НЕЛОКАЛЬНА ДВОТОЧКОВА ЗАДАЧА ДЛЯ СТРОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

©*2006 р. Володимир ІЛЬКІВ* [1], *Тетяна МАГЕРОВСЬКА* [2]

[1] Національний університет „Львівська політехніка“,
вул. С.Бандери, 12, Львів 79013
[2] Львівський державний університет внутрішніх справ,
вул. Городоцька, 26, Львів 79007

Редакція отримала статтю 22 лютого 2006 р.

У декартовому добутку часового відрізка та просторового багатовимірного тора досліджено задачу з нелокальними двоточковими крайовими умовами за часом для строго гіперболічного рівняння другого порядку зі змінними за часом коефіцієнтами. Встановлено розв'язність задачі у шкалі просторів Соболєва для майже всіх (за винятком множини наперед заданої малої міри) векторів, складених із коефіцієнтів нелокальних умов. Доведено метричну теорему про оцінку знизу малих знаменників, які є нелінійними функціями параметрів задачі.

Нелокальні двоточкові і багатоточкові задачі для рівнянь та систем рівнянь з частинними похідними належать до класу некоректних за Адамаром задач. Ці задачі для безтипних рівнянь, розглядуваних, наприклад, в області $\mathcal{D}^p = \{(t,x) : t \in [0,T], x \equiv (x_1,\dots,x_p) \in \Omega^p_{2\pi}\}$, де $\Omega^p_{2\pi}$ — p-вимірний тор $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})^p$, пов'язані з проблемою малих знаменників [7–12,14,16,17].

На основі метричного підходу у роботах [19, гл. 5], [20, §11, 13] встановлена розв'язність нелокальних задач для рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами у класі просторів Соболєва $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$, $q \in \mathbb{R}$, функцій 2π-періодичних за $x_1,\dots,x_p$. Аналогічні результати отримано також і для інших областей [1,3,6]. У випадку рівнянь, коефіцієнти яких

УДК 517.946+511.37, MSC 2000: 35L20, 35B10

залежать від змінної t, нелокальні задачі, взагалі, не є розв'язними у цій шкалі просторів [13]; шкалою розв'язності цих задач є шкала просторів функцій, коефіцієнти Фур'є яких мають експоненціальну поведінку [15].

У даній роботі показано, що для строго гіперболічних рівнянь другого порядку шкала $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$ є, як і для рівнянь зі сталими коефіцієнтами, шкалою розв'язності двоточкових нелокальних задач для рівнянь зі змінними за аргументом t коефіцієнтами. Раніше деякі нелокальні задачі для гіперболічних рівнянь та систем рівнянь зі сталими коефіцієнтами, факторизованих та деяких інших рівнянь розглядалися у роботах [2,4,5,18].

1. Нехай $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$, $q \in \mathbb{R}$, — гільбертів простір функцій

$$v = v(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widehat{v}_k(t) e^{i(k,x)}, \quad (k,x) = k_1 x_1 + \ldots + k_p x_p,$$

отриманий у результаті поповнення простору скінченних тригонометричних сум $v = \sum\limits_k \widehat{v}_k(t) e^{i(k,x)}$ за нормою

$$\|v; \mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})\| = \Big((2\pi)^p \sum_{k \in \mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{\,2q} |\widehat{v}_k(t)|^2\Big)^{1/2}, \quad \widetilde{k} = (1 + k_1^2 + \cdots + k_p^2)^{1/2};$$

$\mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)$, $l, q \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, — банахів простір функцій $u = u(t,x)$ таких, що $D^j_t u \in \mathbf{C}\big([0,T], \mathbf{H}_{q-lj}(\Omega^p_{2\pi})\big)$ для кожного $j = 0, 1, \ldots, n$; норму в цьому просторі визначимо формулою

$$\|u; \mathbf{H}^n_{l,q}(\mathcal{D}^p)\| = \Big(\sum_{j=0}^n \|D^j_t u; \mathbf{C}\big([0,T], \mathbf{H}_{q-lj}(\Omega^p_{2\pi})\big)\|^2\Big)^{1/2}, \quad D_t = \partial/\partial t.$$

Розглянемо в області $\mathcal{D}^p$ задачу з нелокальними умовами

$$D^2_t u + i a_1(t,D) D_t u - a_2(t,D) u = 0, \qquad i = \sqrt{-1}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned} b_{00}(D)u|_{t=0} + b_{01}(D)D_t u|_{t=0} + c_{00}(D)u|_{t=T} + c_{01}(D)D_t u|_{t=T} = \varphi_0, \\ b_{10}(D)u|_{t=0} + b_{11}(D)D_t u|_{t=0} + c_{10}(D)u|_{t=T} + c_{11}(D)D_t u|_{t=T} = \varphi_1, \end{aligned} \tag{2}$$

де

$$a_1(t,D) = \sum_{|s|=l} a_{1s}(t) D^s, \qquad a_2(t,D) = \sum_{|s|=2l} a_{2s}(t) D^s,$$

$$b_{\alpha\beta}(D) = \sum_{|s| \le (2-\beta)l} b_{\alpha\beta s} D^s, \qquad c_{\alpha\beta}(D) = \sum_{|s| \le (2-\beta)l} c_{\alpha\beta s} D^s,$$

$a_{1s}(t)$ та $a_{2s}(t)$ — неперервно диференційовні на проміжку $[0,T]$ функції, $b_{\alpha\beta s}$ та $c_{\alpha\beta s}$ — комплексні числа з одиничного круга $\mathcal{O}$ із центром у початку координат комплексної площини; $D_j = -i\partial/\partial x_j$, $j = 1,\dots,p$; число l — зведений порядок диференціального рівняння (1).

Строга гіперболічність рівняння (1) означає, що для всіх $\xi \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$ рівняння

$$\lambda^2 + a_1(t,\xi)\lambda + a_2(t,\xi) = 0$$

має два дійсні різні корені.

2. Якщо функція $u = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}^p} u_k(t)e^{i(k,x)}$ є розв'язком задачі (1), (2), то коефіцієнти $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, можна знайти, розв'язуючи таку задачу:

$$u_k''(t) + ia_1(t,k)u_k'(t) - a_2(t,k)u_k(t) = 0, \tag{3}$$

$$\begin{aligned} b_{00}(k)u_k(0) + b_{01}(k)u_k'(0) + c_{00}(k)u_k(T) + c_{01}(k)u_k'(T) = \widehat{\varphi}_0(k),\\ b_{10}(k)u_k(T) + b_{11}(k)u_k'(0) + c_{10}(k)u_k(T) + c_{11}(k)u_k'(T) = \widehat{\varphi}_1(k), \end{aligned} \tag{4}$$

де $\widehat{\varphi}_0(k)$, $\widehat{\varphi}_1(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, — коефіцієнти Фур'є функцій φ_0, φ_1 відповідно.

Через $\lambda_1(t,k)$ та $\lambda_2(t,k)$ позначимо корені рівняння

$$\lambda^2 + \widetilde{a}_1(t,k)\lambda + \widetilde{a}_2(t,k) = 0, \qquad k \neq 0,$$

коефіцієнти $\widetilde{a}_1(t,k) = a_1(t,k/\widetilde{k}\,)$, $\widetilde{a}_2(t,k) = a_2(t,k/\widetilde{k}\,)$ якого є обмеженими функціями. Вважатимемо, що $\lambda_1(t,k) > \lambda_2(t,k)$ і, внаслідок строгої гіперболічності рівняння (1), дістаємо, що для всіх $t \in [0,T]$

$$\min_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}} \big(\lambda_1(t,k) - \lambda_2(t,k)\big) = \lambda(t) \geq d > 0.$$

Відзначимо також, що $\lambda_1(\cdot,k)$ та $\lambda_2(\cdot,k)$ є неперервно диференційовними обмеженими функціями для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$.

Якщо $U_k(t) = \operatorname{col}\big(\widetilde{k}^{\,2l}u_k(t), \widetilde{k}^{\,l}u_k'(t)\big)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, то задачу (3), (4) можна звести до такої задачі:

$$U_k'(t) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \widetilde{a}_2(t,k) & -i\widetilde{a}_1(t,k) \end{pmatrix} U_k(t) = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}^p, \tag{5}$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{b}_{00}(k) & \widetilde{b}_{01}(k) \\ \widetilde{b}_{10}(k) & \widetilde{b}_{11}(k) \end{pmatrix} U_k(0) + \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{00}(k) & \widetilde{c}_{01}(k) \\ \widetilde{c}_{10}(k) & \widetilde{c}_{11}(k) \end{pmatrix} U_k(T) = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $\widetilde{b}_{ij}(k) = b_{ij}(k)\widetilde{k}^{\,(j-2)l}$, $\widetilde{c}_{ij}(k) = c_{ij}(k)\widetilde{k}^{\,(j-2)l}$.

Для невиродженої неперервно диференційовної матриці

$$R_k(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\lambda_1(t,k) & i\lambda_2(t,k) \end{pmatrix}$$

виконуються такі рівності:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \widetilde{a}_2(t,k) & -i\widetilde{a}_1(t,k) \end{pmatrix} R_k(t) = R_k(t) \begin{pmatrix} i\lambda_1(t,k) & 0 \\ 0 & i\lambda_2(t,k) \end{pmatrix},$$

$$\det R_k(t) = -i\big(\lambda_1(t,k) - \lambda_2(t,k)\big),$$

$$R_k^{-1}(t) = \big(\det R_k(t)\big)^{-1} \begin{pmatrix} i\lambda_2(t,k) & -1 \\ -i\lambda_1(t,k) & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_k'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i\lambda_1'(t,k) & i\lambda_2'(t,k) \end{pmatrix},$$

$$R_k^{-1}(t)R_k'(t) = \frac{1}{\lambda_1(t,k) - \lambda_2(t,k)} \begin{pmatrix} \lambda_1'(t,k) & \lambda_2'(t,k) \\ -\lambda_1'(t,k) & -\lambda_2'(t,k) \end{pmatrix},$$

де $R_k'(t) = dR_k(t)/dt$, $\lambda_1'(t,k) = d\lambda_1(t,k)/dt$, $\lambda_2'(t,k) = d\lambda_2(t,k)/dt$, причому

$$\lambda_1'(t,k) = \frac{\widetilde{a}_1'(t,k)\lambda_1(t,k) + \widetilde{a}_2'(t,k)}{\lambda_2(t,k) - \lambda_1(t,k)}, \quad \lambda_2'(t,k) = \frac{\widetilde{a}_1'(t,k)\lambda_2(t,k) + \widetilde{a}_2'(t,k)}{\lambda_1(t,k) - \lambda_2(t,k)}.$$

3. Введемо новий невідомий вектор $Z_k = Z_k(t)$ за формулою

$$U_k(t) = R_k(t)Z_k(t). \tag{7}$$

Підставимо (7) у формули (5) та (6), тоді

$$Z_k'(t) = R_k^{-1}(t) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \widetilde{a}_2(t,k) & -i\widetilde{a}_1(t,k) \end{pmatrix} R_k(t)Z_k(t) - R_k^{-1}(t)R_k'(t)Z_k(t),$$

тобто

$$Z_k'(t) = i \begin{pmatrix} \lambda_1(t,k) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t,k) \end{pmatrix} Z_k(t) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_1(t,k) - \lambda_2(t,k)} \begin{pmatrix} -\lambda_1'(t,k) & -\lambda_2'(t,k) \\ \lambda_1'(t,k) & \lambda_2'(t,k) \end{pmatrix} Z_k(t) \tag{8}$$

і

$$\begin{pmatrix} \widetilde{b}_{00}(k) & \widetilde{b}_{01}(k) \\ \widetilde{b}_{10}(k) & \widetilde{b}_{11}(k) \end{pmatrix} R_k(0)Z_k(0) +$$

$$+\begin{pmatrix}\widetilde{c}_{00}(k) & \widetilde{c}_{01}(k)\\ \widetilde{c}_{10}(k) & \widetilde{c}_{11}(k)\end{pmatrix} R_k(T)Z_k(T)=\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}. \tag{9}$$

Розв'язок Z_k, $k\neq 0$, задачі (8), (9) існує і є єдиним, якщо

$$\det\Delta(k)\neq 0, \tag{10}$$

де

$$\Delta(k)=\begin{pmatrix}\widetilde{b}_{00}(k) & \widetilde{b}_{01}(k)\\ \widetilde{b}_{10}(k) & \widetilde{b}_{11}(k)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\widetilde{c}_{00}(k) & \widetilde{c}_{01}(k)\\ \widetilde{c}_{10}(k) & \widetilde{c}_{11}(k)\end{pmatrix} R_k(T)Y_k(T)R_k^{-1}(0),$$

$Y_k(t)$ — нормальна $\left(Y_k(0)=\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\right)$ фундаментальна матриця розв'язків системи диференціальних рівнянь (8); він зображується формулою

$$Z_k(t)=Y_k(t)R_k^{-1}(0)\Delta^{-1}(k)\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}. \tag{11}$$

Нехай $\|A\|=\sqrt{\operatorname{tr}(A^*A)}$ — евклідова норма матриці A, де A^* — матриця, ермітово спряжена з A, $\operatorname{tr}B$ — слід матриці B. Оцінимо норму $\|Y_k\|$ фундаментальної матриці $Y_k=Y_k(t)$.

Лема 1. *Якщо $\theta(t,k)$ і $-\theta_1(t,k)$, $\theta(t,k)\geq-\theta_1(t,k)$, — власні числа симетричної матриці*

$$\begin{pmatrix}-\lambda_1'(t,k) & \dfrac{\lambda_1'(t,k)-\lambda_2'(t,k)}{2}\\ \dfrac{\lambda_1'(t,k)-\lambda_2'(t,k)}{2} & \lambda_2'(t,k)\end{pmatrix},$$

тобто корені квадратного рівняння

$$\left(\theta+\frac{\lambda_1'(t,k)-\lambda_2'(t,k)}{2}\right)^2=\left(\frac{\lambda_1'(t,k)-\lambda_2'(t,k)}{2}\right)^2+\left(\frac{\lambda_1'(t,k)+\lambda_2'(t,k)}{2}\right)^2,$$

то для довільних $t',t''\in[0,T]$ таких, що $t''>t'$, і для всіх $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$ виконуються нерівності

$$\begin{gathered}\exp\left(-\int_{t'}^{t''}\frac{\theta_1(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\right)\leq\frac{\|Y_k(t'')\|}{\|Y_k(t')\|},\\ \frac{\|Y_k(t'')\|}{\|Y_k(t')\|}\leq\exp\left(\int_{t'}^{t''}\frac{\theta(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\right).\end{gathered} \tag{12}$$

Доведення. Матриця $\operatorname{diag}(i\lambda_1(t,k), i\lambda_2(t,k))$ є косоермітовою, а матриця

$$\frac{1}{\lambda_1(t,k)-\lambda_2(t,k)}\begin{pmatrix} -\lambda_1'(t,k) & -\lambda_2'(t,k) \\ \lambda_1'(t,k) & \lambda_2'(t,k) \end{pmatrix}$$

є дійснозначною для всіх $k \neq 0$ і $t \in [0,T]$, тому формулу (8) можна записати у такому вигляді:

$$Z_k^{*\prime}(t) = -iZ_k^*(t)\begin{pmatrix} \lambda_1(t,k) & 0 \\ 0 & \lambda_2(t,k) \end{pmatrix} +$$

$$+\frac{Z_k^*(t)}{\lambda_1(t,k)-\lambda_2(t,k)}\begin{pmatrix} -\lambda_1'(t,k) & \lambda_1'(t,k) \\ -\lambda_2'(t,k) & \lambda_2'(t,k) \end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Із формули $\left(\|Y_k\|^2\right)' = \operatorname{tr}\left(Y_k^{*\prime}Y_k + Y_k^*Y_k'\right)$ і формул (8) та (13), що справджуються також і для матриці Y_k, отримуємо рівність

$$\left(\|Y_k\|^2\right)' = \frac{1}{\lambda_1(t,k)-\lambda_2(t,k)}\times$$

$$\times \operatorname{tr}\left(Y_k^*\begin{pmatrix} -2\lambda_1'(t,k) & \lambda_1'(t,k)-\lambda_2'(t,k) \\ \lambda_1'(t,k)-\lambda_2'(t,k) & 2\lambda_2'(t,k) \end{pmatrix} Y_k\right),$$

з якої на підставі умов леми отримаємо нерівності

$$\frac{-2\theta_1(t,k)}{\lambda_1(t,k)-\lambda_2(t,k)}\|Y_k\|^2 \leq \left(\|Y_k\|^2\right)' \leq \frac{2\theta(t,k)}{\lambda_1(t,k)-\lambda_2(t,k)}\|Y_k\|^2.$$

Інтегрування на проміжку $[t', t'']$ дає нерівності (12). Лему доведено.

Оскільки $\|Y_k(0)\|^2 = 2$, то з леми 1 випливає, що

$$\begin{aligned} &\exp\left(-2\int_0^t \frac{\theta_1(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\right) \leq \frac{\|Y_k\|^2}{2}, \quad t \in [0,T], \\ &\frac{\|Y_k\|^2}{2} \leq \exp\left(2\int_0^t \frac{\theta(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\right), \quad t \in [0,T]. \end{aligned} \qquad (14)$$

У випадку $k = 0$ задача (5), (6) набуває вигляду

$$U_0'(t) - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_0(t) = 0,$$

$$\begin{pmatrix} b_{000} & b_{010} \\ b_{100} & b_{110} \end{pmatrix} U_0(0) + \begin{pmatrix} c_{000} & c_{010} \\ c_{100} & c_{110} \end{pmatrix} U_0(T) = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(0) \\ \widehat{\varphi}_1(0) \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що

$$U_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix},$$

де сталі C_{01} та C_{02} визначаються із системи лінійних алгебричних рівнянь

$$\begin{pmatrix} b_{000} + c_{000} & b_{010} + c_{000}T + c_{010} \\ b_{100} + c_{100} & b_{110} + c_{100}T + c_{110} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{01} \\ C_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(0) \\ \widehat{\varphi}_1(0) \end{pmatrix},$$

матриця $\Delta(0)$ якої має визначник

$$\det \Delta(0) = T \det \begin{pmatrix} b_{000} & c_{000} \\ b_{100} & c_{100} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} b_{000} + c_{000} & b_{010} + c_{010} \\ b_{100} + c_{100} & b_{110} + c_{110} \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Якщо $\det \Delta(0) = 0$, то задача (5), (6) при $k = 0$ не має розв'язку або має безліч розв'язків; якщо ж $\det \Delta(0) \neq 0$, то

$$U_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Delta^{-1}(0) \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(0) \\ \widehat{\varphi}_1(0) \end{pmatrix} \tag{16}$$

є єдиним розв'язком задачі (5), (6).

Теорема 1. *Якщо* $\det \Delta(0) \neq 0$ *і коефіцієнти Фур'є* $\widehat{\varphi}_0(k)$ *та* $\widehat{\varphi}_1(k)$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$, *задовольняють умову*

$$\left\| \Delta^{-1}(k) \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix} \right\| \leq C_1 \widetilde{k}^{\,\sigma}, \tag{17}$$

де $C_1 > 0$, $\sigma \in \mathbb{R}$, *— деякі сталі, що не залежать від* k, *то у шкалі просторів Соболєва існує єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$ *задачі* (1), (2), *для якого при всіх* $t \in [0,T]$ *справджуються такі включення:*

$$u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega^p_{2\pi}),\ \ D_t u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma_1 - l}(\Omega^p_{2\pi}),\ \ D_t^2 u(t,\cdot) \in \mathbf{H}_{\sigma_1 - 2l}(\Omega^p_{2\pi}), \tag{18}$$

де $\sigma_1 < 2l - \sigma - p/2$.

Доведення. Умова $\det \Delta(0) \neq 0$ та умова (17) гарантують існування та єдиність розв'язків $U_k(t)$ задач (5), (6) для всіх $k \in \mathbb{Z}^p$. Із формул (7), (11) випливає рівність

$$U_k(t) = R_k(t) Y_k(t) R_k^{-1}(0) \Delta^{-1}(k) \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix},$$

з якої, використовуючи умову гіперболічності та обмеженість матриць $R_k(t)$ та $R_k^{-1}(0)$, а саме $\|R_k(t)\| \leq C_2$ та $\|R_k^{-1}(0)\| \leq C_2/d$, маємо формулу

$$\left(\widetilde{k}^{\,4l} |u_k(t)|^2 + \widetilde{k}^{\,2l} |u_k'(t)|^2\right)^{1/2} \leq \frac{C_2^2}{d} \|Y_k(t)\| \left\| \Delta^{-1}(k) \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix} \right\|, \qquad k \neq 0.$$

Враховуючи оцінку (14), встановлюємо нерівність

$$\left(\widetilde{k}^{4l}|u_k(t)|^2+\widetilde{k}^{2l}|u_k'(t)|^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le\frac{\sqrt{2}C_2^2}{d}\exp\left(\int_0^t\frac{\theta(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\right)\left\|\Delta^{-1}(k)\begin{pmatrix}\widehat{\varphi}_0(k)\\ \widehat{\varphi}_1(k)\end{pmatrix}\right\|, \qquad (19)$$

а також (згідно з умовою (17)) нерівність

$$\max\left(\widetilde{k}^{2\sigma_1}|u_k(t)|^2,\widetilde{k}^{2\sigma_1-2l}|u_k'(t)|^2\right)\le$$
$$\le\widetilde{k}^{2(\sigma_1-2l)}\left(\widetilde{k}^{4l}|u_k(t)|^2+\widetilde{k}^{2l}|u_k'(t)|^2\right)\le$$
$$\le\frac{2C_1^2C_2^4}{d^2}\exp\left(2\int_0^t\frac{\theta(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\right)\widetilde{k}^{2(\sigma_1-2l+\sigma)}. \qquad (20)$$

Підсумовуючи нерівності (20) за $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}$ та враховуючи доданок, який відповідає $k=0$, отримаємо оцінки для норми розв'язку

$$\|u(t,\cdot);\mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2\le$$

$$\le|u_0(t)|^2+\frac{2C_1^2C_2^4}{d^2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\exp\left(2\int_0^t\frac{\theta(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\right)\widetilde{k}^{2(\sigma_1-2l+\sigma)}.$$

Оскільки $\theta(t,k)\le C_3$, то

$$\int_0^t\frac{\theta(\tau,k)d\tau}{\lambda_1(\tau,k)-\lambda_2(\tau,k)}\le\frac{C_3}{d}t,$$

а, отже,

$$\|u(t,\cdot);\mathbf{H}_{\sigma_1}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2\le|u_0(t)|^2+\frac{2C_1^2C_2^4}{d^2}\exp\left(\frac{C_3}{d}t\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{2(\sigma_1-2l+\sigma)}.$$

Аналогічна оцінка справджується для норми $\|D_tu(t,\cdot);\mathbf{H}_{\sigma_1-l}(\Omega_{2\pi}^p)\|$:

$$\|D_tu(t,\cdot);\mathbf{H}_{\sigma_1-l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2\le|u_0'(t)|^2+\frac{2C_1^2C_2^4}{d^2}\exp\left(\frac{C_3}{d}t\right)\sum_{k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{0\}}\widetilde{k}^{2(\sigma_1-2l+\sigma)}.$$

Із рівності $u_k''(t)=\widetilde{a}_2(t,k)\widetilde{k}^{2l}u_k(t)-i\widetilde{a}_1(t,k)\widetilde{k}^{l}u_k'(t)$ та збіжності ряду $\sum\widetilde{k}^{2(\sigma_1-2l+\sigma)}$ випливає включення (18). Теорему доведено.

4. Проаналізуємо умову (17) для того, щоб сформулювати умови існування розв'язку задачі (1), (2) в термінах гладкості функцій φ_0 та φ_1, тобто в термінах належності функцій φ_0 і φ_1 до просторів $\mathbf{H}_q(\Omega^p_{2\pi})$ при деяких значеннях параметра $q \in \mathbb{R}$.

Нехай $\psi_{ij}(k)$ — елементи матриці $\Delta(k)$, а саме

$$\Delta(k) = \begin{pmatrix} \psi_{00}(k) & \psi_{01}(k) \\ \psi_{10}(k) & \psi_{11}(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{b}_{00}(k) & \widetilde{b}_{01}(k) \\ \widetilde{b}_{10}(k) & \widetilde{b}_{11}(k) \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \widetilde{c}_{00}(k) & \widetilde{c}_{01}(k) \\ \widetilde{c}_{10}(k) & \widetilde{c}_{11}(k) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_{00}(k) & \Phi_{01}(k) \\ \Phi_{10}(k) & \Phi_{11}(k) \end{pmatrix},$$

де

$$\begin{pmatrix} \Phi_{00}(k) & \Phi_{01}(k) \\ \Phi_{10}(k) & \Phi_{11}(k) \end{pmatrix} = R_k(T) Y_k(T) R_k^{-1}(0).$$

Тоді

$$\psi_{ij}(k) = \widetilde{b}_{ij}(k) + \widetilde{c}_{i0}(k)\Phi_{0j}(k) + \widetilde{c}_{i1}(k)\Phi_{1j}(k), \qquad i = 0,1, \quad j = 0,1,$$

і $\det \Delta(k) = \psi_{00}(k)\psi_{11}(k) - \psi_{01}(k)\psi_{10}(k)$.

Позначимо через $\Phi(k)$ максимальне серед чисел $|\Phi_{00}(k)|$, $|\Phi_{01}(k)|$, $|\Phi_{10}(k)|$, $|\Phi_{11}(k)|$ та одиниці. Оцінюючи модуль величин $\psi_{ij}(k)$ та враховуючи, що $b_{\alpha\beta s}$ та $c_{\alpha\beta s} \in \mathcal{O}$, маємо

$$|\psi_{ij}(k)| \le \left(2\binom{2l+p}{2l} + \binom{l+p}{l} \right) \Phi(k) \equiv C_4 \Phi(k);$$

тому для вектора

$$\Delta^{-1}(k) \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix} = \frac{1}{\det \Delta(k)} \begin{pmatrix} \psi_{11}(k)\widehat{\varphi}_0(k) - \psi_{01}(k)\widehat{\varphi}_1(k) \\ -\psi_{10}(k)\widehat{\varphi}_0(k) - \psi_{00}(k)\widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix}$$

справджується нерівність

$$\left\| \Delta^{-1}(k) \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix} \right\| \le \frac{\sqrt{2} C_4}{|\det \Delta(k)/\Phi(k)|} \left\| \begin{pmatrix} \widehat{\varphi}_0(k) \\ \widehat{\varphi}_1(k) \end{pmatrix} \right\|. \tag{21}$$

Знаменники у формулі (21) — дроби $\det \Delta(k)/\Phi(k)$ — є функціями коефіцієнтів рівняння (1), від яких залежать $\Phi_{ij}(k)$ та функціями коефіцієнтів нелокальних умов (2); причому елементи матриці $\Delta(k)$ лінійно залежать від коефіцієнтів умов (2). Ці знаменники для деяких наборів коефіцієнтів задачі (1), (2) можуть бути як завгодно малими, тому розв'язність задачі (1), (2) пов'язана з проблемою малих знаменників і оцінкою їх знизу.

Для оцінювання малих знаменників використовуємо метричний підхід [13]; при цьому фіксуємо коефіцієнти рівняння (1) та більшу частину коефіцієнтів умов (2), а саме: не фіксованими (вільними) вважаємо коефіцієнти при старших похідних $D_\alpha^{2l}u|_{t=0}$, які позначимо $w_{i0\alpha}^0$, та при похідних $D_\alpha^l D_t u|_{t=0}$, які позначимо $w_{i1\alpha}^0$, $i = 0, 1$, $\alpha = 1, \ldots, p$; аналогічно, коефіцієнти при похідних $D_\alpha^{2l}u|_{t=T}$ та $D_\alpha^l D_t u|_{t=T}$ позначимо $w_{ij\alpha}^T$ і вважаємо їх вільними. Із цих $8p$ коефіцієнтів та коефіцієнтів b_{000} і b_{110} утворимо вектор $w \in \mathcal{O}^{8p+2}$.

Розіб'ємо множину $\mathbb{Z}^p \setminus \{0\}$ на p підмножин $K_1, \ldots, K_p$, де

$$K_1 = \{k \in \mathbb{Z}^p : |k_1| = \max(|k_1|, \ldots, |k_p|)\},$$

$$K_\alpha = \{k \in \mathbb{Z}^p : |k_\alpha| = \max(|k_1|, \ldots, |k_p|),\ |k_\alpha| > \max(|k_1|, \ldots, |k_{\alpha-1}|)\},$$

де $\alpha = 2, \ldots, p$. Через $W_\varepsilon(k)$, $0 < \varepsilon < 1$, позначимо множину векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2}$ таких, що

$$\frac{|\det \Delta(k)|}{\Phi(k)} < \varepsilon C_5 \widetilde{k}^{-\beta}, \tag{22}$$

де $\Phi(0) = 1$, а через W_ε — множину $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}^p} W_\varepsilon(k)$. Множина W_ε — це множина векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2}$, для яких нерівність (22) виконується принаймні один раз на множині $\mathbb{Z}^p$. Оцінимо міру множини W_ε.

Для $k = 0$ визначник матриці $\Delta(k)$ можна подати у вигляді

$$\det \Delta(0) = \det \left(\begin{pmatrix} b_{000} & b_{010} \\ b_{100} & b_{110} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_{000} & c_{000}T + c_{010} \\ c_{100} & c_{100}T + c_{110} \end{pmatrix} \right) =$$

$$= \det \left(\begin{pmatrix} b_{000} & b_{010} \\ b_{100} & b_{110} \end{pmatrix} + \widetilde{\Delta}(k) \right), \tag{23}$$

а для ненульових $k \in K_\alpha$, $\alpha = 1, \ldots, p$, у випадках, коли $\Phi(k)$ відповідно дорівнює 1, $|\Phi_{00}(k)|$, $|\Phi_{01}(k)|$, $|\Phi_{10}(k)|$, $|\Phi_{11}(k)|$, маємо рівності

$$\det \Delta(k) = \left(\frac{k_\alpha}{\widetilde{k}}\right)^{3l} \det \left(\begin{pmatrix} w_{00\alpha}^0 & w_{01\alpha}^0 \\ w_{10\alpha}^0 & w_{11\alpha}^0 \end{pmatrix} + \widetilde{\Delta}(k) \right), \tag{24}$$

$$\frac{\det \Delta(k)}{\Phi_{00}(k)} = \left(\frac{k_\alpha}{\widetilde{k}}\right)^{3l} \det \left(\begin{pmatrix} w_{00\alpha}^T & w_{01\alpha}^0 \\ w_{10\alpha}^T & w_{11\alpha}^0 \end{pmatrix} + \widetilde{\Delta}(k) \right), \tag{25}$$

$$\frac{\det \Delta(k)}{\Phi_{01}(k)} = \left(\frac{k_\alpha}{\widetilde{k}}\right)^{4l} \det \left(\begin{pmatrix} w_{00\alpha}^0 & w_{00\alpha}^T \\ w_{10\alpha}^0 & w_{10\alpha}^T \end{pmatrix} + \widetilde{\Delta}(k) \right), \tag{26}$$

$$\frac{\det \Delta(k)}{\Phi_{10}(k)} = \left(\frac{k_\alpha}{\widetilde{k}}\right)^{2l} \det \left(\begin{pmatrix} w_{01\alpha}^T & w_{01\alpha}^0 \\ w_{11\alpha}^T & w_{11\alpha}^0 \end{pmatrix} + \widetilde{\Delta}(k) \right), \tag{27}$$

$$\frac{\det\Delta(k)}{\Phi_{11}(k)} = \left(\frac{k_\alpha}{\widetilde{k}}\right)^{3l} \det\left(\begin{pmatrix} w^0_{00\alpha} & w^T_{01\alpha} \\ w^0_{10\alpha} & w^T_{11\alpha} \end{pmatrix} + \widetilde{\Delta}(k) \right). \tag{28}$$

Праві частини рівностей (23)–(28) мають вигляд

$$\delta_1(k)\det\left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1(k) & Y_2(k) \\ Y_3(k) & Y_4(k) \end{pmatrix} \right),$$

де $(p+1)^{-2l} \le |\delta_1(k)| \le 1$, y_1, y_2, y_3, y_4 є елементами вектора w, а $Y_1(k)$, $Y_2(k)$, $Y_3(k)$, $Y_4(k)$ є елементами матриці $\widetilde{\Delta}(k)$ і не залежать від y_1, y_2, y_3 та y_4. Оцінимо міру множини $W_\varepsilon(k)$ векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2}$, що задовольняють нерівність (22), тобто нерівність

$$\frac{|\det\Delta(k)|}{\Phi(k)} = |\delta_1(k)| \left| \det\left(\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1(k) & Y_2(k) \\ Y_3(k) & Y_4(k) \end{pmatrix} \right) \right| < \delta(k).$$

де $\delta(k) = \varepsilon C_5 \widetilde{k}^{\,-\beta}$. Оскільки при $y_4 + Y_4(k) \ne 0$

$$\frac{|\det\Delta(k)|}{\Phi(k)} = |\delta_1(k)| |y_4 + Y_4(k)| \left| y_1 + Y_1(k) - \frac{(y_2 + Y_2(k))(y_3 + Y_3(k))}{y_4 + Y_4(k)} \right|,$$

то $W_\varepsilon(k) \subset W'_\varepsilon(k) \cup W''_\varepsilon(k)$, де $W'_\varepsilon(k)$ — множина векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2}$, для яких

$$\sqrt{|\delta_1(k)|}\, |y_4 + Y_4(k)| < \sqrt{\delta(k)}, \tag{29}$$

а $W''_\varepsilon(k)$ — множина векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2} \setminus W'_\varepsilon(k)$, для яких

$$\sqrt{|\delta_1(k)|} \left| y_1 + Y_1(k) - \frac{(y_2 + Y_2(k))(y_3 + Y_3(k))}{y_4 + Y_4(k)} \right| < \sqrt{\delta(k)}. \tag{30}$$

Позначимо $W'_\varepsilon(k, w')$ — множину $y_4 \in \mathcal{O}$, для яких виконується (29) при інших фіксованих елементах вектора w, які утворюють вектор w'; аналогічно $W''_\varepsilon(k, w'')$ — множина $y_1 \in \mathcal{O}$, для яких виконується (30) при фіксованому векторі w'' інших коефіцієнтів вектора w. Тоді $W'_\varepsilon(k, w')$ та $W''_\varepsilon(k, w'')$ є частинами кругів радіуса $\sqrt{\delta(k)/|\delta_1(k)|}$ і мають міри

$$\operatorname{mes} W'_\varepsilon(k, w') < \pi\delta(k)/|\delta_1(k)|, \quad \operatorname{mes} W''_\varepsilon(k, w'') < \pi\delta(k)/|\delta_1(k)|.$$

Інтегрування цих нерівностей по області $\mathcal{O}^{8p+1}$ дає оцінку

$$\max\left(\operatorname{mes} W'_\varepsilon(k), \operatorname{mes} W''_\varepsilon(k)\right) < \pi^{8p+2}\delta(k)/|\delta_1(k)|.$$

Отже, $\operatorname{mes} W_\varepsilon(k) < 2\pi^{8p+2}\delta(k)/|\delta_1(k)| \le 2(p+1)^{2l}\pi^{8p+2}\delta(k)$, а тому

$$\operatorname{mes} W_\varepsilon \le \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \operatorname{mes} W_\varepsilon(k) < 2\varepsilon C_5 (p+1)^{2l} \pi^{8p+2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^p} \widetilde{k}^{\,-\beta}.$$

Якщо $\beta > p$ і стала $C_5 > 0$ визначається рівністю

$$C_5 = \Big(2(p+1)^{2l}\pi^{8p+2}\sum_{k\in\mathbb{Z}^p}\widetilde{k}^{-\beta}\Big)^{-1} > 0,$$

то з попередньої нерівності отримуємо оцінку $\operatorname{mes} W_\varepsilon < \varepsilon$.

З наведених міркувань та отриманих нерівностей випливає наступне твердження про оцінку знизу малих знаменників.

Лема 2. *Для довільних ε, $0 < \varepsilon < 1$, та β, $\beta > p$, існує така множина $W_\varepsilon \subset \mathcal{O}^{8p+2}$, що $\operatorname{mes} W_\varepsilon < \varepsilon$ і для всіх векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2}\setminus W_\varepsilon$ виконується оцінка*

$$\frac{|\det\Delta(k)|}{\Phi(k)} \geq \varepsilon C_5\widetilde{k}^{-\beta}, \quad k\in\mathbb{Z}^p. \tag{31}$$

Наступна теорема встановлює розв'язність задачі (1), (2) у шкалі просторів $\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$.

Теорема 2. *Нехай числа ε, β і множина W_ε є такими, як у лемі 2. Якщо $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathbf{H}_\beta(\Omega_{2\pi}^p)$, то для всіх векторів $w \in \mathcal{O}^{8p+2}\setminus W_\varepsilon$ існує єдиний розв'язок u задачі* (1), (2), *причому для всіх $t\in[0,T]$ виконуються включення $u(t,\cdot)\in\mathbf{H}_{2l}(\Omega_{2\pi}^p)$, $D_tu(t,\cdot)\in\mathbf{H}_l(\Omega_{2\pi}^p)$ і справджуються оцінки*

$$\begin{aligned}\|u(t,\cdot);\mathbf{H}_{2l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 &\leq \frac{C_6}{\varepsilon}e^{2C_3t/d}\big(\|\varphi_0;\mathbf{H}_\beta(\Omega_{2\pi}^p)\|^2+\|\varphi_1;\mathbf{H}_\beta(\Omega_{2\pi}^p)\|^2\big),\\ \|D_tu(t,\cdot);\mathbf{H}_{l}(\Omega_{2\pi}^p)\|^2 &\leq \frac{C_6}{\varepsilon}e^{2C_3t/d}\big(\|\varphi_0;\mathbf{H}_\beta(\Omega_{2\pi}^p)\|^2+\|\varphi_1;\mathbf{H}_\beta(\Omega_{2\pi}^p)\|^2\big).\end{aligned} \tag{32}$$

Доведення. Для довільного вектора $w\in\mathcal{O}^{8p+2}\setminus W_\varepsilon$ справджується оцінка (31), тому з формул (16) та (19) для всіх $k\in\mathbb{Z}^p$ випливає оцінка

$$\max\big(\widetilde{k}^{4l}|u_k(t)|^2+\widetilde{k}^{2l}|u_k'(t)|^2\big) \leq \frac{C_6}{\varepsilon}e^{2C_3t/d}\widetilde{k}^{2\beta}\big(|\widehat{\varphi}_0(k)|^2+|\widehat{\varphi}_1(k)|^2\big), \tag{33}$$

де стала C_6 залежить тільки від сталих C_2, C_4, C_5, T та d і не залежить від ε, β та k. Підсумовуючи нерівності (33) за $k\in\mathbb{Z}^p$, отримуємо нерівності (32) і доведення теореми.

Зауважимо, що якщо в умовах теореми функції φ_0, φ_1 належать до простору $\mathbf{H}_{q-2l+\beta}(\Omega_{2\pi}^p)$, то для всіх $t\in[0,T]$ для розв'язку $u(t,x)$ виконуються включення $u(t,\cdot)\in\mathbf{H}_q(\Omega_{2\pi}^p)$, $D_tu(t,\cdot)\in\mathbf{H}_{q-l}(\Omega_{2\pi}^p)$, де $q\in\mathbb{R}$.

Теорема 3. *Якщо* $\varphi_0, \varphi_1 \in \mathbf{H}_{q-2l+\beta}(\Omega^p_{2\pi})$, *де* $\beta > p$, $q \in \mathbb{R}$, *то для всіх векторів* $w \in \mathcal{O}^{8p+2} \setminus W_\varepsilon$, $\operatorname{mes} W_\varepsilon < \varepsilon$, *існує єдиний розв'язок* $u = u(t,x)$ *задачі* (1), (2) *з простору* $\mathbf{H}^2_{l,q}(\mathcal{D}^p)$ *і*

$$\|u; \mathbf{H}^2_{l,q}(\mathcal{D}^p)\|^2 \leq C_7\big(\|\varphi_0; \mathbf{H}_{q-2l+\beta}(\Omega^p_{2\pi})\|^2 + \|\varphi_1; \mathbf{H}_{q-2l+\beta}(\Omega^p_{2\pi})\|^2\big), C_7 > 0.$$

5. Таким чином, в рамках метричного підходу задача із загальними двоточковими нелокальними умовами (2) для гіперболічного рівняння другого порядку (1) з неперервними за t коефіцієнтами є розв'язною у шкалі соболєвських просторів періодичних за змінною x функцій. Нелокальні задачі для безтипних рівнянь зі сталими коефіцієнтами також володіють цією властивістю на противагу до рівнянь зі змінними за t коефіцієнтами.

Отримані у цій роботі результати можуть бути поширені на гіперболічні рівняння вищого порядку та гіперболічні системи рівнянь.

[1] *Гой Т.П.* Задача з нелокальними умовами для рівняння з частинними похідними, збуреного нелінійним інтегро-диференціальним доданком // Мат. студії. Праці Львів. мат. т-ва. – 1997. – **8**, № 1. – С. 71–78.

[2] *Гой Т.П.* Нелокальна крайова задача для слабко нелінійного гіперболічного рівняння // VI-а Міжнар. наук. конф. ім. М. Кравчука: Матеріали конф. (Київ, 15–17. 05. 1997). – К., 1997. – С. 108.

[3] *Гой Т.П., Поліщук В.М., Пташник Б.Й.* Нелокальна двоточкова крайова задача для гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами в циліндричній області // Математичні методи в науково-технічних дослідженнях. – К.: Ін-т математики НАН України. – 1996. – С. 62–70.

[4] *Гой Т.П., Пташник Б.Й.* Задача з нелокальними умовами для слабко нелінійного гіперболічного рівняння зі сталими коефіцієнтами // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения. – К.: Ин-т мат. НАН Украины. – 1996. – С. 74–76.

[5] *Гой Т.П., Пташник Б.Й.* Задача з нелокальними умовами для слабконелінійних гіперболічних рівнянь // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 2. – С. 186–195.

[6] *Гой Т.П., Пташник Б.Й.* Нелокальні крайові задачі для систем лінійних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 11. – С. 1478–1487.

[7] *Илькив В.С.* Нелокальная задача для линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // „Материалы 7-й конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР". – Львов, 1980. – С. 80–84. – Деп. в ВИНИТИ, № 1379–81.

[8] *Илькив В.С.* Нелокальная краевая задача для дифференциального уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 5. – С. 15–19.

[9] *Илькив В.С.* Многоточечная нелокальная задача для дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами // Материалы IX конф. мол. ученых Ин-та прикл. пробл. мех. и мат. АН УССР, ч. II (Львов, 10–14 мая 1982 г.), Львов, 1983. – С. 64–72. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 10 января 1984 г., № 324–84 Деп).

[10] *Илькив В.С.* Многоточечная нелокальная задача для уравнений с частными производными // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 3. – С. 487–492.

[11] *Ільків В.С.* Продовження за часовою змінною розв'язку нелокальної багатоточкової задачі для диференціального рівняння з частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1998. – **41**, № 4. – С. 78–82.

[12] *Ільків В.С.* Нелокальна крайова задача для нормальних анізотропних систем із частинними похідними і сталими коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1999. – Вип. 54. – С. 96–107.

[13] *Ільків В.С.* Нелокальна крайова задача для неоднорідної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними та змінними коефіцієнтами // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 58. – С. 139–143.

[14] *Ільків В.С.* Нелокальна крайова задача для систем із частинними похідними в анізотропних просторах // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – № 11. – С. 57–64.

[15] *Ільків В.С.* Багатоточкова нелокальна неоднорідна задача для систем рівнянь з частинними похідними зі змінними за t коефіцієнтами // Мат. вісник НТШ. – 2004. – **1**. – С. 47–58.

[16] *Илькив В.С., Полищук В.Н.* Краевая задача с нелокальными условиями для дифференциальных операторов с постоянными действительными коэффициентами // Питання якісної теорії диференціальних рівнянь та їх застосування. – К., 1978. – С. 15–16.

[17] *Ільків В.С., Пташник Б.Й.* Зображення та дослідження розв'язків нелокальної задачі для систем диференціальних рівнянь з частинними похідними // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 2. – С. 184–194.

[18] *Полищук В.Н.* Задача с нелокальными краевыми условиями для гиперболических уравнений с переменными коэффициентами // Приближенные и качественные методы теории дифференциальных и дифференциально-функциональных уравнений. – К.: Наук. думка. – 1979. – С. 54–65.

[19] *Пташник Б.И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.

[20] *Пташник Б.Й., Ільків В.С., Кміть І.Я., Поліщук В.М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

NONLOCAL TWO-POINT PROBLEM FOR SECOND ORDER STRONG HYPERBOLIC EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENTS

Volodymyr IL'KIV [1], *Tetyana MAHEROVSKA* [2]

[1] Lviv Polytechnic National University,
12 S.Bandery Str., Lviv 79013, Ukraine
[2] Lviv State University of Internal Affairs,
26 Horodots'ka Str., Lviv 79007, Ukraine

We consider the problem with nonlocal two-point boundary conditions for second order in time strictly hyperbolic equation with variable coefficients in Cartesian product of the time interval and the spatial multidimensional torus. We establish the solvability of this problem in the Sobolev spaces scale for almost all (except for the set of a given small measure) vectors of coefficients in the nonlocal conditions. We prove the metric theorem of the lower estimation of small (nonlinear) denominators of the problem.