РЕГУЛЯРНЕ ЗРОСТАННЯ ДОБУТКУ БЛЯШКЕ З КУТОВОЮ ЩІЛЬНІСТЮ НУЛІВ

©2006 р. Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 21 вересня 2006 р.

Знайдено асимптотику добутку Бляшке за умови існування кутової щільності його нулів відносно повільно зростаючої в точці 1 функції.

Нехай $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ — послідовність таких ненульових комплексних чисел, що $|a_1| \le |a_2| \le \ldots \le |a_n| \le \ldots < 1$, $\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|) < +\infty$. Тоді функцію вигляду

$$B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{a}_n}{|a_n|} \frac{a_n - z}{1 - \bar{a}_n z},$$

яка є аналітичною в одиничному крузі $D = \{z : |z| < 1\}$, називають добутком Бляшке. Добутки Бляшке є важливим підкласом аналітичних в одиничному крузі функцій з обмеженою неванліннівською характеристикою.

За умови, що нулі $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ добутку Бляшке мають єдину точку скупчення на колі $\{z : |z| = 1\}$, у даній роботі досліджуватимемо його асимптотичні властивості в околі цієї ж межової точки. Не обмежуючи загальності міркувань, можна вважати, що такою точкою скупчення є точка $z = 1$, бо інакше замість добутку $B(z)$ можна розглянути добуток $B_1(z) = B(ze^{-i\varphi_0})$, де $e^{i\varphi_0}$ — точка скупчення нулів $B(z)$.

Наслідуючи відомий метод дослідження асимптотичних властивостей цілих функцій ([5, розд. 2]), у цій статті встановлено точні асимптотичні формули для $B(z)$ за доволі загальних припущеннях про щільність розподілу нулів $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.

УДК 517.53; MSC 2000: 30E99

Відзначимо, що функцію $\operatorname{Ln} B(z)$ будемо розглядати в одиничному крузі D, розрізаному вздовж відрізків, що з'єднують всі нулі функції $B(z)$ з точкою $z = 1$. Таку область надалі позначатимемо через D^*.

Отже, нехай $a_k = 1 - r_k e^{-i\psi_k}$, $k \geq 1$, — нулі добутку Бляшке $B(z)$, де $0 < r_{k+1} \leq r_k < 2\cos\psi_k$, причому $\sum_{k=1}^{\infty}(1 - |a_k|) < +\infty$ та існує $\eta > 0$ таке, що $|\psi_k| < \pi/2 - \eta$. Позначимо через $n_1(t, \psi)$ кількість тих нулів a_k добутку Бляшке, для яких $t \leq r_k < 2\cos\psi_k$, $-\pi/2 + \eta < \psi_k \leq \psi$.

Означення 1. *Якщо для всіх значень ψ, $|\psi| < \pi/2 - \eta$ (крім, можливо, зліченної множини) існує границя $\Delta(\psi) = \lim_{t\to 0} n_1(t, \psi)/w(1 - t)$, де $w(t)$ — додатна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0, 1)$ функція, то кажуть, що нулі $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ добутку Бляшке мають кутову щільність відносно функції $w(t)$.*

Означення 2. *Промінь $\arg(1 - z) = \theta$, $|\theta| < \pi/2 - \eta$, називають звичайним для добутку Бляшке відносно функції $w(t)$ (або просто звичайним), якщо*

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{n_1(t, \theta + \varepsilon) - n_1(t, \theta - \varepsilon)}{w(1 - t)} = 0.$$

Означення 3. *Множину $C \subset \mathbb{R}^2$ будемо називати C^0-множиною в точці 1, якщо її можна покрити системою кругів $\{z : |z - c_k| < r_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, такою, що*

$$\sum_{|1-c_k|<1-r} r_k = o(1 - r), \quad r \to 1.$$

Зауважимо, що C^0-множина в точці ∞, тобто множина $C \subset \mathbb{R}^2$, яку можна покрити такою системою кругів $\{z : |z - c_k| < r_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, що

$$\sum_{|c_k|<r} r_k = o(r), \quad r \to +\infty,$$

при відображенні $w = \frac{z-1}{z+1}$ переходить в C^0-множину в точці 1 (див. [3, лема 2]).

У [3] розглянуто канонічні добутки Нафталевича–Држбашяна–Цудзі роду p, $p \geq 0$, $p = [\rho]$, $\rho > 0$, тобто аналітичні в $\{z : |z| < 1\}$ функції вигляду

$$\pi_p(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1 - |a_k|^2}{1 - z\bar{a}_k}\right) \exp\left\{\sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n} \left(\frac{1 - |a_k|^2}{1 - z\bar{a}_k}\right)^n\right\},$$

лічильна функція нулів яких має кутову щільність відносно функції $w(t) = (1-t)^{-\rho}$. Для $p = 0$ канонічні добутки Нафталевича–Джрбашяна–Цудзі відрізняються від добутків Бляшке на сталий множник $\prod_{k=1}^{\infty} |a_k|$. Тому з результатів статті [1] випливає, що якщо нулі $B(z)$ мають єдину точку скупчення $z = 1$ і кутову щільність щодо функції $w(t) = (1-t)^{-\rho}$, $0 < \rho < 1$, то для всіх звичайних променів $\arg(1-z) = \theta$, $|\theta| < \frac{\pi}{2} - \eta$, і для всіх $z = 1 - r\,e^{-i\theta}$, що не належать деякій C^0-множині в точці 1, виконується співвідношення

$$\lim_{r\to 0} \frac{\ln B(1 - r\,e^{-i\theta})}{r^{-\rho}} = \frac{\pi}{\sin \pi\rho} e^{i\rho\theta} \int\limits_{-\pi/2+\eta}^{\pi/2-\eta} \left(e^{-i\rho\,(\psi + \pi\,\mathrm{sign}\,(\theta-\psi))} - e^{i\rho\psi}\right) d\Delta(\psi).$$

де $\ln B(z)$ — така однозначна в області D^* гілка $\mathrm{Ln}\, B(z)$, що $\ln B(0) < 0$.

Означення 4. *Функцію $v(t)$ будемо називати повільно зростаючою в точці 1, якщо $v(t)$ — невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0,1)$ функція така, що $v(0) = 0$ і $v(\frac{1+t}{2}) \sim v(t)$ при $t \to 1$.*

Теорема 1. *Нехай нулі добутку Бляшке $B(z)$ лежать на промені $\arg(1-z) = -\psi$, $\psi \in (-\pi/2 + \eta, \pi/2 - \eta)$ і задовольняють умову*

$$\Delta = \lim_{t\to 0} \frac{n_1(t, \pi/2)}{v(1-t)},$$

де $v(t)$ — повільно зростаюча в точці 1 функція. Тоді

$$\ln B(1 - re^{-i\theta}) = -i\Delta(2\psi + \pi\,\mathrm{sign}(\theta - \psi))v(1-r) + o(v(1-r)), \quad r \to 0, \quad (1)$$

де $\theta \neq -\psi$, $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, причому співвідношення (1) виконується рівномірно відносно θ в довільному куті $\delta \le |\theta - \psi| \le \pi/2 - \delta$, $0 < \delta < 1$.

Для доведення теореми 1 будемо використовувати одну асимптотичну рівність для цілих функцій нульового порядку, доведену в [4]. Нехай $n(r, 0, f)$ — лічильна функція нулів цілої функції f, $N(r) = \int_0^r \frac{n(t,0,f)}{t}\,dt$, $V(r)$ — повільно зростаюча функція, тобто $V(2r) \sim V(r)$, $r \to +\infty$, $\arg_{-\pi} z$ означає значення $\arg z \in [-\pi, \pi)$.

Теорема А. ([4]) *Якщо нулі цілої функції f нульового порядку лежать на промені $\arg z = \psi$ і $n(t, 0, f) \sim \Delta V(t)$, $t \to +\infty$, то для довільного $\theta \in [-\pi, \pi)$, $\theta \neq \psi$, виконується співвідношення*

$$\ln f(re^{i\theta}) = N(r) + i \arg_{-\pi} e^{i(\theta - \pi - \psi)} V(r) + o(V(r)), \quad r \to \infty, \quad (2)$$

Доведення теореми 1. Після заміни $z = (w-1)/w$ одержуємо

$$B\left(\frac{w-1}{w}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|a_n|} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1-\frac{w}{c_n}\right)}{\left(1-\frac{w}{c_n^*}\right)} = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{|a_n|} \frac{f_1(w)}{f_2(w)},$$

де $a_n = 1 - r_n e^{-i\psi}$ — нулі функції $B(z)$, $c_n = e^{i\psi}/r_n$, $c_n^* = \bar{a}_n e^{i(\pi-\psi)}/r_n$, $f_1(w)$, $f_2(w)$ — цілі функції вигляду

$$f_1(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{c_n}\right), \quad f_2(w) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{w}{c_n^*}\right).$$

Оскільки $n(r, 0, f_1) = n_1(1/r, \pi/2) = (1+o(1))\Delta V(r)$, $r \to +\infty$, де $V(r) = v(1-1/r)$ — повільно зростаюча функція, то з (2) при $r \to +\infty$ отримуємо

$$\ln f_1(re^{i\theta}) = \begin{cases} N(r) + i\Delta(\theta - \pi - \psi)V(r) + o(V(r)), & \psi < \theta < \psi + 2\pi, \\ N(r) + i\Delta(\theta + \pi - \psi)V(r) + o(V(r)), & \psi - 2\pi < \theta < \psi. \end{cases}$$

Аналогічно, при $r \to +\infty$ отримуємо

$$\ln f_2(re^{i\theta}) = \begin{cases} N(r) + i\Delta(\theta + \psi - 2\pi))V(r) + o(V(r)), \theta \in (\pi - \psi, 3\pi - \psi), \\ N(r) + i\Delta(\theta + \psi))V(r) + o(V(r)), \ -\pi - \psi < \theta < \pi - \psi. \end{cases}$$

Враховуючи попередні рівності і те, що $\prod_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-1} = K$, де K — деяка скінченна додатна стала, при $r \to +\infty$ маємо

$$\ln B\left(\frac{w-1}{w}\right) = \begin{cases} i\Delta(-\pi - 2\psi)V(r) + o(V(r)), \ \psi < \theta < \pi - \psi, \\ i\Delta(\pi - 2\psi)V(r) + o(V(r)), \ -\pi - \psi < \theta < \psi. \end{cases}$$

Оскільки $|\psi| \le \pi/2 - \eta$, то для $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\theta \ne \psi$, одержуємо

$$\ln B\left(\frac{w-1}{w}\right) = i\Delta(-2\psi - \pi \operatorname{sign}(\theta - \psi))V(r) + o(V(r)), \quad r \to +\infty.$$

Повертаючись до змінної $z = (w-1)/w$, для $\arg(1-z) \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\arg(1-z) \ne -\psi$, отримуємо

$$\ln B(z) = -i\Delta(2\psi + \pi \operatorname{sign}(-\arg(1-z) - \psi))v(|z|) + o(v(|z|)), \quad z \to 1.$$

Отже,

$$\ln B(1 - te^{-\theta}) = -i\Delta(2\psi + \pi \operatorname{sign}(\theta - \psi))v(1-t) + o(v(1-t)), \quad t \to 0.$$

Теорему доведено.

Зауваження. Добуток Бляшке (див., наприклад, [2, с. 81]) є мероморфною функцією в $\mathbb{C}$ за винятком множини граничних точок нулів $B(z)$. Тому, якщо нулі $B(z)$ лежать на промені $\arg(1-z) = -\psi$, де $\psi \in (-\pi/2+\eta, \pi/2-\eta)$, то з доведення теореми 1 видно, що асимптотична рівність (1) виконується для $z = 1-re^{-i\theta}$, $\theta \neq -\psi$, $\theta \neq -\psi+\pi$, $\theta \in [-\pi, \pi)$. У цьому випадку функцію $\operatorname{Ln} B(z)$ слід розглянути в $\mathbb{C}$ з розрізом вздовж променя

$$\{z : \arg(1-z) = -\psi, |z| \geq |a_1|\}, \quad \{z : \arg(1-z) = -\psi + \pi, |z| \geq |a_1|\},$$

а в якості $\ln B(z)$ вибрати таку однозначну гілку $\operatorname{Ln} B(z)$, що $\ln B(0) < 0$.

Теорема 2. *Нехай нулі добутку Бляшке $B(z)$ мають кутову щільність $\Delta(\psi)$ відносно повільно зростаючої в точці 1 функції $v(t)$. Тоді для всіх звичайних променів $\arg(1-z) = -\theta$, $\theta \in (-\pi/2+\eta, \pi/2-\eta)$, і для всіх $z = 1 - te^{-i\theta}$, що не належать деякій C^0-множині в точці 1, виконується рівність*

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln B(1-te^{-i\theta})}{v(1-t)} = -2i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\psi + \pi \, sign\,(\theta - \psi))\, d\Delta(\psi) =$$

$$= -2i \int_{-\pi/2+\eta}^{\pi/2-\eta} \psi\, d\Delta(\psi) - 2\pi i \Delta(\theta) + \pi i \Delta(\pi/2).$$

Доведення. Нехай спочатку нулі добутку Бляшке лежать на промені $\arg(1-z) = -\psi$, $\psi \in (-\pi/2, \pi/2)$, і мають щільність $\Delta = \lim\limits_{t\to 0} \frac{n_1(t,\pi/2)}{v(1-t)}$. Тоді, згідно з рівністю (1),

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln B(1-te^{-\theta})}{v(1-t)} = \begin{cases} i\Delta(-2\psi+\pi), & -\pi/2 < \theta < \psi, \\ i\Delta(-2\psi-\pi), & \psi < \theta < \pi/2, \end{cases}$$

тобто в даному випадку розташування нулів $B(z)$ твердження теореми є правильним.

Якщо нулі добутку Бляшке розташовані на скінченній системі променів $\arg(1-z) = -\psi_j$, $j = \overline{1,k}$, $-\pi/2+\eta < \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_k < \pi/2-\eta$, і на кожному промені мають щільність Δ_j, $j = \overline{1,k}$, $\Delta_j > 0$, то для всіх $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, $\theta \neq \psi_j$, $j = \overline{1,k}$, маємо

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln B(1-te^{-i\theta})}{v(1-t)} = -2i \sum_{j=1}^{k} \Delta_j \psi_j - \pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{sign}(\theta - \psi_j) \Delta_j =$$

$$= -2i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi \, d\Delta(\psi) - \pi i \sum_{j=1}^{k_1} \Delta_j + \pi i \sum_{j=k_1+1}^{k} \Delta_j = -2i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi \, d\Delta(\psi) -$$

$$-2\pi i \sum_{j=1}^{k_1} \Delta_j + \pi i \sum_{j=1}^{k} \Delta_j = -2i \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \psi \, d\Delta(\psi) - 2\pi i \Delta(\theta) + \pi i \Delta,$$

де $\Delta = \sum_{j=1}^{k} \Delta_j$, $\psi_{k_1} < \theta < \psi_{k_1+1}$, тобто і в цьому випадку розташування нулів $B(z)$ теорему доведено.

Перехід до загального випадку розташування нулів $B(z)$ здійснюється стандартними методами (див., наприклад, [3], [5, с. 130–133; 161–163]).

Теорему 2 повністю доведено.

[1] *Галоян Р.С.* Об асимптотических свойствах функции $\pi(z; z_k)$ // Докл. Академии наук Армянской ССР. – 1974. – Т. 59, № 2. – С. 65–71.

[2] *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир. – 1984. – 469 с.

[3] *Гирнык М.А.* Об асимптотических свойствах некоторых канонических произведений // Сиб. матем. журн. – 1974. – Т. 25, № 5. – С. 1036–1048.

[4] *Заболоцький М.В.* Теореми типу Валірона та Валірона-Тітчмарша для цілих функцій нульового порядку // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 3. – С. 315–325.

[5] *Левин Б.Я.* Распределение значений целых функций. – М.: ГИТТЛ. – 1956. – 632 с.

REGULAR GROWTH OF BLASCHKE PRODUCT WITH ANGULAR DENSITY OF ZEROS

Mykola ZABOLOTSKYY

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

There is established the asymptotics of Blaschke product under the condition of existence of an angular density of zeros relatively the slow growth in point 1 function.