ГЕОДЕЗІЙНО ЗВ'ЯЗНІ ПРОСТОРИ І РІВНОМІРНА ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЙ ПЕРШОГО КЛАСУ БЕРА

©*2007 р. Олена КАРЛОВА, Володимир МАСЛЮЧЕНКО, Олександр МАСЛЮЧЕНКО*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 6 липня 2007 р.

Запроваджено поняття сильно геодезійно зв'язного простору; показано, що рівномірна границя відображень першого класу Бера зі значеннями в сильно геодезійно зв'язному метричному просторі Y зі своєю геодезійною метрикою ϱ належить до першого класу Бера, якщо простір (Y,ϱ) є скінченно компактним.

1. У праці [2] було введено поняття R-простору і показано, що рівномірна границя відображень першого класу Бера зі значеннями в R-просторі залишається першого класу Бера. Нагадаємо, що *R-простір* — це такий метричний простір (X,d), в якому для кожного $\varepsilon > 0$ існує *ε-ретракція*, тобто неперервне відображення $\gamma_\varepsilon : X^2 \to X$, таке, що $\gamma_\varepsilon(x,y) = x$ при $d(x,y) \le \varepsilon$ і $d(\gamma_\varepsilon(x,y),y) \le \varepsilon$ для будь-яких $x,y \in X$.

Такі ретракції легко будувати на нормованому просторі X, покладаючи $\gamma_\varepsilon(x,y) = x$ при $\|x-y\| \le \varepsilon$ і $\gamma_\varepsilon(x,y) = y + \frac{\varepsilon}{\|x-y\|}(x-y)$ при $\|x-y\| \ge \varepsilon$. Крім того, в [2] був побудований ще один спеціальний R-простір Z, який пізніше в [3] дістав назву „гірлянда“ через свою геометричну структуру, бо складався з прямої F у просторі $\mathbb{R}^{2n+2}$ і причеплених до неї кулеподібних множин W_n, де $n \in \mathbb{N}$. На просторі Z вводилася природна метрика ϱ, яка, як було помічено пізніше, була такою, що $\varrho(u,v)$ — це найкоротша відстань від точки u до точки v у межах простору Z, тобто довжина геодезійної лінії в Z, що з'єднує u і v. Таким чином, з'ясувалося, що метрика ϱ на Z — це добре відома в геометрії [4] геодезійна метрика, і

УДК 517.51, MSC 2000: 54C30, 54E35

природно постало питання: коли простір з геодезійною метрикою є R-простором? У цій статті ми запроваджуємо поняття сильно геодезійно зв'язного простору, який характеризується тим, що будь-які його точки зв'язуються лише одною геодезійною лінією, і показуємо, що сильно геодезійно зв'язний метричний простір X зі своєю геодезійною метрикою ϱ буде R-простором, якщо простір (X, ϱ) є скінченно компактним [1, с. 18].

2. Нехай (X, d) — метричний простір і $a, b \in X$. Неперервне відображення $\omega : [\alpha, \beta] \to X$, для якого $\omega(\alpha) = a$ і $\omega(\beta) = b$, називається *шляхом в X, який з'єднує точки a і b*. Кожному розбиттю $T : t_o = \alpha < t_1 < \cdots < t_n = \beta$ співставимо число

$$\lambda(\omega, T) = \sum_{k=1}^{n} d(\omega(t_{k-1}), \omega(t_k)).$$

Точна верхня межа множини таких чисел $\lambda(\omega, T)$, де T пробігає сукупність всіх розбиттів відрізка $[\alpha, \beta]$ називається *довжиною шляху* ω і позначається символом $\ell(\omega)$. Якщо $\ell(\omega) < +\infty$, то шлях називається *спрямним* [1, с. 33].

Кожний спрямний шлях ω допускає еквівалентну натуральну параметризацію $\omega_o : [0, \ell(\omega)] \to X$, у якої параметром служить довжина $s = \lambda(t) = \ell(\omega|_{[\alpha,t]})$. Вона пов'язана зі шляхом ω співвідношенням $\omega_o \circ \lambda = \omega$, яким визначається однозначно, і називається *стандартним зображенням спрямного шляху* ω [1, с. 36]. Спрямні шляхи ω_1 і ω_2, які мають одне і те ж стандартне зображення називаються *еквівалентними*, а клас $\widehat{\omega}$ еквівалентних до шляху ω шляхів – *спрямною кривою*. Оскільки еквівалентні шляхи мають однакову довжину, то формулою $\ell(\widehat{\omega}) = \ell(\omega)$ визначається довжина спрямної кривої $\widehat{\omega}$ [1, с. 39].

Сукупність усіх спрямних шляхів, що з'єднують точки a і b, позначимо через $S(a, b)$. Шлях $\omega_o \in S(a, b)$ називається *геодезійним*, якщо $\ell(\omega_o) \leq \ell(\omega)$ для кожного $\omega \in S(a, b)$. Сукупність всіх геодезійних шляхів з a у b позначимо через $S_o(a, b)$.

Простір X назвемо *геодезійно зв'язним*, якщо $S_o(x, y) \neq \emptyset$ для будь-яких точок $x, y \in X$. На геодезійно зв'язному просторі X формулою $\rho(x, y) = \ell(\omega)$, де $\omega \in S_o(x, y)$, коректним чином визначається метрика, яка називається *геодезійною.*

Перевіримо нерівність трикутника для функції ρ. Нехай $x, y, z \in X$ і позначимо через ω_i при $i = 1, 2, 3$ геодезійні шляхи $\omega_1 \in S_o(x, y)$, $\omega_2 \in S_o(y, z)$ і $\omega_3 \in S_o(x, z)$. Будемо вважати, що параметр кожної геодезійної пробігає відрізок $[0, 1]$. Розглянемо шлях $\omega : [0, 1] \to X$, який визначається формулами $\omega(t) = \omega_1(2t)$ при $t \in [0, \frac{1}{2}]$ і $\omega(t) = \omega_2(2t-1)$ при $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. Тоді

$$\rho(x, y) + \rho(y, z) = \ell(\omega_1) + \ell(\omega_2) = \ell(\omega) \geq \ell(\omega_3) = \rho(x, z).$$

Інші властивості метрики очевидні.

Зауважимо, що для довільних $x, y \in X$ маємо $d(x, y) \leq \rho(x, y)$, отже, топологія, що породжується метрикою ρ сильніша за топологію, що породжується метрикою d, причому може виявитися і строго сильнішою.

3. Метричний простір називається *скінченно компактним* [1, с. 18], якщо в ньому кожна замкнена куля є компактною множиною. Геодезійно зв'язний простір X називається *сильно геодезійно зв'язним*, якщо множина $\widehat{S}_o(x, y) = \{\widehat{\omega} : \omega \in S_o(x, y)\}$ складається з одного елемента $\widehat{\omega}_{x,y}$. При цьому будемо вважати, що параметр шляху $\omega_{x,y}$ — натуральний. Визначимо відображення $\gamma : X \times X \times [0, 1] \to X$ формулою

$$\gamma(x, y, t) = \omega_{x,y}(t\rho(x, y)),$$

де $x, y \in X$, $t \in [0, 1]$.

Теорема. *Нехай X — сильно геодезійно зв'язний метричний простір, ρ — його геодезійна метрика і простір (X, ρ) скінченно компактний. Тоді*

а) відображення $\gamma : X \times X \times [0, 1] \to X$ неперервне відносно геодезійної метрики ρ;

б) (X, ρ) є R-простором.

Доведення. а) Розглянемо на просторі $C([0, 1], X)$ всіх неперервних функцій $\omega : [0, 1] \to X$ максимум-метрику

$$\delta(\omega', \omega'') = \max_{0 \leq t \leq 1} \rho(\omega'(t), \omega''(t)).$$

Співставимо відображенню γ асоційоване з ним відображення $\varphi : X^2 \to C([0, 1], X)$, яке визначається формулою $\varphi(x, y) = \gamma(x, y, \cdot)$. Доведемо, що відображення φ неперервне відносно метрики δ.

Нехай $x, y \in X$, $x_n \xrightarrow{\rho} x$ і $y_n \xrightarrow{\rho} y$. Позначимо $\omega_n = \varphi(x_n, y_n)$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і $\omega = \varphi(x, y)$. Доведемо, що $\omega_n \xrightarrow{\delta} \omega$, тобто, що $\delta(\omega_n, \omega) \to 0$ при $n \to \infty$. Нехай це не так. Тоді для деякого $\varepsilon > 0$ виконується нерівність $\delta(\omega_n, \omega) \geq \varepsilon$ для всіх n з деякої нескінченної множини $I \subseteq \mathbb{N}$.

Покажемо, що сім'я $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ має граничну точку в $C([0, 1], X)$. Для цього застосуємо теорему Асколі [5, с. 647]. Зауважимо, що для довільних t' і t'' з $[0, 1]$

$$\rho(\omega_n(t'), \omega_n(t'')) = \ell(\omega_n)|t' - t''| = \rho(x_n, y_n)|t' - t''|. \qquad (*)$$

Оскільки $x_n \xrightarrow{\rho} x$ і $y_n \xrightarrow{\rho} y$, то $\rho(x_n, y_n) \to \rho(x, y)$. Тому послідовність чисел $\varrho(x_n, y_n)$ обмежена, отже,

$$\rho(\omega_n(t'), \omega_n(t'')) \leq L|t' - t''|$$

для деякої константи $L > 0$ і всіх $n \in \mathbb{N}$, $t', t'' \in [0,1]$. Звідси випливає, що послідовність $(\omega_n)_{n=1}^{\infty}$ — одностайно рівномірно неперервна. Далі

$$\rho(x, \omega_n(t)) \leq \rho(x, x_n) + \rho(x_n, \omega_n(t)) =$$

$$= \rho(x, x_n) + \rho(\omega_n(0), \omega_n(t)) \leq \rho(x, x_n) + Lt \leq r$$

для деякого $r > 0$ і довільних $n \in \mathbb{N}$ і $t \in [0,1]$. Таким чином, всі точки $\omega_n(t)$ попадають у кулю $K = \{u : \rho(u, x) \leq r\}$. Оскільки простір (X, ρ) — скінченно компактний, то куля K — компактна. Отже, множина $\{\omega_n(t) : n \in \mathbb{N}\}$ — відносно компактна в (X, ρ) для кожного t. Значить, за теоремою Асколі множина $\{\omega_n : n \in \mathbb{N}\}$ відносно компактна в $C([0,1], X)$. Тому сім'я $(\omega_n)_{n \in I}$ має граничну точку ω^* в $C([0,1], X)$. Ясно, що $\omega^*(0) = x$ і $\omega^*(1) = y$. Переходячи у формулі (*) до границі для відповідної підпослідовності, отримаємо, що

$$\rho(\widetilde{\omega}(t'), \widetilde{\omega}(t'')) = \rho(x, y)|t' - t''|$$

для довільних t' і t''. Звідси за означенням довжини шляху матимемо, що $\ell(\widetilde{\omega}) = \rho(x, y)$. Отже, $\widetilde{\omega} \in S_o(x, y)$. Але $\delta(\omega_n, \omega) \geq \varepsilon$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, отже, і $\delta(\widetilde{\omega}, \omega) \geq \varepsilon$. Тому $\widehat{\omega^*} \neq \widehat{\omega}$, що суперечить умові $|\widehat{S}_o(x, y)| = 1$.

З неперервності φ легко випливає неперервність γ. Справді, нехай $\varepsilon > 0$ і $(x_o, y_o, t_o) \in X \times X \times [0,1]$. Існує таке $\delta_1 > 0$, що для довільної точки $(x, y) \in X^2$ з умов $\varrho(x, x_o) < \delta_1$ і $\varrho(y, y_o) < \delta_1$ випливає, що $\delta(\varphi(x, y), \varphi(x_o, y_o)) < \varepsilon/2$. Зауважимо,що

$$\varrho(\gamma(x, y, t), \gamma(x_o, y_o, t_o)) \leq \varrho(\gamma(x, y, t), \gamma(x_o, y_o, t)) +$$

$$+ \varrho(\gamma(x_o, y_o, t), \gamma(x_o, y_o, t_o)) \leq \delta(\varphi(x, y), \varphi(x_o, y_o)) +$$

$$+ \varrho(\omega_{x_o, y_o}(t), \omega_{x_o, y_o}(t_o)) = \delta(\varphi(x, y), \varphi(x_o, y_o)) + \ell(\omega_{x_o, y_o})|t - t_o|$$

для довільних $x \in X$, $y \in X$ і $t \in [0,1]$. Тому для числа

$$\delta = \min\left\{\delta_1, \frac{\varepsilon}{2(\ell(\omega_{x_o, y_o}) + 1)}\right\}$$

будемо мати, що $\varrho(\gamma(x, y, t), \gamma(x_o, y_o, t_o)) < \varepsilon$, якщо тільки $\varrho(x, x_o) < \delta$, $\varrho(y, y_o) < \delta$ і $|t - t_o| < \delta$.

б) Для всіх $x, y \in X$ і довільного $\varepsilon > 0$ покладемо

$$\gamma_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} x, & \text{якщо} \quad \rho(x,y) \le \varepsilon, \\ \gamma\left(x, y, 1 - \dfrac{\varepsilon}{\rho(x,y)}\right), & \text{якщо} \quad \rho(x,y) \ge \varepsilon. \end{cases}$$

Покажемо, що відображення $\gamma_\varepsilon : X \times X \to X$ — неперервне. Розглянемо множини $F_1 = \{(x,y) \in X^2 : \rho(x,y) \le \varepsilon\}$, $F_2 = \{(x,y) \in X^2 : \rho(x,y) \ge \varepsilon\}$ і відображення $f_1(x,y) = x$, $f_2(x,y) = \gamma\left(x, y, 1 - \frac{\varepsilon}{\rho(x,y)}\right)$.

Множини F_1 і F_2 — замкнені в $X \times X$, а відображення $f_1 : F_1 \to X$ та $f_2 : F_2 \to X$ — неперервні за сукупністю змінних. Оскільки $X \times X = F_1 \cup F_2$, то згідно з [5, с. 119] досить перевірити, що $f_1|_{F_1 \cap F_2} = f_2|_{F_1 \cap F_2}$. Якщо $(x,y) \in F_1 \cap F_2$, то $\rho(x,y) = \varepsilon$. Тоді

$$f_1(x,y) = x \ \text{ і } \ f_2(x,y) = \gamma(x,y,0) = \omega_{x,y}(0) = x.$$

[1] *Буземан Г.* Геометрия геодезических. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – 504 с.

[2] *Карлова О.О.* Берівська класифікація відображень зі значеннями у підмножинах скінченновимірних просторів // Наук. вісн. Чернівецького ун-ту. Вип. 239. Математика. – Чернівці: Рута, 2005. – С. 59–65.

[3] *Карлова О.О.* Берівська та лебегівська класифікації векторнозначних і многозначних відображень: Дис ... канд. фіз.-мат. наук. – Чернівці, 2006. – 137 с.

[4] *Математическая энциклопедия.* Т. 1. – М.: „СЭ", 1977. – 931 с.

[5] *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 752 с.

GEODESIC CONNECTED SPACES AND UNIFORM LIMIT OF THE BAIRE ONE FUNCTIONS

Olena KARLOVA, Oleksandr MASLYUCHENKO,
Volodymyr MASLYUCHENKO

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

We introduce the strongly geodesic connected spaces and show that the uniform limit of the Baire one functions with values in strongly geodesic connected metric space Y with its geodesic metric ϱ remains be of the first Baire class, when the space (Y, ϱ) is finitely compact.