# ОБМЕЖЕНІСТЬ $L$-ІНДЕКСУ ЗА НАПРЯМОМ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ РОДУ $p$ З «ПЛОСКИМИ НУЛЯМИ».

©2008 р. *Андрій БАНДУРА*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів 79000

Редакція отримала статтю 25 грудня 2008 р.

Для деякого підкласу цілих функцій роду $p$ з “плоскими” нулями знайдено достатні умови обмеженості $L$-індексу за напрямом

Нехай $L$ — додатна неперервна функція у $\mathbb{C}^n$.

Для $\eta > 0$, $z \in \mathbb{C}^n$, $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ і додатної неперервної функції $L: \ \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}_+$ визначимо

$$\lambda_1^{\mathbf{b}}(z,\eta) = \inf\left\{\inf\left\{\frac{L(z+t\mathbf{b})}{L(z+t_0\mathbf{b})} : |t-t_0| \le \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})}\right\} : \ t_0 \in \mathbb{C}\right\},$$

$\lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) = \inf\{\lambda_1^{\mathbf{b}}(z,\eta) : z \in \mathbb{C}^n\}$, а також $\lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) = \sup\{\lambda_2^{\mathbf{b}}(z,\eta) : z \in \mathbb{C}^n\}$, де

$$\lambda_2^{\mathbf{b}}(z,\eta) = \sup\left\{\sup\left\{\frac{L(z+t\mathbf{b})}{L(z+t_0\mathbf{b})} : |t-t_0| \le \frac{\eta}{L(z+t_0\mathbf{b})}\right\} : \ t_0 \in \mathbb{C}\right\}.$$

Клас функцій $L$, які для всіх $\eta \ge 0$ задовольняють умову $0 < \lambda_1^{\mathbf{b}}(\eta) \le \lambda_2^{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty$, позначатимемо через $Q_{\mathbf{b}}^n$.

Згідно з [1] цілу функцію $F(z)$, $z \in \mathbb{C}^n$, називатимемо цілою функцією *обмеженого $L$-індексу в напрямку* $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$, таке, що для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ та кожного $z \in \mathbb{C}^n$ виконується нерівність:

$$\frac{1}{m!L^m(z)}\left|\frac{\partial^m F(z)}{\partial \mathbf{b}^m}\right| \le \max\left\{\frac{1}{k!L^k(z)}\left|\frac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k}\right| : 0 \le k \le m_0\right\}, \qquad (1)$$

УДК 517.53; MSC 2000: 30D20, 32A15, 32W50

де $\dfrac{\partial^0 F(z)}{\partial \mathbf{b}^0} = F(z)$, $\dfrac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}} = \sum\limits_{j=1}^{n} \dfrac{\partial F(z)}{\partial z_j} b_j = \langle \mathbf{grad}\ F, \overline{\mathbf{b}} \rangle$, $\dfrac{\partial^k F(z)}{\partial \mathbf{b}^k} = \dfrac{\partial}{\partial \mathbf{b}} \left( \dfrac{\partial^{k-1} F(z)}{\partial \mathbf{b}^{k-1}} \right)$, $k \geq 2$.

Найменше серед таких чисел $m_0 = m_0(\mathbf{b})$ число $N_{\mathbf{b}}(F, L) = m_0$ назвемо *$L$-індексом у напрямку $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ цілої функції $F(z)$.*

У статті [1] отримано умови обмеженості індексу для цілих функцій нульового роду з "плоскими" нулями, які були деяким аналогом відповідних одновимірних умов із [3]. Природно виникає питання чи не можна отримати умови обмеженості $L$-індексу для довільного роду $p$. Нижче наведено такі умови. Зауважимо, що вони є певним багатовимірним аналогом достатніх умов обмеженості $l$-індексу для цілих функцій, зображуваних канонічними добутками Вейєрштрасса (див. [2]).

Нехай $F$ ціла функція в $\mathbb{C}^n$ *роду $p$ з "плоскими" нулями* [4], тобто функція вигляду

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} g(\langle z, a^k |a^k|^{-2} \rangle, p),$$

$$g(u, p) = (1 - u) \exp \left\{ u + \frac{u^2}{2} + \cdots + \frac{u^p}{p} \right\}, \tag{2}$$

де $(a^k)$, $a^k \in \mathbb{C}^n$, – послідовність роду $p$, тобто така, що

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/|a^k|^{p+1} < +\infty, \ \sum_{k=1}^{\infty} 1/|a^k|^p = +\infty \tag{3}$$

а $\langle a, b \rangle = \sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j$ для $a, b \in \mathbb{C}^n$. Відомо, що умова (3) (див. [4]) забезпечує рівномірну і абсолютну збіжність добутку (2) на компактах з $\mathbb{C}^n$. Вважаємо послідовність $(a^k)$ впорядкованою так, що $|a^k| \leq |a^{k+1}|$ $(k \geq 1)$. Крім того, вважатимемо всюди у статті, що елементи послідовності $(a^k)$ лежать на одному промені, тобто виконується така рівність

$$a_j^k = m_j |a^k| \text{ для всіх } k \geq 1, \tag{4}$$

$m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$.

Нагадаємо деякі позначення із [1]. Для фіксованого $z^0 \in \mathbb{C}^n$ через $a_k^0$ позначимо нулі функції $F(z^0 + t\mathbf{b})$ як функції від $t \in \mathbb{C}$, для яких $F(z^0 + a_k^0 \mathbf{b}) = 0$, а також позначимо

$$G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) = \bigcup_k \left\{ z^0 + t\mathbf{b} : |t - a_k^0| \leq \frac{r}{|\mathbf{b}| \sqrt{n} L(z^0 + a_k^0 \mathbf{b})} \right\}, \quad r > 0;$$

якщо ж $(\forall\, t \in \mathbb{C}) : F(z^0 + t\mathbf{b}) \neq 0$, $z^0 \in \mathbb{C}^n$, то вважаємо, що $G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0) = \emptyset$. Нехай

$$G_r^{\mathbf{b}}(F) = \bigcup_{z^0 \in \mathbb{C}^n} G_r^{\mathbf{b}}(F, z^0). \tag{5}$$

Через

$$n\big(r, z^0, t_0, 1/F\big) = \sum_{|a_k^0 - t_0| \le r/\sqrt{n}} 1$$

позначимо нормовану лічильну функцію послідовності нулів $a_k^0$. У подальших міркуваннях ми скористаємося таким твердженням із [1].

**Лема 1** ( [1])**.** *Нехай $F(z)$ — ціла у $\mathbb{C}^n$ функція, $L \in Q_{\mathbf{b}}^n$ і $\mathbb{C}^n \backslash G_r^{\mathbf{b}}(F) \neq \emptyset$. $F(z)$ — функція обмеженого $L$-індексу в напрямку $\mathbf{b} \in \mathbb{C}^n$ тоді і тільки тоді, коли виконуються такі дві умови:*

1. *Для будь-якого $r > 0$ існує $P = P(r) > 0$, таке, що для всіх $z \in \mathbb{C}^n \backslash G_r^{\mathbf{b}}(F)$*

$$\Big|\frac{1}{F(z)} \frac{\partial F(z)}{\partial \mathbf{b}}\Big| \le PL(z); \tag{6}$$

2. *Для будь-якого $r > 0$ існує $\widetilde{n}(r) \in \mathbb{Z}_+$, що для всіх $z^0 \in \mathbb{C}^n$, таких, що функція $F(z^0 + t\mathbf{b})$ відмінна від тотожного нуля, та для всіх $t_0 \in \mathbb{C}$*

$$n\big(r/L(z^0 + t^0\mathbf{b}), z^0, t_0, \frac{1}{F}\big) \le \widetilde{n}(r). \tag{7}$$

Доведемо спершу допоміжні твердження.

**Лема 2.** *Якщо $L(|\langle z, m\rangle|) \in Q_{\mathbf{b}}^n$, $F$ - ціла функція виду (2), $(a^k)$ задовольняють умову (4) і $|a^{k+1}| - |a^k| > 2q_0/L(|a^k|)$ для деякого $q_0 > 0$ і всіх $k \ge 1$, то виконується умова 2) леми 1.*

*Доведення.* Зауважимо, що для функції $F(z_0 + t\mathbf{b})$ нулями будуть $t_k = \frac{|a^k|^2 - \langle z^0, a^k\rangle}{\langle \mathbf{b}, a^k\rangle}$ (у випадку $\langle \mathbf{b}, a^k\rangle = 0$ отримуємо, що $F(z^0 + t\mathbf{b}) \equiv 0$). Виберемо $q_1 \in (0, |\mathbf{b}|q_0)$. Спершу покажемо, що справджується нерівність $n(q_1/L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|), z^0, t_0, 1/F) \le 1$ для довільних $z^0 \in \mathbb{C}^n, t_0 \in \mathbb{C}$. Від супротивного, нехай $n(q_1/L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|), z^0, t_0, 1/F) > 1$, тоді $|t_k - t_0| \le q_1/L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|)$ і $|t_l - t_0| \le q_1/L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|)$ для деякої пари $k$ і $l$ (вважаємо, що $k < l$). Насправді за $l$ можна взяти $l = k + 1$, бо послідовність $|t_k|$ - неспадна як і послідовність $|a^k|$.

Тоді

$$|t_k - t_0| = \left|\frac{|a^k|^2 - \langle z^0 + t_0\mathbf{b}, a^k\rangle}{\langle \mathbf{b}, a^k\rangle}\right| \ge \frac{|\,|a^k|^2 - \langle z^0 + t_0\mathbf{b}, a^k\rangle|}{|\mathbf{b}||a^k|}.$$

Звідси отримуємо, що

$$\left||a^k| - \langle z^0 + t_0\mathbf{b}, \frac{a^k}{|a^k|}\rangle\right| \leq |\mathbf{b}|\frac{q_1}{L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|)} \Longrightarrow$$

$$\left||a^k| - \left|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, \frac{a^k}{|a^k|}\rangle\right|\right| \leq |\mathbf{b}|\frac{q_1}{L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|)} \Longrightarrow$$

$$\left|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, \frac{a^k}{|a^k|}\rangle\right| - \frac{|\mathbf{b}|q_1}{L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|)} \leq$$

$$\leq |a^k| \leq \left|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, \frac{a^k}{|a^k|}\rangle\right| + \frac{|\mathbf{b}|q_1}{L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|)}.$$

Подібно, $\left|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, \frac{a^{k+1}}{|a^{k+1}|}\rangle\right| - \frac{|\mathbf{b}|q_1}{L(|\langle z^0+t_0\mathbf{b}, m\rangle|)} \leq |a^{k+1}| \leq \left|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, \frac{a^{k+1}}{|a^{k+1}|}\rangle\right| + \frac{|\mathbf{b}|q_1}{L(|\langle z^0+t_0\mathbf{b}, m\rangle|)}$ або

$$|\langle z^o + t_0\mathbf{b}, m\rangle| - \frac{|\mathbf{b}|q_1}{L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|)} \leq |a^{k+1}| \leq$$

$$|\langle z^o + t_0\mathbf{b}, m\rangle| + \frac{|\mathbf{b}|q_1}{L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|)}$$

$$\text{і } \left|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle\right| - \frac{|\mathbf{b}|q_1}{L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|)} \leq |a^k| \leq$$

$$\left|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle\right| + \frac{|\mathbf{b}|q_1}{L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|)}$$

Звідси $|a^{k+1}| - |a^k| < \frac{2|\mathbf{b}|q_1}{L(|\langle z^0+t_0\mathbf{b}, m\rangle|)}$. Але

$$L(|a^k|) = L(|\langle a^k, m\rangle|) \leq \lambda_2^{\mathbf{b}}\left(\frac{q_0}{\lambda_2(q_0)}\right)L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|)$$

$$\leq \lambda_2^{\mathbf{b}}(q_0)L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle|).$$

Оскільки $q_1 < |\mathbf{b}|q_0$ за своїм вибором, то отримали суперечність з умовою $|a^{k+1}| - |a^k| > 2q_0/L(|a^k|)$.

Отже, $n(\frac{q_0}{\lambda_2^{\mathbf{b}}(q_0)L(|\langle z^0+t_0\mathbf{b}, m\rangle|)}, z^0, t_0, 1/F) \leq 1$ для довільних $z^0 \in \mathbb{C}^n$, $t_0 \in \mathbb{C}$. Але кожний круг радіуса $\frac{q}{L(|\langle z^0+t_0\mathbf{b}, m\rangle||)}$, $q > q_0/\lambda_2^{\mathbf{b}}(q_0)$ можна покрити скінченним числом кругів радіуса $m = m(q_0/\lambda_2^{\mathbf{b}}(q_0), q)$. Тому $n(q/L(|\langle z^0 + t_0\mathbf{b}, m\rangle||), z^0, t_0, 1/F) \leq m(q_1, q)$ для довільних $z^0 \in \mathbb{C}^n, t_0 \in \mathbb{C}$. Тобто виконується умова 2) леми 1. $\square$

**Лема 3.** *Якщо* $l \in Q_{\mathbf{b}}^n$, $(a^k)$ *задовольняють умову (4),* $|a^k| < |\langle z, m\rangle| < |a^{k+1}|$, $|\langle z, m\rangle - |a^k|| \ge \frac{q}{L(|a^k|)}$ *і* $|\langle z, m\rangle - |a^{k+1}|| \ge \frac{q}{L(|a^{k+1}|)}$, *то*

$$\frac{1}{|\langle z, m\rangle - |a^k||} + \frac{1}{|\langle z, m\rangle - |a^{k+1}||} \le P_1(q)L(|\langle z, m\rangle|),$$

*де* $P_1(q) \equiv const > 0$.

*Доведення.* Доведення проводиться за схемою доведення леми 3 з [2]. $\square$

Нехай $n(r)$ - лічильна функція послдовності $|a^k|$. Тоді справедливі такі твердження.

**Лема 4.** *Якщо* $\frac{|a^k|^{p+1}}{k} \nearrow \infty$ $(k \to \infty)$, $(a^k)$ *задовольняють умову (4) і* $|\langle z, m\rangle - |a^k|| \ge \frac{q}{L(|a^k|)}$, $k \ge 2$, *то*

$$\sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{|\langle z, m\rangle| - |a^l|} + \sum_{l=k+2}^{2k+1} \frac{1}{|\langle z, m\rangle - |a^l|} \le \frac{6pn(r)\ln n(r)}{r},$$

*де* $r = |\langle z, m\rangle|$.

**Лема 5.** *Якщо* $\frac{|a^k|^{p+1}}{k} \nearrow \infty$ $(k \to \infty)$, $(a^k)$ *задовольняють умову (4) і* $|\langle z, m\rangle - |a^k|| \ge \frac{q}{L(|a^k|)}$, $k \ge 2$, *то*

$$r^p \sum_{l=2(k+1)}^{\infty} \frac{1}{|a^l|^{p+1}} \le \sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{|\langle z, m\rangle|^p}{|a^l|^p(|a^l| - |\langle z, m\rangle|)} \le \frac{r^p}{1 - 2^{-(p+1)}} \sum_{k=2(n+1)}^{\infty} \frac{1}{|a^l|^{p+1}},$$

*де* $r = |\langle z, m\rangle|$.

**Лема 6.** *Якщо* $\dfrac{|a^k|^{p+1}}{k} \nearrow \infty$ $(k \to \infty)$, $(a^k)$ *задовольняють умову (4), то існує функція* $L(|\langle z, m\rangle|) \in Q_{\mathbf{b}}^n$, *що* $L(r) \asymp \frac{n(r)\ln n(r)}{r}$

Доведення перших двох лем подібне до доведення відповідних лем 4 та 5 із [2], а доведення леми 6 відрізняється тільки тим що в кінці доводиться належність функції $L(\langle z, m\rangle|)$ до класу $Q_{\mathbf{b}}^n$.

На основі цих лем отримуються достатні умови обмеженості $L$-індексу в напрямку для цілих функцій з "плоскими" нулями роду $p$.

**Теорема 1.** *Якщо* $\frac{|a^k|^{p+1}}{k} \nearrow \infty$ $(k \to \infty)$, $(a^k)$ *задовольняють умову (4),* $L(|\langle z, m\rangle|) \in Q^n_{\mathbf{b}}$, $n(r)\ln n(r) = O(rL(r))$ *і*

$$r^{p-1}\sum_{l=1}^{n(r)}\frac{1}{|a^k|^p} + r^p\sum_{k=n(r)+1}^{\infty}\frac{1}{|a^k|^{p+1}} = O(l(r)), r \to +\infty,$$

*то добуток (2) є функцією обмеженого* $L$*- індексу в напрямку* $\mathbf{b}$.

*Доведення.* Доведення цієї теореми подібне до доведення достатності теореми 2 у [2]. □


[1] *Бандура А. І., Скасків О. Б. Цілі функції обмеженого L-індексу за напрямком // Матем. студії. – 2007. – Т.27, №1. – С.30-52.*

[2] *Гольдберг А.А., Шеремета М.М. Про обмеженість l-індексу канонічних добутків // Укр.матем.вісник. – 2005. – Т.2, №1. – С.52–54.*

[3] *Chyzhykov I. E., Sheremeta M. M. Boundedness of l-index for entire functions of zero genus // Матем. студії. – 2001. – Т.16, №2. – С.124–130.*

[4] Папуш Д. Е. *О росте целых функций с «плоскими» нулями // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков) – 1987. – Вып.48. – С.117–125.*


## ON BOUNDEDNESS OF THE $L$-INDEX IN DIRECTION FOR ENTIRE FUNCTIONS WITH PLANE ZEROS


*Andriy BANDURA*

Ivan Franko National University of Lviv
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine



For a some subclass of entire functions of $p$ genus with 'plane' zeros the sufficient conditions of boundedness of L-index in direction are obtained.