УТОЧНЕННЯ НЕРІВНОСТІ ФЕНТОНА ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ВІД ДВОХ КОМПЛЕКСНИХ ЗМІННИХ

©2006 р. *Олег ЗРУМ, Олег СКАСКІВ*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 18 вересня 2006 р.

Нехай $f(z_1,z_2)=\sum\limits_{n+m=0}^{+\infty}a_{n,m}z_1^nz_2^m$, $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$, — ціла функція, $K(f)=\left\{f(z,t)=\sum\limits_{n+m=0}^{+\infty}a_{n,m}e^{2\pi i\theta_{n,m}t}:\ t\in[0;1]\right\}$, де $(\theta_{n,m})$ — послідовність натуральних чисел, яка допускає впорядкування (θ_k^*) за зростанням: $\{\theta_{n,m}:(n,m)\in\mathbb{Z}_+^2\}=\{\theta_k^*:k\ge 0\}$, $\theta_{k+1}^*>\theta_k^*$ $(k\ge 0)$, причому $\theta_{k+1}^*/\theta_k^*\ge 1+(ak)^{-\alpha}$, $0\le\alpha\le 1/2$.

У даній статті доведено, що для кожного $\varepsilon>0$ майже напевно в $K(f)$ існує множина $E(\varepsilon,t)\subset\mathbb{R}_+^2$, така, що для всіх $r\in\mathbb{R}_+^2\setminus E(\varepsilon,t)$, $r=(r_1,r_2)$, правильна нерівність

$$M_f(r,t)\le\mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{\frac12+\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}}(\ln\ln\mu_f(r))^{\frac12+\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}+\delta},$$

де

$$M_f(r,t)=\max\{|f(z,t)|:|z_1|=r_1,|z_2|=r_2\},$$

$$\mu_f(r)=\max\{|a_{n,m}|r_1^nr_2^m:n\ge 0,m\ge 0\},$$

і виконується асимптотична рівність

$$l_2-\operatorname{meas}E_R(\varepsilon,t)\stackrel{\text{def}}{=}\int_{E_R(\varepsilon,t)\cap[1,+\infty)\times[1,+\infty)}\frac{dr}{r}=O(\ln R)\ (R\to+\infty),$$

де $E_R(\varepsilon,t)=E(\varepsilon,t)\cap\triangle_R$, $\triangle_R=\{r\in\mathbb{R}_+^2:1\le r_1\le R,1\le r_2\le R\}$.

УДК 517.5; MSC 2000: 30B20, 30D20

1. ВСТУП І ФОРМУЛЮВАННЯ ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТУ

Для цілої функції

$$f(z_1, z_2) = \sum_{n+m=0}^{\infty} a_{n,m} z_1^n z_2^m, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2, \tag{1}$$

і $r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}_+^2$, $\mathbb{R}_+^2 = [0, +\infty) \times [0, +\infty)$, позначимо

$$M_f(r) = M_f(r_1, r_2) = \max\{|f(z)| : |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\},$$

$$\mu_f(r) = \mu_f(r_1, r_2) = \max\{|a_{n,m}| r_1^n r_2^m : n + m \geq 0\}.$$

П.Фентон [1] встановив таке твердження.

Теорема А [1]. *Для кожної цілої функції f вигляду* (1) *і для кожного $\varepsilon > 0$ існують множина $E \subset \mathbb{R}_+^2$ і стала $C > 0$ такі, що для всіх $r \in \mathbb{R}_+^2 \setminus E$ виконується нерівність*

$$M_f(r) \leq C\mu_f(r) \ln^+ \mu_f(r)(\ln^+ \ln \mu_f(r))^{1+\varepsilon}, \tag{2}$$

при цьому

$$\ln_2 -\operatorname{meas} E_R \stackrel{\text{def}}{=} \int_{E_R} \frac{dr_1 dr_2}{r_1 r_2} \leq 2(1 + \varepsilon) \ln R + O(1) \ (R \to +\infty),$$

де $E_R = E \cap \Delta_R$, $\Delta_R = \{r \in \mathbb{R}_+^2 : 1 \leq r_1 \leq R, 1 \leq r_2 \leq R\}$.

У випадку, коли $X = (X_{n,m}(t))$ є рівномірно обмеженою мультиплікативною системою [2] на ймовірнісному просторі Штейнгауза $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ($\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ — σ-алгебра вимірних за Лебегом підмножин $[0, 1]$, P — міра Лебега на прямій), у [2] доведено, що в класі

$$K(f, X) = \left\{ f(z_1, z_2, t) = \sum_{n+m=0}^{\infty} a_{n,m} z_1^n z_2^m X_{n,m}(t) : t \in [0, 1] \right\}$$

у нерівності (2) майже напевно (м. н.) множник $\ln^+ \mu_f(r)$ можна замінити на $\sqrt{\ln^+ \mu_f(r)}$.

Наведена властивість виконується і в класі $K(f, Z)$, де $Z = (Z_{n,m}(t))$,

$$Z_{n,m}(t) = X_{n,m}(t) + iY_{n,m}(t),$$

$(X_{n,m}(t))$, $(Y_{n,m}(t))$ — рівномірно обмежені мультиплікативні системи, а також [3] у класі $K(f,\theta)$, де $\theta = (e^{2\pi i\theta_{n,m}})$, а впорядкування за неспаданням (θ_k^*) послідовності натуральних чисел $(\theta_{n,m})$ є послідовністю Адамара, тобто $(\forall k \geq 1) : \theta_{k+1}^*/\theta_k^* \geq q > 1$.

Відзначимо, що послідовності $(\cos 2\pi\theta_{n,m}t)$, $(\sin 2\pi\theta_{n,m}t)$ утворюють мультиплікативні системи у випадку $q \geq 2$, а у випадку $q < 2$ вони такими можуть не бути.

Метою даної статті є подальше послаблення умови на послідовність $(\theta_{n,m})$ зі збереженням (у певній формі) ефекту покращення м. н. нерівності (2), встановленого у [2, 3]. В ідейному плані, отримані тут твердження є близькими до відповідних тверджень, встановлених у [4] для цілих функцій однієї змінної.

Нехай $(\theta_{n,m})$ — послідовність натуральних чисел, яка допускає впорядкування (θ_k^*) за зростанням: $\{\theta_{n,m} : (n,m) \in \mathbb{Z}_+^2\} = \{\theta_k^* : k \geq 0\}$, $\theta_{k+1}^* > \theta_k^*$ $(k \geq 0)$ і

$$\theta_{k+1}^*/\theta_k^* \geq 1 + \frac{1}{\varphi(k)}, \tag{3}$$

де $\varphi(x)$ — додатна, неперервна, неспадна до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція.

Доведемо наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо для послідовності $\{\theta_{n,m}\} \subset \mathbb{N}$ виконується умова (3), де $\varphi(x)$ — неперервна, зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція,*

$$\varphi(0) \geq 1, \quad \varphi(x) = ax^\alpha, \quad a > 0, \quad 0 \leq \alpha \leq 1/2 \quad (x \geq x_0),$$

то для кожного $\delta > 0$ і для кожної цілої функції вигляду (1) майже напевно (м. н.) в $K(f,\theta)$ для всіх $r \in \mathbb{R}_+^2 \backslash E(\delta,t)$ виконується нерівність

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}}(\ln\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}+\delta}, \tag{4}$$

при цьому

$$\ln_2 - \mathrm{meas}\, E_R(\delta,t) = O(\ln R) \ (R \to +\infty),$$

де $E_R(\delta,t) = E(\delta,t) \cap \Delta_R$, $M_f(r,t) = \max\{|f(z,t)| : |z_1| = r_1, |z_2| = r_2\}$.

Зауважимо, що нерівність (4) є сильнішою за нерівність Фентона (2), оскільки $\frac{1}{2} + \frac{3\alpha}{2(1+\alpha)} < 1$ для $\alpha < 1/2$.

2. ДОПОМІЖНІ ТВЕРДЖЕННЯ

Наступну лему фактично доведено в [4, с. 62–63].

Лема 1 [4]. *Нехай $(\theta_k^*)_{k=0}^l$ — довільна послідовність натуральних чисел, для якої виконується умова (3) із функцією φ, описаною вище. Тоді існують сталі A і B такі, що для довільних $\{b_k : 0 \le k \le l\} \subset \mathbb{C}$ і кожного $\lambda > 0$ справджується оцінка*

$$P\left\{t : \left|\sum_{k=1}^{N} b_k e^{2\pi\theta_k^* ti}\right| \ge A\lambda S_N\right\} \le m_1 B e^{-\lambda^2/m_1},$$

де $m_1 = [\varphi(N)]$, $S_N^2 = \sum\limits_{k=1}^{N} |b_k|^2$.

Лема 2. *Якщо для послідовності $\theta = (\theta_{n,m})$ виконується умова (3), то для кожного $\beta > 0$ існує стала A_β, яка залежить лише від β, така, що для кожного $l \in \mathbb{N}$, $l \ge 2$, і будь-яких $\{c_{n,m} : 0 \le n+m \le l\} \subset \mathbb{C}$ справджується нерівність*

$$P\left\{t : \max\left\{\left|\sum_{n+m=0}^{l} c_{n,m} e^{in\psi_1 + im\psi_2} e^{2\pi\theta_{n,m} ti}\right| : \psi \in [0, 2\pi]^2\right\} \ge\right.$$

$$\left.\ge A_\beta (\varphi(l^2))^{1/2} S_l \ln^{1/2} l\right\} \le \frac{(2\pi+1)^2 B}{l^\beta},$$

де $S_l^2 = \sum\limits_{n+m=0}^{l} |c_{n,m}|^2$, $A_\beta = \sqrt{\ln a/\ln 2 + \beta + 5}A + 1$, *а A і B — сталі з леми 1.*

Доведення. Для $j \in \mathbb{N}$ і $(n, m) \in \mathbb{Z}_+^2$ таких, що $\theta_j^* = \theta_{n,m}$, позначимо $b_j = c_{n,m} e^{i(n\psi_1 + m\psi_2)}$, де $\psi = (\psi_1, \psi_2) \in [0, 2\pi]^2$ — фіксоване. Використаємо лему 1, вибираючи $\lambda = \sqrt{m_1(\ln a + (\beta+5)\ln l)}$. Отже, за лемою 1 з $N = \frac{1}{2}(l+1)(l+2) \le l^2$ маємо

$$P\left\{t : \left|\sum_{n+m=0}^{l} c_{n,m} e^{i(n\psi_1 + m\psi_2)} e^{2\pi i\theta_{n,m} t}\right| \ge\right.$$

$$\left.\ge \sqrt{\ln a/\ln 2 + \beta + 5}A(\varphi(l^2))^{1/2} S_l \ln^{1/2} l\right\} \le$$

$$\le P\left\{t : \left|\sum_{n+m=0}^{l} c_{n,m} e^{i(n\psi_1+m\psi_2)} e^{2\pi i\theta_{n,m}t}\right| \ge\right.$$

$$\left.\ge \sqrt{\ln a/\ln l+\beta+5}A(\varphi((l+1)(l+2)/2))^{1/2}S_l\ln^{1/2} l\right\} \le$$

$$\le \frac{Bm_1}{l^{\beta+5}} \le \frac{B\varphi(l^2)}{l^{\beta+5}} \le \frac{B}{l^{\beta+4}}. \qquad (5)$$

Нехай $M=[2\pi l^2]+1$, $\psi_{1,j_1}=\frac{2\pi j_1}{M}$, $\psi_{2,j_2}=\frac{2\pi j_2}{M}$ $(j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,M\})$. На підставі нерівності Коші-Буняковського та нерівностей $|u+v|\le|u|+|v|$, $|e^{ia}-e^{ib}|=2|\sin\frac{a-b}{2}|\le|a-b|$ $(a,b\in\mathbb{R})$ і $l\ge 2$ у [3] доведено, що для $\psi_1\in[\psi_{1,j_1},\psi_{1,j_1+1}]$, $\psi_2\in[\psi_{2,j_2},\psi_{2,j_2+1}]$

$$p(\psi,t)\stackrel{\text{def}}{=}\left|\sum_{n+m=0}^{l} c_{n,m}e^{in\psi_1}e^{im\psi_2}e^{2\pi i\theta_{n,m}t}\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{n+m=0}^{l} c_{n,m}e^{in\psi_{1,j_1}}e^{im\psi_{2,j_2}}e^{2\pi i\theta_{n,m}t}\right| +$$

$$+\left|\sum_{n+m=0}^{l} c_{n,m}(e^{in\psi_1}e^{im\psi_2}-e^{in\psi_{1,j_1}}e^{im\psi_{2,j_2}})e^{2\pi i\theta_{n,m}t}\right| \le$$

$$\le \left|\sum_{n+m=0}^{l} c_{n,m}e^{in\psi_{1,j_1}}e^{im\psi_{2,j_2}}e^{2\pi i\theta_{n,m}t}\right| +$$

$$+S_l\left(\sum_{n+m=0}^{l}|n(\psi_1-\psi_{1,j_1})+m(\psi_2-\psi_{2,j_2})|^2\right)^{1/2} \le$$

$$\le \left|\sum_{n+m=0}^{l} c_{n,m}e^{in\psi_{1,j_1}}e^{im\psi_{2,j_2}}e^{2\pi i\theta_{n,m}t}\right| + \frac{2\pi}{M}l^2S_l,$$

звідки випливає, що

$$\max\{p(\psi,t):\psi\in[0;2\pi]^2\}\le$$

$$\le \max\left\{\left|\sum_{n+m=0}^{l} c_{n,m}e^{in\psi_{1,j_1}}e^{im\psi_{2,j_2}}e^{2\pi i\theta_{n,m}t}\right| : j_1,j_2\in\{1,2,\ldots,M\}\right\}+S_l.$$

Звідси, за нерівністю (5) одержуємо

$$P\{t : \max\{p(\psi,t) : \psi \in [0;2\pi]^2\} \geq$$
$$\geq (\sqrt{\ln a/\ln 2+\beta+5}A+1)(\varphi(l^2))^{1/2}S_l \ln^{1/2} l\} \leq$$
$$\leq P\left\{t : \max\{p(\psi_{1,j_1},\psi_{2,j_2},t) : j_1,j_2 \in \{1,2,\ldots,M\}\} + S_l \geq\right.$$
$$\geq (\sqrt{\ln a/\ln 2+\beta+5}A+1)(\varphi(l^2))^{1/2}S_l \ln^{1/2} l\} \leq$$
$$\leq P\{t : \max\{p(\psi_{1,j_1},\psi_{2,j_2},t) : j_1,j_2 \in \{1,\ldots,M\}\} \geq$$
$$\geq \sqrt{\ln a/\ln 2+\beta+5}A(\varphi(l^2))^{1/2}S_l \ln^{1/2} l\} \leq$$
$$\leq \sum_{j_1=1}^{M}\sum_{j_2=1}^{M} P\{t :\ p(\psi_{1,j_1},\psi_{2,j_2},t) \geq$$
$$\geq \sqrt{\ln a/\ln 2+\beta+5}A(\varphi(l^2))^{1/2}S_l \ln^{1/2} l\} \leq \frac{M^2B}{l^{\beta+4}} \leq \frac{(2\pi+1)^2B}{l^{\beta}}, \qquad (6)$$

що й слід було довести.

3. ДОВЕДЕННЯ ТЕОРЕМИ 1

У значній частині цього доведення повторюємо схему доведення теореми з [2]. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що

$$\#\{n \geq 1 : a_{n,m} \neq 0\} \geq 1, \quad \#\{m \geq 1 : a_{n,m} \neq 0\} \geq 1.$$

Тоді $\mu_f(r_1,r_2) \to +\infty$ при $r_1 \to +\infty$ для фіксованого $r_2 > 0$, а також $\mu_f(r_1,r_2) \to +\infty$ при $r_2 \to +\infty$ для фіксованого $r_1 > 0$.

Як і в роботі [2], для $k \in \mathbb{N}$ позначимо

$$G_k = \{r = (r_1,r_2) \in \mathbb{R}_+^2 : k \leq \ln \mu_f(r_1,r_2) < k+1\} \cap ([1;+\infty) \times [1;+\infty)).$$

Очевидно, що G_k — обмежена, а також за нашим припущенням $G_k \neq \emptyset$ для всіх досить великих k. Нехай $G_k^+ = \bigcup_{j=k}^{+\infty} G_j$.

Для цілої функції $f(z_1,z_2)$ вигляду (1) і для $r = (r_1,r_2) \in \mathbb{R}_+^2$, $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ покладемо

$$\mathfrak{M}_f(r) = \sum_{n+m=0}^{+\infty} |a_{n,m}| r_1^n r_2^m, \quad g(x) = \ln \mathfrak{M}_f(e^{x_1}, e^{x_2}),$$

$$A_j(r) = \frac{\partial g(\ln r_1, \ln r_2)}{\partial x_j} \quad (j \in \{1,2\}).$$

Лема 3 ([2, 3]). *Для кожного $\delta_1 > 0$ існує множина $E_1 = E_1(\delta_1)$ така, що для всіх $r \in G_{k_0}^+ \setminus E_1$*

$$\max\{A_1(r_1, r_2), A_2(r_1, r_2)\} \le 5 \cdot 2^{1+\delta_1} \ln \mu_f(r)(\ln\ln \mu_f(r))^{1+\delta_1}, \qquad (7)$$

при цьому

$$\ln_2 -\mathrm{meas}\, E_{1,R}(\delta_1) = O(\ln R) \ (R \to +\infty),$$

де $E_{1,R}(\delta_1) = E_1(\delta_1) \cap \Delta_R$.

Продовжуючи доведення теореми 1, відзначимо, що

$$\ln_2 -\mathrm{meas}\ \cup_{j=1}^{k_0-1} G_j = c(k_0) < +\infty.$$

Отже, нехай $E_2(\delta_1) = E_1(\delta_1) \cup E(\delta_1) \cup (\cup_{j=1}^{k_0-1} G_j)$, де $E(\delta_1)$ — виняткова множина у нерівності (2) з $\varepsilon = \delta_1$. Зауважимо тепер, що для

$$d = d(\mu_f(r)) = C \cdot 5 \cdot 2^{2+\delta_1} (\ln \mu_f(r))^{\frac{3}{2(1+\alpha)}} (\ln\ln \mu_f(r))^{\frac{3(1+\delta_1)}{2(1+\alpha)}}$$

з нерівностей (7) і (2) з $\varepsilon = \delta_1$, для $r \notin E_2(\delta_1)$ отримаємо (див. [2])

$$\sum_{n+m \ge 2d} |a_{n,m}| r_1^n r_2^m \le \frac{1}{d}(A_1(r) + A_2(r)) \mathfrak{M}_f(r) \le$$

$$\le \frac{5 \cdot 2^{2+\delta_1}}{d} \mathfrak{M}_f(r) \ln \mu_f(r) (\ln\ln \mu_f(r))^{1+\delta_1} \le$$

$$\le \frac{5 \cdot 2^{2+\delta_1}}{d} C \mu_f(r) \ln^2 \mu_f(r) (\ln\ln \mu_f(r))^{2+2\delta_1} =$$

$$= \mu_f(r) (\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2} + \frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}} (\ln\ln \mu_f(r))^{(\frac{1+\delta_1}{2})(\frac{3\alpha}{1+\alpha}+1)}, \qquad (8)$$

де $C > 0$ — стала з нерівності (2) з $\varepsilon = \delta_1$. Нехай тепер $G_k^* = G_k \setminus E_2(\delta_1)$. Через I позначимо множину тих $k \ge k_0$, для яких $G_k^* \ne \emptyset$. Зрозуміло, що $\#I = +\infty$. Для $k \in I$ виберемо $r^{(k)} \in G_k^*$. Тоді для всіх $r \in G_k^*$

$$\mu_f(r^{(k)}) < e^{k+1} \le e\mu_f(r), \quad \mu_f(r) < e^{k+1} < e\mu_f(r^{(k)}), \qquad (9)$$

а також

$$[1; +\infty)^2 \setminus E_2(\delta_1) = \bigcup_{k \in I} G_k^*. \qquad (10)$$

Для $k \in I$ позначимо $N_k = [2d_1(r^{(k)})]$, де $d_1(r) = d(e\mu_f(r))$, а для $r \in G_k^*$ покладемо

$$W_{N_k}(r, t) = \max\left\{ \left| \sum_{n+m \le N_k} a_{n,m} r_1^n r_2^m e^{in\psi_1 + im\psi_2} e^{2\pi i \theta_{n,m} t} \right| : \psi \in [0, 2\pi]^2 \right\}.$$

Далі міркуємо подібно, як у [2]. Нехай для вимірної множини $G \subset G_k^*$, $k \in I$,

$$\nu_k(G) = \mathrm{meas}_2\,(G)/\mathrm{meas}_2\,(G_k^*), \tag{11}$$

де meas_2 — міра Лебега в $\mathbb{R}^2$. Зауважимо, що ν_k — ймовірнісна міра, визначена на сім'ї вимірних за Лебегом підмножин G_k^*. Нехай $\Omega = \bigcup_{k\in I} G_k^*$ і нехай $I = \{k_j \colon j \geq 1\} \subset \mathbb{N}$, де $k_j < k_{j+1}$, $j \geq 1$. Для вимірної підмножини $G \subset \Omega$ визначимо

$$\nu(G) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k_j}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k_{j+1}-k_j}\right)\nu_{k_{j+1}}(G \cap G_{k_{j+1}}^*), \tag{12}$$

де $k_0 = 0$. Зауважимо, що ν — ймовірнісна міра, визначена на вимірних підмножинах Ω. На декартовому добутку $[0,1]\times\Omega$ визначимо тепер ймовірнісну міру P_0, що є прямим добутком ймовірнісних мір P і ν, тобто $P_0 = P \otimes \nu$. Нехай тепер для $k \in I$

$$F_k = \{(t,r) \in [0,1] \times \Omega \colon W_{N_k}(r,t) > A_4(\varphi(N_k^2))^{1/2} S_{N_k}(r) \ln^{1/2} N_k\},$$

$$F_k(r) = \{t \in [0,1] \colon W_{N_k}(r,t) > A_4(\varphi(N_k^2))^{1/2} S_{N_k}(r) \ln^{1/2} N_k\},$$

де $S_{N_k}^2(r) = \sum_{n+m=0}^{N_k}(|a_{n,m}| r_1^n r_2^m)^2$, а A_4 — стала з леми 2 при $\beta = 4$. Тоді, за теоремою Фубіні на підставі леми 2 з $c_{n,m} = a_{n,m} r_1^n r_2^m$ і $\beta = 4$, для $k \in I$ отримаємо

$$P_0(F_k) = \int_\Omega \int_{F_k(r)} dP d\nu = \int_\Omega P(F_k(r)) d\nu \leq$$

$$\leq \frac{(2\pi+1)^2 B}{N_k^4}\nu(\Omega) = \frac{(2\pi+1)^2 B}{N_k^4}.$$

Зауважимо, що $N_k^4 > \ln^2 \mu_f(r^{(k)}) \geq k^2$. Тому $\sum_{k\in I} P_0(F_k) < +\infty$ і за лемою Бореля–Кантеллі серед подій $\{F_k \colon k \in I\}$ з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається скінченна кількість подій. Звідси випливає, що існує $F \subset [0,1] \times \Omega$ така, що $P_0(F) = 1$ і для кожної точки $(t,r) \in F$ існує $k_0 = k_0(t,r)$ таке, що для всіх $k \geq k_0$, $k \in I$, виконується нерівність

$$W_{N_k}(r,t) \leq A_4(\varphi(N_k^2))^{1/2} S_{N_k}(r) \ln^{1/2} N_k. \tag{13}$$

Через F_Ω позначимо проекцію F на Ω, тобто $F_\Omega = \{r \in \Omega \colon (\exists t)[(t,r) \in F]\}$. Тоді $\nu_k(F_\Omega \bigcap G_k^*) = 1$ для кожного $k \in I$. Справді, якщо б для деякого $k \in I$, $k = k_{j+1}$, виконувалась нерівність $\nu_k(F_\Omega \bigcap G_k^*) = q < 1$, то для F_Ω отримуємо

$$\nu(F_\Omega) = \sum_{k \in I} \nu(F_\Omega \cap G_k^*) \leq$$

$$\leq \sum_{s=0, s\neq j}^{+\infty} \frac{1}{2^{k_s}}\Big(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k_{s+1}-k_s}\Big) + \frac{1}{2^{k_j}}\Big(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k_{j+1}-k_j}\Big) \cdot \nu_{k_{j+1}}(F_\Omega \cap G_{k_{j+1}}) =$$

$$= \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k_s}}\Big(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k_{s+1}-k_s}\Big) - (1-q)\frac{1}{2^{k_j}}\Big(1 - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{k_{j+1}-k_j}\Big) < 1.$$

Звідси, за теоремою Фубіні, отримаємо неможливу нерівність

$$P_0(F) = \int_{F_\Omega} \Big(\int_{F(r)} dP \Big) d\nu = \int_{F_\Omega} P(F(r)) d\nu \leq \nu(F_\Omega) < 1,$$

у якій вжито позначення $F(r) = \{t \in [0,1] \colon (t,r) \in F\}$.

Подібно, для звуження F на $[0,1]$, $F_{[0,1]} = \bigcup_{r \in \Omega} F(r)$, дістаємо, що $P(F_{[0,1]}) = 1$. Тепер припустимо, що існує $F_1 \subset F_{[0,1]}$ така, що $P(F_1) = q_1 \in (0;1)$:

$$(\forall t \in F_1) : \nu(F^\wedge(t)) = q_2(t) < 1, \quad F^\wedge(t) = \{r \in \Omega : (t,r) \in F\};$$

$$(\forall t \in F_{[0,1]} \setminus F_1) : \nu((F_{[0,1]} \setminus F_1)^\wedge(t)) = 1.$$

Тоді за теоремою Фубіні

$$1 = P_0(F) = \int_{F_{[0,1]}} \Big(\int_{F^\wedge(t)} d\nu + \int_{(F_{[0,1]} \setminus F_1)^\wedge(t)} d\nu \Big) dP =$$

$$= \int_{F_{[0,1]}} (q_2(t) + 1) dP.$$

Оскільки $q_2(t) \geq 0$, то звідси випливає, що $q_2(t) = 0$ (м.н.). Нехай $F^* = \bigcup_{t \in F_1} F^\wedge(t)$, $F^* \subset F$. Тоді

$$P_0(F^*) = \int_{F_1} \Big(\int_{F^\wedge(t)} d\nu \Big) dP = 0,$$

звідки

$$1 = P_0(F \setminus F^*) \leq P_0((F \setminus F_1) \times \Omega) = P(F \setminus F_1) \cdot \nu(\Omega) = 1 - q_1.$$

Отримали суперечність з припущенням, що існує множина $F_1 \subset F_{[0,1]}$ міри $q_1 \in (0;1)$ така, що ν-міра кожного перерізу $F^\wedge(t)$, $t \in F_1$ менша за одиницю. Отже, існує підмножина $F_1 \subset F_{[0,1]}$ повної міри ($P(F_1) = 1$) така, що $\nu(F^\wedge(t)) = 1$ для всіх $t \in F_1$. Як і вище, доводимо, що з того, що $(\forall t \in F_1) : \nu(F^\wedge(t)) = 1$ випливає, що $(\forall k \in I) : (F^\wedge(t) \bigcap G_k^*) = 1$. Справді, якщо б для деякого $k \in I$, $k = k_{j+1}$, виконувалася б нерівність $\nu_k(F^\wedge(t) \bigcap G_k^*) = q < 1$, то, як і вище, дістаємо суперечність

$$\nu(F^\wedge(t)) = \sum_{k \in I} \nu(F^\wedge(t) \cap G_k^*) \leq$$

$$\leq \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{k_s}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k_{s+1}-k_s}\right) - (1-q)\frac{1}{2^{k_j}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k_{j+1}-k_j}\right) =$$

$$= 1 - (1-q)\frac{1}{2^{k_j}}\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{k_{j+1}-k_j}\right) < 1.$$

Нехай для всіх $t \in F_1$ і $k \in I$ точка $r_0^{(k)}(t) \in G_k^*$ є такою, що

$$W_{N_k}(r_0^{(k)}(t), t) \geq \frac{3}{4} M_k(t), \quad M_k(t) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{W_{N_k}(r,t) : r \in G_k^*\}.$$

З того, що

$$(\forall k \in I) : \nu_k(F^\wedge(t) \cap G_k^*) = 1,$$

неперервності $W_{N_k}(r,t)$ як функції від r при фіксованому t, отримуємо, що існує точка $r^{(k)}(t) \in G_k^* \cap F^\wedge(t)$ така, що

$$|W_{N_k}(r_0^{(k)}(t), t) - W_{N_k}(r^{(k)}(t), t)| < \frac{1}{4} M_k(t),$$

тобто

$$\frac{3}{4} M_k(t) \leq W_{N_k}(r_0^{(k)}(t), t) \leq W_{N_k}(r^{(k)}(t), t) + \frac{1}{4} M_k(t).$$

Отже, з того, що $(t, r^{(k)}(t)) \in F$, внаслідок нерівності (15) отримуємо

$$\frac{1}{2} M_k(t) \leq W_{N_k}(r^{(k)}(t), t) \leq A_4(\varphi(N_k^2))^{1/2} S_{N_k}(r^{(k)}(t)) \ln^{1/2} N_k. \qquad (14)$$

Зауважимо тепер, що за нерівністю (2) з $\varepsilon = \delta_1$ і $r^{(k)} = r^{(k)}(t)$

$$S_N^2(r^{(k)}) \leq \mu_f(r^{(k)}) \mathfrak{M}_f(r^{(k)}) \leq C\mu_f^2(r^{(k)}) \ln \mu_f(r^{(k)}) (\ln\ln \mu_f(r^{(k)}))^{1+\delta_1}.$$

Звідси випливає, що для $t \in F_1$ і всіх $k \geq k_0(t)$, $k \in I$,

$$S_N(r^{(k)}) \leq \sqrt{C} \mu_f(r^{(k)}) \ln^{1/2} \mu_f(r^{(k)}) (\ln\ln \mu_f(r^{(k)}))^{\frac{1+\delta_1}{2}}. \qquad (15)$$

Оскільки для $r \in G_k^*$ виконуються співвідношення (9), то $d_1(r^{(k)}) \geq d(\mu_f(r))$. Отже, для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \cap G_k^*$, $k \in I$, $k \geq k_0(t)$, маємо

$$M_f(r,t) \leq \sum_{n+m \geq 2d_1(r^{(k)})} |a_{n,m}| r_1^n r_2^m + W_{N_k}(r,t) \leq$$

$$\leq \sum_{n+m \geq 2d(\mu_f(r))} |a_{n,m}| r_1^n r_2^m + M_k(t).$$

Звідси, за допомогою (8), (14), (15) для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \cap G_k^*$, $k \in I$, $k \geq k_0(t)$, отримуємо

$$M_f(r,t) \leq \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}} (\ln\ln \mu_f(r))^{(\frac{1+\delta_1}{2})(\frac{3\alpha}{1+\alpha}+1)} +$$
$$+2A_4(\varphi(N_k^2))^{1/2} S_{N_k}(r^{(k)}) \ln^{1/2} N_k \leq$$
$$\leq \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}} (\ln\ln \mu_f(r))^{(\frac{1+\delta_1}{2})(\frac{3\alpha}{1+\alpha}+1)} +$$
$$+2A_4\sqrt{C}(\varphi(N_k^2))^{1/2} \mu_f(r^{(k)}) \ln^{1/2} \mu_f(r^{(k)}) \times$$
$$\times (\ln\ln \mu_f(r^{(k)}))^{\frac{1+\delta_1}{2}} (C_1 + \frac{3}{2(1+\alpha)} \ln\ln(e\mu_f(r^{(k)})) +$$
$$+ \frac{3(1+\delta_1)}{2(1+\alpha)} \ln\ln\ln(e\mu_f(r^{(k)})))^{1/2} =$$
$$= \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}} (\ln\ln \mu_f(r))^{(\frac{1+\delta_1}{2})(\frac{3\alpha}{1+\alpha}+1)} +$$
$$+C_2(\ln(e\mu_f(r)))^{\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}} (\ln\ln(e\mu_f(r)))^{\frac{3\alpha(1+\delta_1)}{1+\alpha}} \times$$
$$\times \mu_f(r^{(k)}) \ln^{1/2} \mu_f(r^{(k)}) (\ln\ln \mu_f(r^{(k)}))^{\frac{1+\delta_1}{2}} (C_1 +$$
$$+ \frac{3}{2(1+\alpha)} \ln\ln(e\mu_f(r^{(k)})) + \frac{3(1+\delta_1)}{2(1+\alpha)} \ln\ln\ln(e\mu_f(r^{(k)})))^{1/2}$$

де $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ — деякі сталі. Звідси, враховуючи нерівність (9), для $t \in F_1$, $r \in F^\wedge(t) \cap G_k^*$, $k \in I$, $k \geq k_0(t)$, отримаємо

$$M_f(r,t) \leq C_3 \mu_f(r)(\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}} (\ln\ln \mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\frac{3\delta_1}{4}+\frac{3\alpha(1+\delta_1)}{2(1+\alpha)}} \qquad (16)$$

де $C_3 > 0$ — деяка стала. Залишається вибрати $k_1 > k_0(t)$ так, щоб для $r \in G_{k_1}^+$ виконувалась нерівність $C_3 \leq (\ln\ln \mu_f(r))^{\delta_1/4}$. Звідси і з (16), вибравши $\delta = 2\delta_1 \geq \delta_1 + \frac{3\alpha\delta_1}{1+\alpha}$ $(0 < \alpha \leq \frac{1}{2})$, отримуємо твердження теореми, оскільки бажана нерівність, згідно з (10), виконується (м. н.)

(для $t \in F_1$, $P(F_1) = 1$) для всіх $r \in (\bigcup_{k\in I}(G_k^* \cap F^\wedge(t)) \cap G_{k_1}^+) \setminus E(\delta_1) = ([1,+\infty)^2 \cap G_{k_1}^+) \setminus (E_2(\delta_1) \cup G^* \cup E(\delta_1)) = [1,+\infty)^2 \setminus E_3(\delta_1)$, де $E_3(\delta_1) = E_2(\delta_1) \cup E(\delta_1) \cup G^* \cup (\cup_{j=1}^{k_1-1} G_j)$, $G^* = \bigcup_{k\in I}(G_k^* \setminus F^\wedge(t))$, а $E(\delta_1)$ — виняткова множина у нерівності (2) (при $\varepsilon = \delta_1$) з теореми А. Пригадаємо, що $\nu(G_0) = \sum_{k\in I}(\nu_k(G_k^*) - \nu_k(F^\wedge(t))) = 0$, а також, що $\nu(G_0)$ визначається рівністю (12), з якої негайно випливає, що для всіх $k \in I$

$$\nu_k(G_k^* \setminus F^\wedge(t)) = \mathrm{meas}_2\ (G_k^* \setminus F^\wedge(t))/\mathrm{meas}_2\ (G_k^*) = 0,$$

тобто, також

$$\ln_2 - \mathrm{meas}\ (G_k^* \setminus F^\wedge(t)) = \iint_{G_k^* \setminus F^\wedge(t)} \frac{dr_1 dr_2}{r_1 r_2} = 0.$$

Тому

$$\ln_2 - \mathrm{meas}\ (G^* \cap [1, R]^2) = 0,$$

і при $R \to +\infty$

$$\ln_2 - \mathrm{meas}\ E_{3,R}(\delta_1) \le \ln_2 - \mathrm{meas}\ E_{2,R}(\delta_1) + \ln_2 - \mathrm{meas} \bigcup_{j=1}^{k_1-1} G_j =$$

$$= \ln_2 - \mathrm{meas}\ E_{1,R} + \ln_2 - \mathrm{meas}\ E_{3,R} + O(1) \le (2B + 6 + 2\delta_1) \ln R + O(1),$$

де $E_{j,R} = E_j \cap \triangle_R$. Теорему доведено.

[1] *Fenton P.C.* Wiman-Valyron theory in two variables // Trans. Amer. Math. Soc. – 1995. – V. 347, №11. – P. 4403–4412.

[2] *Зрум О.В., Скасків О.Б.* Про нерівність Вімана для випадкових цілих функцій від двох змінних // Матем. Студії. – 2005.- Т.23, №2. – С. 142–153.

[3] *Зрум О.В., Скасків О.Б.* Нерівності типу Вімана для цілих функцій від двох комплексних змінних з швидко коливними коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.- мех. поля. – 2005. – Т. 48, №4. – С. 78–87.

[4] *Філевич П.В.* Деякі класи цілих функцій, в яких майже напевне можна покращити нерівність Вімана-Валірона // Матем. Студії. – 1996. – Вип. 6. – С. 59–66.

ADJUSTMENT OF FENTON'S INEQUALITIES FOR ENTIRE FUNCTIONS OF TWO COMPLEX VARIABLES

Oleh SKASKIV, Oleh ZRUM

Ivan Franko Lviv National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

Let $f(z_1,z_2)=\sum\limits_{n+m=0}^{+\infty} a_{n,m}z_1^n z_2^m$, $z=(z_1,z_2)\in\mathbb{C}^2$, be an entire function and $K(f)=\left\{f(z,t)=\sum\limits_{n+m=0}^{+\infty} a_{n,m}e^{2\pi i\theta_{n,m}t} : t\in[0;1]\right\}$, where $(\theta_{n,m})$ is a sequence of positive integer numbers such that its arrangement (θ_k^*) by increasing satisfies the condition $\{\theta_{n,m} : (n,m)\in\mathbb{Z}_+^2\}=\{\theta_k^* : k\geq 0\}$, $\theta_{k+1}^*>\theta_k^*$ $(k\geq 0)$ and $\theta_{k+1}^*/\theta_k^*\geq 1+(ak)^{-\alpha}$, $0\leq\alpha\leq 1/2$.

In this paper, it is established that for all $\varepsilon>0$ almost surely in $K(f)$ there exists a set $E(\varepsilon,t)\subset\mathbb{R}_+^2$, such that for all $r\in\mathbb{R}_+^2\setminus E(\varepsilon,t)$ the inequality

$$M_f(r,t)\leq\mu_f(r)(\ln\mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}}(\ln\ln\mu_f(r))^{\frac{1}{2}+\frac{3\alpha}{2(1+\alpha)}+\delta},$$

holds, where

$$M_f(r,t)=\max\{|f(z,t)| : |z_1|=r_1, |z_2|=r_2\},$$

$$\mu_f(r)=\max\{|a_{n,m}|r_1^n r_2^m : n\geq 0, m\geq 0\},\quad r=(r_1,r_2)\in\mathbb{R}_+^2,$$

and the next asymptotic relation

$$l_2-\operatorname{meas}E_R(\varepsilon,t)\stackrel{\text{def}}{=}\int_{E_R(\varepsilon,t)\cap[1,+\infty)\times[1,+\infty)}\frac{dr}{r}=O(\ln R)\ (R\to+\infty),$$

holds, where $E_R(\varepsilon,t)=E(\varepsilon,t)\cap\Delta_R$, $\Delta_R=\{r\in\mathbb{R}_+^2 : 1\leq r_1\leq R, 1\leq r_2\leq R\}$.