ПРО РЯДИ ДІРІХЛЕ З МОНОТОННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ І ОСТАТОЧНІСТЬ ОПИСУ ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ

 Ярослав СТАСЮК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 12 липня 2008 р.

Нехай S – клас цілих рядів Діріхле $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{z\lambda_n}$ з показниками, що задовольняють умову $0 \le \lambda_n < \sup\{\lambda_j : j \ge 0\}$, а $\mu_n = -\ln|a_n|$, при цьому $|a_n| > |a_{n+1}|$ $(n \ge 0)$. Відомо, що у випадку, коли $\sum_{n=0}^{+\infty}(\mu_{n+1}-\mu_n)^{-1} < +\infty$, співвідношення $\sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\} \sim \mu(\sigma, F) \sim \inf\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$, де $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n} : n \ge 0\}$, виконуються при $\sigma \to -0$ зовні деякої виняткової множини E скінченної логарифмічної міри. У статті доведено, що вказаний опис виняткової множини E в загальному покращити не можна.

Відомо, що в теорії Вімана-Валірона отримувані там асимптотичні співвідношення виконуються зовні виняткових множин. Так у випадку цілих функцій f, зображуваних лакунарними степеневими рядами
$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^{n_k},$$
асимптотичні співвідношення
$$M_f(r) = (1+o(1))\mu_f(r), \quad M_f(r) = (1+o(1))m_f(r), \tag{1}$$
(де $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $m_f(r) = \min\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\mu_f(r) = \max\{|a_k|r^{n_k} : k \ge 0\}$ — максимальний член ряду) виконуються при $r \to +\infty$ зовні деякої множини $E \subseteq [1, +\infty)$ скінченної логарифмічної міри

УДК 517.76; MSC 2000: 30B50

$\ln\text{-meas}\, E = \int_{E\cap[1,+\infty)} d\ln r < +\infty$, як тільки виконується умова

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{n_{k+1} - n_k} < +\infty.$$

Цей результат належить Фентону (P. Fenton, 1978 [2]). У слабшій формі (співвідношення (1) виконується лише при $r = r_j \to +\infty$) доведення дано в [1].

У 2001 р. Т.М. Сало і О.Б. Скасків [3] довели, що опис виняткової множини у теоремі Фентона покращити не можна. Цей факт вони отримали з подібного твердження, встановленого для цілих рядів Діріхле

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n} \tag{2}$$

з невід'ємними зростаючими до $+\infty$ показниками (λ_n). При цьому непокращуваним описом виняткової множини E у співвідношеннях

$$M(x,F) = (1+o(1))m(x,F), \quad M(x,F) = (1+o(1))\mu(x,F), \tag{3}$$

які за умови

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} < +\infty$$

виконуються при $x \to +\infty$ ($x \notin E$), є скінченність її міри Лебега [5], тобто $\int_{E\cap[0,+\infty)} dx < +\infty$ (в [4] асимптотичні співвідношення (3) отримано при $x = x_k \to +\infty$). Тут

$$M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)|\colon y \in \mathbb{R}\}, \quad m(x,F) = \inf\{|F(x+iy)|\colon y \in \mathbb{R}\}$$
$$\mu(x,F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n}\colon n \geq 0\}.$$

Через $\nu(x) = \nu(x,F) = \max\{n : |a_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x,F)\}$ — позначатимемо центральний індекс ряду Діріхле (2).

У 1994 р. О.Б. Скасків [6] отримав аналог теореми Фентона для цілих рядів Діріхле, послідовність дійсних показників яких допускає як наявність будь-якої кількості скінченних точок скупчення, так і обмеженість. Власне, припускається лише, щоб послідовність (λ_n) не досягала своєї точної верхньої межі, тобто:

$$(\forall j \geq 0) : 0 \leq \lambda_j < \sup\{\lambda_k \colon k \geq 0\} = \Delta \leq +\infty. \tag{4}$$

Теорема 1 ([6]). *Нехай F зображається цілим рядом Діріхле (2), показники якого задовольняють умову (4), а $\{\mu_n\colon n\geq 0\}=\{-\ln|a_j|\colon j\geq 0\}$ — впорядкована за неспаданням послідовність $(-\ln|a_j|)$. Якщо виконується умова*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{\mu_{n+1}-\mu_n}<+\infty, \tag{5}$$

то співвідношення

$$F(x+iy)=(1+o(1))a_{\nu(x)}e^{(x+iy)\lambda_{\nu(x)}} \tag{6}$$

виконується при $x\to+\infty$ ($x\notin E_1$, де E_1 — множина скінченної логарифмічної міри, тобто $\ln\text{-meas}\,E_1=\int_{E_1\cap[1,+\infty)}d\ln x<+\infty$) рівномірно по $y\in\mathbb{R}$.

Подібне твердження отримано для рядів Діріхле з нульовою абсцисою абсолютної збіжності.

Теорема 2 ([6]). *Нехай F — функція, яка зображається абсолютно збіжним у півплощині $\{z\colon \operatorname{Re} z<0\}$ рядом Діріхле (2), показники якого задовольняють умову (4) з $\Delta=+\infty$, а $\{\mu_n\colon n\geq 0\}=\{\ln|a_j|\colon j\geq 0\}$ — впорядкована за неспаданням послідовність $(\ln|a_j|)$. Якщо виконується умова (5), то співвідношення (6) виконується при $x\to-0$ ($x\notin E_2$, де E_2 — множина скінченної логарифмічної міри на проміжку $[-1,0)$, тобто $\ln_0\text{-meas}\,E_2=\int\limits_{E_2\cap[-1,0)}d\ln(1/|x|)<+\infty$) рівномірно по $y\in\mathbb{R}$.*

Ми доводимо наступні теореми, які вказують на те, що опис виняткових множин, отриманих у теоремах 1 і 2, є непокращуваним.

Теорема 3. *Для будь-якої зростаючої послідовності (μ_n), яка задовольняє умову (5), і для кожної додатної функції $h(x)$, такої що $h(x)\uparrow+\infty$ ($x\to+\infty$), існують цілий ряд Діріхле вигляду (2) з коефіцієнтами $a_n=\exp\{-\mu_n\}$, показники якого задовольняють умову (4), множина E і стала $\beta>0$, такі що*

$$F(x)\geq(1+\beta)\mu(x,F) \tag{7}$$

для всіх $x\in E$ і $\text{h-meas}\,E=\int_{E\cap[1,+\infty)}h(x)d\ln x=+\infty$.

Теорема 4. *Для будь-якої зростаючої послідовності (μ_n), яка задовольняє умову (5), і для кожної додатної функції $h(x)$, такої, що $h(x)\uparrow+\infty$ ($x\to-0$) існують функція F, яка зображається абсолютно збіжним у півплощині $\{z\colon \operatorname{Re} z<0\}$ рядом Діріхле з коефіцієнтами $a_n=\exp\{\mu_n\}$,* *множина E і стала $\beta > 0$б такі, що (7) виконується для всіх $x \in E$ і* $\text{h-meas}\, E = \int\limits_{E\cap[-1,0)} h(x)d\ln(1/|x|) = +\infty$.

Доведення теореми 3. Як і в [6] визначимо послідовність $C_n = \max\{\mu_k - \mu_{k-1}\colon 1 \le k \le n\}$. Позаяк з умови (5) випливає, що $\mu_k - \mu_{k-1} \to +\infty$ $(k \to +\infty)$, то зрозуміло, що $C_n \nearrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, а також $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_n}{\mu_n - \mu_{n-1}} = +\infty$.

Виберемо зростаючу послідовність $(\varkappa_n)$, яка задовольняє умови: 1) $h(\varkappa_n) \ge C_n$ $(n \ge 1)$; 2) $\varkappa_{n+1} \ge \varkappa_n \max\left\{1 + \frac{q}{\mu_n - \mu_{n-1}};\ 1 + \frac{q}{\mu_{n+1} - \mu_n}\right\}$ при $n \ge 1$, де q — довільне фіксоване додатне число.

Оскільки функція $h(x)$ зростає до $+\infty$, то умови вибору $(\varkappa_n)$ несуперечливі.

Виберемо тепер показники (λ_n) з рекурентних співвідношень

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + (\mu_n - \mu_{n-1})/\varkappa_n \quad (n \ge 1), \quad \lambda_0 = 0.$$

Очевидно, що $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ $(n \ge 0)$. Розглянемо ряд Діріхле (2) з щойно вибраними показниками та з коефіцієнтами $a_n = \exp\{-\mu_n\}$. За побудовою маємо, що $\dfrac{\ln a_{n-1} - \ln a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \equiv \varkappa_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$. Добре відомо, що у цьому випадку

$$\mu(x, F) = a_n e^{x\lambda_n} \quad (\forall\ x \in [\varkappa_n; \varkappa_{n+1}]). \tag{8}$$

За теоремою Штольца ([7, с.25]) отримуємо $-\frac{1}{\lambda_n}\ln a_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ і, отже ([8, с.85]), визначена в (2) функція F належить до класу цілих рядів Діріхле з послідовністю показників (λ_n).

Для $n \ge 1$ позначимо $t_n = \left(1 + \frac{q}{\mu_{n+1} - \mu_n}\right)^{-1} = \frac{\mu_{n+1} - \mu_n}{\mu_{n+1} - \mu_n + q}$. Зрозуміло, що $0 < t_n < 1$ і $t_n\varkappa_{n+1} > \varkappa_n$ $(n \ge 1)$. Тоді для $x \in [\varkappa_{n+1}t_n, \varkappa_{n+1}] \equiv I_n$ маємо

$$\frac{a_{n+1}e^{x\lambda_{n+1}}}{\mu(x, F)} = \exp\{(\mu_n - \mu_{n+1}) + x(\lambda_{n+1} - \lambda_n)\} \ge$$
$$\ge \exp\Big\{ - q\ \Big(1 + \frac{q}{\mu_{n+1} - \mu_n}\Big)^{-1}\Big\} \ge e^{-q} \equiv \beta.$$

Отже, нерівність (7) виконується для $x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} I_n$. Розглянемо тепер

$$\text{h-meas}\, I_n = \int_{\varkappa_{n+1}t_n}^{\varkappa_{n+1}} h(x)d\ln x \ge h(\varkappa_n)\ln\frac{1}{t_n} = h(\varkappa_n)\ln\Big(1 + \frac{q}{\mu_{n+1} - \mu_n}\Big).$$

Оскільки $\mu_{n+1} - \mu_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, то $\ln\left(1 + \frac{q}{\mu_{n+1} - \mu_n}\right) \ge \frac{q}{2}\frac{1}{\mu_{n+1} - \mu_n}$ для всіх $n \ge n_0$. Отже, $\text{h-meas} \bigcup\limits_{n=n_0}^{+\infty} I_n \ge \dfrac{q}{2}\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\dfrac{C_n}{\mu_{n+1} - \mu_n} = +\infty$.

Теорему 3 доведено. □

Доведення теореми 4. Як і в доведенні теореми 3, виберемо за послідовністю (μ_n) зростаючу послідовність $C_n \nearrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, для якої $\sum_{n=1}^{+\infty} C_n/(\mu_{n+1}-\mu_n) = +\infty$. Нехай $t_n = 1 + \frac{d}{\mu_{n+1}-\mu_n}$, де d — довільне фіксоване додатне число. Визначимо строго зростаючу до нуля послідовність від'ємних чисел $(\varkappa_n)$ так, щоб вона задовольняла умови:

1) $h(t_n\varkappa_{n+1}) \geq C_n$; 2) $|\varkappa_{n+1}| \leq |\varkappa_n|/t_n$ для всіх $n \geq 1$.

Неважко зрозуміти, що умови вибору послідовності $(\varkappa_n)$ несуперечливі.

Виберемо тепер показники (λ_n) з рекурентних співвідношень

$$\lambda_n = \lambda_{n-1} + (\mu_{n-1}-\mu_n)/\varkappa_n \quad (n \geq 1), \quad \lambda_0 = 0.$$

Зрозуміло, що $\lambda_n < \lambda_{n+1}$ $(n \geq 0)$. Розглянемо ряд Діріхле вигляду (2). За побудовою і вибором послідовності $\varkappa_n$ маємо

$$\frac{\ln a_{n-1} - \ln a_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} = \frac{\mu_{n-1}-\mu_n}{\lambda_n - \lambda_{n-1}} \equiv \varkappa_n \uparrow 0 \quad (n \to +\infty). \tag{9}$$

За теоремою Штольца ([7, с.25]), існує границя $\lim_{n\to+\infty} \mu_n/\lambda_n = 0$. Звідси, для фіксованого $x < 0$ маємо $\mu_n + x\lambda_n = (1+o(1))x\lambda_n$ $(n \to +\infty)$.

З умови (5) випливає, що $\mu_{n+1}-\mu_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, а тому $\mu_{n+1}-\mu_n \geq c_1$ $(\forall\, n \geq 0)$, де c_1 — деяке додатне число. Крім того, $\varkappa_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, тому $1/\varkappa_{n+1} \geq c_2 > 0$ $(\forall n \geq 0)$. Отже, $\lambda_{n+1}-\lambda_n = \frac{1}{|\varkappa_{n+1}|}(\mu_{n+1}-\mu_n) \geq c_1 \cdot c_2$. Звідки, $\lambda_n \geq c_1c_2n$. Тому $\exp\{\mu_n + x\lambda_n\} \leq \exp\{-\frac{|x|}{2}nc_1c_2\}$ $(\forall\, n \geq n_0)$. Звідси випливає, що ряд (2) абсолютно збіжний у півплощині $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$. Позаяк з (9) випливає, що виконується (8), то для всіх $x \in [t_n\varkappa_{n+1}, \varkappa_{n+1}] \equiv I_n$ отримуємо

$$\frac{a_{n+1}e^{x\lambda_{n+1}}}{\mu(x,F)} = \exp\{-(\mu_n-\mu_{n+1}) + x(\lambda_{n+1}-\lambda_n)\} =$$

$$= \exp\Big\{-(\mu_{n+1}-\mu_n)\Big(\frac{|x|}{|\varkappa_{n+1}|}-1\Big)\Big\} \geq \exp\{-(\mu_{n+1}-\mu_n)(t_n-1)\} = e^{-d},$$

а отже, (7) виконується з $\beta = e^{-d}$ для всіх $x \in I_n$. Розглянемо

$$\text{h-meas}\, I_n = \int_{I_n} h(x)\cdot d\ln(1/|x|) \geq h(t_n\varkappa_{n+1}) \ln\frac{t_n|\varkappa_{n+1}|}{|\varkappa_{n+1}|} =$$

$$= h(t_n\varkappa_{n+1}) \ln\left(1+\frac{d}{\mu_{n+1}-\mu_n}\right) \geq C_n \ln\left(1+\frac{d}{\mu_{n+1}-\mu_n}\right).$$

Оскільки $\ln\big(1+\dfrac{d}{\mu_{n+1}-\mu_n}\big) = (1+o(1))\dfrac{d}{\mu_{n+1}-\mu_n}$ $(n \to +\infty)$, то із розбіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} C_n/(\mu_{n+1}-\mu_n)$ отримуємо $\text{h-meas}\big(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} I_n\big) = +\infty$. Теорему 4 доведено. $\square$

[1] *Erdös P., Macintyre A.J.* Integral functions with gap power series // Proc. Edinburgh Math. Soc. (2). – 1953. – **10**. – P.62–70.

[2] *Fenton P.C.* The minimum modulus of gap power series // Proc. Edinburgh Math. Soc. – 1978. – **21**. – P.49–54.

[3] *Salo T.M., Skaskiv O.B., Trakalo O.M.* On the best possible description of exeptional set in Wiman-Valiron theory for entire functions // Матем. студії. – 2001. – **16**, №2. – С.131-140.

[4] Srivastava R.P. On the entire functions and their derivatives represented by Dirichlet series // Ganita. –1958. – **9**, №2. – P.82–92.

[5] *Скасків О.Б.* Максимум модуля і максимальний член цілого ряду Діріхле // Доп АН УРСР, сер. А. – 1984. – №11. – С.22–24.

[6] *Скаскив О.Б.* О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей // Мат. заметки. – Т.56, №5. – 1994. – С.117–128.

[7] *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1972. – 544 с.

[8] *Леонтьев А.Ф.* Целые функции. Ряды експонент. – М.: Наука, 1983.

ON THE DIRICHLET SERIES WITH MONOTONOUS COEFFICIENTS AND THE FINALITY OF DESCRIPTION OF THE EXCEPTIONAL SET

Yaroslav STASYUK

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

Let S be the class of entire Dirichlet series $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$ with exponents and coefficients satisfying the conditions $0 \le \lambda_n < \sup\{\lambda_j : \ j \ge 0\}$, $|a_n| > |a_{n+1}|$ $(n \ge 0)$; $\mu_n = -\ln|a_n|$. It is known that if
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\mu_{n+1} - \mu_n)^{-1} < +\infty,$$
then the relations $\sup\{|F(\sigma + it)| : \ t \in \mathbb{R}\} \sim \mu(\sigma, F) \sim \inf\{|F(\sigma + it)| : t \in \mathbb{R}\}$, hold as $\sigma \to +\infty$ outside a certain exceptional set E of the finite logarithmic measure where $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| e^{\sigma\lambda_n} : \ n \ge 0\}$. In this paper we prove that the above description of exceptional set E in general cannot be improved.