідовність $\{\alpha_{k_q}\}_{q\in\mathbb{N}} \subset \{\alpha_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, в кожній точці неперервності $G^{1,w}$ існуватиме границя $\lim\limits_{q\to\infty} G^{\alpha_{k_q},w}(y) = G^{1,w}(y)$, $w \in (0,1)$, і $\int_0^\infty dG^w(y) = \int_0^\infty dG^{1,w}(y)$. Тому $G^w \equiv G^{1,w}$. Отже, за теоремою 1 [4, с. 326], для довільного $w \in (0,1)$ $G^{\alpha_k,w} \to G^w$ при $k \to \infty$ у невласному значенні. Теорему доведено.

Зауваження 1. Вираз справа у формулі (10) є скінченним. Нехай $f \equiv 1$. Тоді $\frac{\rho^{\alpha_k}(t)}{t} \equiv 1$, $t > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Отже, за формулою (10) обчислимо

$$\int\limits_0^\infty e^{-sy} dG^{\alpha_k,w}(y) = \sum_{j=1}^m \frac{a_j p_j}{\Gamma(1-\alpha_k)} \int\limits_0^{1-w} \frac{e^{-s(1-y)}}{(1-y)^{\alpha_k}} \mu_{s,\alpha_k}\{dy\}, \quad w \in (0,1),$$

де

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda y} \mu_{s,\alpha_k}\{dy\} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^m a_i p_i (\lambda + s)^{\alpha_k}}, \quad k \in \mathbb{N}, \quad s > 0, \quad \lambda \geq 0.$$

Звідси отримуємо

$$\mu_{s,\alpha_k}\{dy\} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^m a_i p_i} \cdot \frac{e^{-sy} y^{\alpha_k - 1}}{\Gamma(\alpha_k)} dy, \quad k \in \mathbb{N}, \quad s > 0.$$

Таким чином,

$$\int\limits_0^\infty e^{-sy} dG^{\alpha_k,w}(y) = \frac{\sum\limits_{j=1}^m a_j p_j}{\sum\limits_{i=1}^m a_i p_i} \cdot \frac{e^{-s}}{\Gamma(1-\alpha_k)\Gamma(\alpha_k)} \int\limits_0^{1-w} \frac{y^{\alpha_k - 1}}{(1-y)^{\alpha_k}} dy.$$

Отже, для всіх $w \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{s \to 0} \int\limits_0^\infty e^{-sy} dG^{\alpha_k,w}(y) = \frac{\sin \pi\alpha_k}{\pi} \int\limits_0^{1-w} y^{\alpha_k - 1}(1-y)^{-\alpha_k} dy.$$

3. ВИСНОВКИ

У даній роботі встановлено існування власного граничного розподілу сім'ї функціоналів від напівмарковського процесу і пораховано друге перетворення Лапласа цього розподілу. Досліджено, що граничний сумісний розподіл для сім'ї функціоналів від напівмарковського процесу і сім'ї недоскоків є невласним.

[1] *Джнейд М.О., Ружевич Н.А., Шуренков В.М.* Потенциалы эргодических цепей, полумарковские процессы и суммы неотрицательных величин // Теория вероятн. и её применения, 1988. – **33**, №3, С. 545–559.

[2] *Королюк В.С., Турбин А.Ф.* Полумарковские процессы и их приложения. – К.: Наук. думка, 1976.

[3] *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. – М.: Наука, 1985.

[4] *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967.

[5] *Ширяев А.Н.* Вероятность. М.: Наука, 1980.

[6] *Шуренков В.М.* Эргодические процессы Маркова. – М.: Наука, 1998.

[7] *Шуренков В.М., Елейко Я.И.* Предельные распределения временных средних для полумарковских процессов // Укр. мат. журн., 1979. – **31**, №5, С. 132–138.

EXISTENCE OF LIMIT DISTRIBUTION FOR A FAMILY OF FUNCTIONALS OF SEMI-MARKOV PROCESSES

Yaroslav YELEIKO [1], *Nataliya BUHRII* [2]

[1]Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine
[2]Lviv Polytechnic National University,
12 S.Bandery Str., Lviv 79013, Ukraine

A family of semi-Markov processes with finite space without finiteness conditions of a mean stay time of these processes in every fixed state is is considered. Existence of limit distributions for the family of functionals of such processes is investigating on condition that distribution tail of the stay time of the semi-Markov processes in every fixed state is regularly varying function at infinity with exponent $-\alpha_k$, $k \in \mathbb{N}$ ($\alpha_k \to 1$ as $k \to \infty$).