УЗАГАЛЬНЕННЯ ОДНІЄЇ ТЕОРЕМИ БЕРНШТЕЙНА

©2009 р. *Галина ВОЛОШИН, Володимир МАСЛЮЧЕНКО*

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012

Редакція отримала статтю 28 вересня 2009 р.

Знайдено умови на метрику F-простору X, при виконанні яких встановлено наступний результат, що узагальнює відому обернену теорему Бернштейна: для кожної строго зростаючої послідовності скінченновимірних лінійних підпросторів L_n і довільної спадної до нуля послідовності дійсних чисел α_n існує такий елемент x з X, що $d(x, L_n) = \alpha_n$ для кожного n.

1. Вступ

Багато теорем теорії наближення стосуються послідовності чисел $E_n(f)$, що є найкращими рівномірними наближеннями неперервної на відрізку $[a, b]$ функції f многочленами, степінь яких не перевищує n. Зокрема, С.Н.Бернштейн у праці [1] (див. також її російський переклад [2]) встановив такий результат: для довільної спадної послідовності дійсних невід'ємних чисел α_n, яка прямує до нуля, існує така неперервна функція $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, що $E_n(f) = \alpha_n$ для кожного $n = 0, 1, 2, \ldots$. В своєму огляді [3, с. 297] С.М.Нікольський без доведення зауважив, що цей результат Бернштейна без особливих змін можна перенести на той випадок, коли замість простору $C[a, b]$ неперервних на відрізку $[a, b]$ функцій розглядається довільний банаховий простір X, а замість послідовності просторів многочленів степеня не вище n – довільна строго зростаюча послідовність скінченновимірних підпросторів L_n простору X. У монографії А.Ф.Тімана [4, с. 50-53] подано доведення відповідного твердження, коли L_n – це лінійна оболонка елементів $x_0, x_1, \ldots, x_n$ банахового простору X і послідовність $(x_k)_{k=0}^{\infty}$ лінійно незалежна.

Відома в теорії метричних просторів відстань $d(x, L)$ від елемента x з метричного простору (X, d) до непорожньої підмножини L в X, що визначається формулою

$$d(x, L) = \inf_{y \,\epsilon L} \; d(x, y),$$

і є якраз найкращим найближенням елемента x елементами з L. Використавши це поняття, можна поставити загальну задачу про опис тих числових послідовностей $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ для даної послідовності $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ непорожніх множин у метричному просторі X, що для них існує такий елемент x з X, що $d(x, L_n) = \alpha_n$ для кожного n. Її можна ставити і для скінченного числа множин L_k.

Щоб не дуже відійти від банахових просторів, можна спочатку розглянути цю задачу для F-просторів, теорія яких досить повно викладена в монографії С.Ролевича [5]. Тут ми вводимо певні умови на F-простір X, які виконуються, наприклад, у випадку, коли X – p-банаховий простір, але не тільки тоді, і показуємо, що при виконанні цих умов для кожної строго зростаючої послідовності скінченновимірних лінійних підпросторів L_n простору X і довільної спадної до нуля послідовності дійсних чисел α_n існує такий елемент x з X, що $d(x, L_n) = \alpha_n$ для кожного номера n.

2. Перші властивості найкращого наближення і квазінорми.

Нехай (X, d) – метричний простір, $\emptyset \neq L \subseteq X$, $x \in X$ і $E(x) = d(x, L)$ – найкраще наближення елемента x елементами з L.

Перші властивості функції $E : X \to [0, +\infty)$ легко випливають з означення і властивостей метрики.

1°. $E(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{L}$; якщо $L-$замкнена, то $E(x) = 0 \Leftrightarrow x \in L$;

2°. $(\forall\, x_1, x_2 \in X)$ $(|E(x_1) - E(x_2)| \leq d(x_1, x_2))$;

3°. Функція $E : X \to \mathbb{R}$ рівномірно неперервна на X.

Нехай X – абелева група. Відображення $x \mapsto |x| : X \to \mathbb{R}$ називається *квазінормою*, якщо для будь-яких x і y з X виконуються умови:

1). $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

2). $|-x| = |x|$;

3). $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Кожна квазінорма $|\cdot|$ на X породжує відстань , що визначається формулою:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Введена відстань інваріантна відносно зсуву, тобто

$$d(x+z, y+z) = d(x, y)$$

для будь-яких x,y і z з простору X.

Нехай метрика d на абелевій групі X породжена деякою квазінормою і L – підгрупа групи X. Тоді функція $E(x) = d(x, L)$ має ще й такі властивості:

4°. $(\forall\, x_1, x_2 \in X)$ $(E(x_1 + x_2) \leq E(x_1) + E(x_2))$;

5°. $(\forall\, x \in X)$ $(E(-x) = E(x))$;

6°. $(\forall\, x \in X)$ і $(\forall\, y \in L)$ $(E(x + y) = E(x))$.

3. Лінійні квазінорми і квазінормовані простори

Нехай X – векторний простір над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ або $\mathbb{C}$ дійсних або комплексних чисел, d – метрика на X і $\mathcal{T}_d$ – топологія на X, що породжується метрикою d.

Метрика d називається *лінійною*, якщо $(X, \mathcal{T}_d)$ – топологічний векторний простір (коротко: ТВП), тобто операції додавання елементів $(x,\, y) \mapsto x + y$ і множення на скаляр $(\lambda,\, x) \mapsto \lambda x$ є неперервними за сукупністю змінних.

Квазінорма на векторному просторі X – це квазінорма на адитивній групі цього простору. Вона називається *лінійною*, якщо породжена нею метрика є лінійною. Зрозуміло, що для метрики, породженої квазінормою, операція додавання завжди неперервна. Отже, лінійність квазінорми рівносильна сукупній неперервності операції множення на скаляр.

Квазінормованим просторм ми називатимемо векторний простір X над полем $\mathbb{K}$, на якому задано деяку лінійну квазінорму.

Наведемо декілька прикладів квазінормованих просторів і приклад нелінійної квазінорми.

Приклад 1. Кожна норма $\|\cdot\|$ на векторному просторі X – це квазінорма, яка задовольняє умову

$$4).\, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$$

для будь яких $\lambda \in \mathbb{K}$ і $x \in X$. З умов 3) і 4) легко виводиться неперервність операції множення на скаляр, отже, кожний нормований простір є квазінормованим.

Приклад 2. Нехай $0 < p \leqslant 1$ і $|\cdot|_p$ – p -норма на X, тобто квазінорма, яка має властивість

$$5).\, |\lambda x|_p = |\lambda|^p |x|_p$$

для будь яких $\lambda \in \mathbb{K}$ і $x \in X$. З умов 3) і 5) так само випливає неперервність операції множення на скаляр, отже, і кожний p -нормований простір є квазінормованим.

Приклад 3. Нехай $X = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ – простір усіх послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ чисел $\xi_k \in \mathbb{K}$ і

$$|x| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \cdot \frac{|\xi_k|}{1 + |\xi_k|}.$$

Легко перевірити, що $|\cdot|$ – це лінійна квазінорма на X.

Приклад 4. Нехай $X = S$ – простір всіх вимірних за Лебеґом функцій $x : [0,1] \to \mathbb{K}$ (майже скрізь рівні функції ототожнюються). Тоді функція

$$|x| = \int_0^1 \frac{|x(t)|}{1 + |x(t)|} dt$$

– це лінійна квазінорма на X.

Приклад 5. Нехай $X = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\|x\|_\infty = \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} |\xi_k|$ і $|x| = min\{\|x\|_\infty, 1\}$, де $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Тоді $|\cdot|$ – це нелінійна квазінорма на X.

Приклад 6. Нехай X – це простір всіх послідовностей $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty}$ з $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, для яких $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_{2k}|^s < +\infty$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\xi_{2k-1}|^q < +\infty$ де s і q – деякі фіксовані різні числа з проміжка $(0,1]$. Покладемо

$$|x| = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{2k}|^s + \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_{2k-1}|^q$$

для $x = (\xi_k)_{k=1}^{\infty} \in X$. Легко перевірити, що функція $|\cdot|$ є лінійною квазінормою на X, яка не є p -нормою при жодному $p \in (0,1]$.

4. Додаткові умови на квазінормовані простори

Для того щоб перенести теорему Бернштейна на квазінормовані простори, нам потрібно ввести деякі додаткові умови на квазінорму.

Ми кажемо, що X – це *квазінормований простір з обмеженими кулями*, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ куля $B_\varepsilon = \{x \in X : |x| \le \varepsilon\}$ є обмеженою множиною в ТВП X. Це означає, що для будь яких додатних чисел ε і δ існує таке число $\gamma > 0$, що $B_\varepsilon \subseteq \lambda B_\delta$, як тільки $|\lambda| \ge \gamma$. Зрозуміло, що квазінормований простір з обмеженими кулями є локально обмеженим і в ньому для будь-якого $\varepsilon > 0$ система $\{\delta B_\varepsilon : \delta > 0\}$ є базою околів нуля. Легко перевірити, що простори з прикладів 1, 2 і 6 є квазінормованими просторами з обмеженими кулями, а з прикладів 3 і 4 – ні, адже в них одинична куля B_1 збігається з усім простором.

Твердження 1. *Нехай X – квазінормований простір з обмеженими кулями і L – його скінченновимірний підпростір. Тоді кожна куля $B_\varepsilon = \{x \in L : |x| \leq \varepsilon\}$ у просторі L є компактною множиною.*

Доведення. Нехай $dimL = n$. З теореми Тихонова [6, с. 16] випливає, що існує ізоморфізм $\varphi : L \to \mathbb{K}^n$ ТВП L, як підпростору X, і ТВП $\mathbb{K}^n$, як добутку n екземплярів одновимірних ТВП $\mathbb{K}$. Куля B_ε у просторі L є обмеженою множиною, бо вона є такою у всьому просторі X. Крім того, вона замкнена в L, бо квазінорма є неперервною функцією на X. Тому її образ $A = \varphi(B_\varepsilon)$ при ізоморфізмі φ буде обмеженою і замкненою множиною у просторі $\mathbb{K}^n$, а значить, і компактною множиною в $\mathbb{K}^n$ за відомою теоремою Гейне -Бореля. Тоді і множина $B_\varepsilon = \varphi^{-1}(A)$ буде компактною в L як образ компактної множини A при неперервному відображенні φ^{-1}. $\diamondsuit$

Введемо тепер додаткові умови на відстань до підпросторів. У наступних умовах скаляри вважаються дійсними.

(a). Для довільного $x \neq 0$ відстань $|\lambda x| = d(\lambda x, \{0\}) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$;

(A). Для довільного скінченновимірного підпростору L простору X і довільного $x \in X \setminus L$ відстань $d(\lambda x, L) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$;

($\mathcal{A}$). Для кожного замкненого лінійного підпростору L простору X і довільного елемента $x \in X \setminus L$ відстань $d(\lambda x, L) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

Зрозуміло, що **($\mathcal{A}$)** $\Rightarrow$ **(A)**$\Rightarrow$ **(a)**. Нам не відомо, чи справджуються обернені імплікації **(a)**$\Rightarrow$ **(A)** і **(A)**$\Rightarrow$ **($\mathcal{A}$)**.

В нормованому просторі для довільного лінійного підпростору L функція $E(x) = d(x, L)$ задовольняє умову $E(\lambda x) = |\lambda| E(x)$, а в p -нормованому просторі – умову $E(\lambda x) = |\lambda|^p E(x)$ для довільних $\lambda \in \mathbb{K}$ і $x \in X$. Звідси легко вивести, що в нормованих і p -нормованих просторах виконується найсильніша властивість ($\mathcal{A}$). Простір з прикладу 6 теж задовольняє умову ($\mathcal{A}$), бо в ньому справедлива оцінка $E(\lambda x) \geq |\lambda|^p E(x)$ при $|\lambda| \geq 1$, де $p = min\{q, s\}$.

Квазінорми з прикладів 3, 4 і 5 не задовольняють навіть умову **(a)**, бо для них $|x| \leq 1$ для кожного $x \in X$.

5. Елемент найкращого наближення та проксимінальні множини

Нехай (X,d) – метричний простір, L – непорожня підмножина X і $x \in X$. Елемент v з L називається *елементом найкращого наближення* елемента x, якщо $d(x,L) = d(x,v)$. Множина L називається *проксимінальною*, якщо кожен елемент x з X має елемент найкращого наближення в L. Оскільки функція $y \mapsto d(x,y)$ неперервна, то з теореми Вейєрштрасса негайно випливає, що кожна непорожня компактна множина в метричному просторі X є проксимінальною.

Твердження 2. *Нехай L – скінченновимірний лінійний підпростір квазінормованого простору X з обмеженими кулями. Тоді L є проксимінальною множиною в X.*

Доведення. Нехай $x \in X$ і $E(x) = d(x,L)$. Розглянемо кулю $B = \{x \in L : |y| \leq 2|x|\}$ і число $\alpha = \inf\limits_{y \in B} |x-y|$. Ми твердимо, що $E(x) = \alpha$.

Справді, для $y \in L \setminus B$ будемо мати $|y| > 2|x|$, отже,

$$|x-y| \geq |y| - |x| > 2|x| - |x| = |x|.$$

Оскільки $0 \in B$, то $|x| = |x-0| \geq \alpha$. Звідси випливає, що $|x-y| \geq \alpha$ для всіх $y \in L \setminus B$. Оскільки на множині B ця нерівність також виконується, то $|x-y| \geq \alpha$ на L, отже, $E(x) \geq \alpha$. Але $B \subseteq L$, отже, і $\alpha \leq E(x)$. Тому $E(x) = \alpha$.

За твердженням 1 множина B компактна. Тому з неперервності функції $y \mapsto |x-y|$ випливає, що існує такий елемент $v \in B$, що $\alpha = |x-v|$. Цей елемент і є елементом найкращого наближення елемента x в L. ♢

Зауважимо, що проксимінальна множина L в X обов'язково замкнена в X. Справді, для елемента $x \in \overline{L}$ обов'язково $d(x,L) = 0$, і оскільки існує такий елемент $v \in L$, що $d(x,v) = d(x,L)$, то $d(x,v) = 0$ і $x = v \in L$.

6. Основна задача для скінченного числа підпросторів

Спочатку ми вкажемо достатні умови на квазінормований простір X, для того, щоб існував елемент $x \in X$, такий, що $d(x,L_k) = \alpha_k$ при $k = 1,\ldots,n$ для скінченного числа підпросторів $L_1,\ldots,L_n$.

Теорема 1. *Нехай X – квазінормований простір, що задовольняє умову ($\mathcal{A}$), L – замкнений лінійний підпростір X, $L \neq X$ і $\alpha \geq 0$. Тоді існує такий елемент x з X, що $d(x, L) = \alpha$.*

Доведення. Оскільки $L \neq X$, то існує елемент $a \in X \backslash L$. За умовою ($\mathcal{A}$) маємо: $f(\lambda) = d(\lambda a, L) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$. Функція $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, як композиція двох неперервних функцій $\lambda \mapsto \lambda a$ і $d(\cdot, L)$ сама неперервна, причому $f(0) = 0$, бо L, як лінійний підпростір, містить нульовий елемент, і $f(+\infty) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} f(\lambda) = +\infty$. Тому за теоремою про проміжне значення існує таке число $\mu \geq 0$, що $f(\mu) = \alpha$. Залишається покласти $x = \mu a$. $\diamondsuit$

Зауважимо, що оскільки $d(x, L) = d(x, \overline{L})$, то твердження теореми 1 буде виконуватись і в тому випадку, коли L – лише лінійний підпростір простору X, для якого $\overline{L} \neq X$.

Перед формулюванням наступного результату нагадаємо, що знаком $\supset$ ми позначаємо строге включення.

Теорема 2. *Нехай X – квазінормований простір, що задовольняє умову ($\mathcal{A}$), L_k – проксимінальні лінійні підпростори X при $k = 1, \ldots, n$, $X \supset L_1 \supset L_2 \supset ... \supset L_n$ і $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$. Тоді існує такий вектор x з X, що $d(x, L_k) = \alpha_k$ при $k = 1, \ldots, n$ і $|x| = \alpha_n$.*

Доведення. Оскільки кожна проксимінальна множина замкнена, то за теоремою 1 існує такий елемент $x_1 \in X_1$, що $d(x_1, L_1) = \alpha_1$. Взявши в L_1 елемент найкращого наближення y_1 для елемента x_1, ми отримаємо елемент $x = x_1 - y_1$, для якого $d(x, L_1) = d(x_1, L_1) = |x| = \alpha_1$. Отже, теорема 2 доведена при $n = 1$.

Припустимо, що $n \geq 2$ і теорема 2 доведена, коли число підпросторів дорівнює $n - 1$. Покажемо, що вона справедлива і для n підпросторів.

Нехай $m = n - 1$. За індуктивним припущенням існує такий елемент $x_m \in X$, що $d(x_m, L_k) = \alpha_k$ при $k = 1, ..., m$. Оскільки підпростір L_m проксимінальний, то існує такий елемент $y_m \in L_m$, що $d(x_m, L_m) = |x_m - y_m|$.

Покладемо $z_m = x_m - y_m$. Оскільки $L_m \supset L_n$, то існує такий елемент a_m, що $a_m \in L_m \backslash L_n$. Розглянемо функцію

$$f(\lambda) = d(\lambda a_m + z_m, L_n)$$

на проміжку $[0, +\infty)$, яка, очевидно, є неперервною.

З властивості 4° і 5° випливає, що

$$f(\lambda) \geq d(\lambda a_m, L_n) - d(z_m, L_n),$$

отже, $f(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$, адже $a_m \in X \setminus L_n$, а в X виконується умова $(\mathcal{A})$.

Зауважимо, що $d(z_m, L_n) = d(z_m, L_m) = \alpha_m$. Справді, $d(z_m, L_m) \leq d(z_m, L_n)$, бо $L_m \supseteq L_n$. Далі, на основі властивості 6°

$$d(z_m, L_m) = d(x_m - y_m, L_m) = d(x_m, L_m) = \alpha_m = |z_m|,$$

адже $y_m \in L_m$. Але $|z_m| = |z_m - 0| \geq d(z_m, L_n)$, бо $0 \in L_n$. Отже,

$$\alpha_m = d(z_m, L_m) \leq d(z_m, L_n) \leq |z_m| = \alpha_m,$$

звідки і випливають потрібні нам рівності.

Отож, $f(0) = d(z_m, L_n) = \alpha_m$. Оскільки $\alpha_n \geq \alpha_m$, то за теоремою про проміжне значення існує таке число $\mu \geq 0$, що $f(\mu) = \alpha_n$.

Покладемо $x_n = \mu a_m + z_m$. Ясно, що $d(x_n, L_n) = \alpha_n$. Оскільки і підпростір L_n проксимінальний, то існує такий елемент $y_n \in L_n$, що $|x_n - y_n| = d(x_n, L_n)$. Розглянемо елемент $x = x_n - y_n$. Оскільки $y_n \in L_n$, то

$$d(x, L_n) = d(x_n, L_n) = |x| = \alpha_n.$$

Крім того,

$$x = x_n - y_n = \mu a_m + z_m - y_n = x_m + \mu a_m - y_m - y_n.$$

Оскільки вектор $z = \mu a_m - y_m - y_n$ належить до L_m, то $z \in L_k$ для кожного $k = 1, \ldots, m$. В такому разі

$$d(x, L_k) = d(x_m + z, L_k) = d(x_m, L_k) = \alpha_k$$

при $k = 1, \ldots, m$. Тому x і є шуканим елементом. $\diamondsuit$

Теорема 3. *Нехай X – квазінормований простір з обмеженими кулями, що задовольняє умову* **(A)***, L_k – скінченновимірні лінійні підпростори X при, $k = 1, \ldots, n$, $X \supset L_1 \supset L_2 \supset ... \supset L_n$ і $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \ldots \leq \alpha_n$. Тоді існує такий вектор $x \in X$, що $d(x, L_k) = \alpha_k$ при $k = 1, \ldots, n$ і $|x| = \alpha_n$.*

Доведення. За твердженням 2 всі простори L_k є проксимінальними в X. Доведення теореми 2 показує, що для скінченновимірних підпросторів L_k вона залишається справедливою і в тому випадку, коли X задовольняє лише умову **(A)**. Тому теорема 3 негайно випливає з теореми 2.

7. Основна задача для нескінченної послідовності підпросторів

Доведемо тепер обіцяне узагальнення теореми Бернштейна.

Теорема 4. *Нехай $(L_n)_{n=1}^{\infty}$ – строго зростаюча послідовність скінченновимірних лінійних підпросторів L_n повного квазінормованого простору X з обмеженими кулями, який задовольняє умову **(A)** і $(\alpha_n)_{n=1}^{\infty}$ – спадна послідовність невід'ємних чисел α_n, яка прямує до нуля. Тоді існує такий елемент $x \in X$, що $d(x, L_n) = \alpha_n$ для кожного n.*

Доведення. За теоремою 3 для кожного n існує такий елемент $x_n \in X$, що $d(x_n, L_m) = \alpha_m$ при $m = 1, \dots, n$ і $|x_n| = \alpha_1$. Для довільних номерів n і m існує такий елемент $y_{m,n} \in L_m$, що $d(x_n, L_m) = |x_n - y_{m,n}|$. За побудовою маємо, що $|x_n - y_{m,n}| = d(x_n, L_m) = \alpha_m$ при $n \geq m$. Тому при $n \geq m$ будемо мати:

$$|y_{m,n}| = |y_{m,n} - x_n + x_n| \leq |y_{m,n} - x_n| + |x_n| = \alpha_m + \alpha_1 \leq 2\alpha_1.$$

Звідси випливає, що для кожного m існує таке число $\gamma_m > 0$, що $|y_{m,n}| \leq \gamma_m$ для кожного n. Оскільки кожна куля $B_m = \{y \in L_m : |y| \leq \gamma_m\}$ є компактною множиною в метричному просторі X, то вона є і секвенціально компактною, отже, з кожної послідовності її елементів можна вибрати збіжну в X підпослідовність. Використовуючи діагональний метод, ми можемо побудувати таку строго зростаючу послідовність номерів n_k, що для кожного m підпослідовність $(y_{m,n_k})_{k=1}^{\infty}$ послідовності $(y_{m,n})_{n=1}^{\infty}$ збігається в X до якогось елемента y_m.

Покажемо, що послідовність $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ є фундаментальною в X. Нехай $\varepsilon > 0$. Оскільки $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$, то існує такий номер $m \in \mathbb{N}$, що $\alpha_m < \frac{\varepsilon}{3}$. Послідовність $(y_{m,n_k})_{k=1}^{\infty}$ є збіжною, а значить, і фундаментальною в X. Тому існує такий номер k_0, що $k_0 \geq m$ і $|y_{m,n_k} - y_{m,n_j}| < \frac{\varepsilon}{3}$, як тільки $k, j \geq k_0$. Тоді при $k, j \geq k_0$ матимемо:

$$|x_{n_k} - x_{n_j}| \leq |x_{n_k} - y_{m,n_k}| + |y_{m,n_k} - y_{m,n_j}| + |y_{m,n_j} - x_{n_j}| < \varepsilon,$$

адже $n_k, n_j \geq n_{k_0} \geq k_0 \geq m$ і тому

$$|x_{n_k} - y_{m,n_k}| = \alpha_m = |y_{m,n_j} - x_{n_j}|,$$

а $\alpha_m < \frac{\varepsilon}{3}$.

Оскільки простір X повний, то фундаментальна послідовність $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ збігається до деякого елемента $x \in X$. Покажемо, що x і є шуканим елементом. Нехай m – довільний номер. Оскільки $n_k \geq m$ при $k \geq m$, бо $n_k \geq k$, то $d(x_{n_k}, L_m) = \alpha_m$ для кожного $k \geq m$. Тоді з неперервності функції $d(\cdot, L_m)$ випливає, що

$$d(x, L_m) = \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, L_m) = \lim_{\substack{k\to\infty \\ k\geq m}} d(x_{n_k}, L_m) = \lim_{k\to\infty} \alpha_m = \alpha_m.$$

8. Доповнення.

Після виступу на конференції «Функціональні методи в теорії наближень і теорії операторів», присвяченої пам'яті В.К. Дзядика (1919-1998), яка відбулась у серпні 2009 (див. [7]), авторам стали відомі і інші публікації, в яких розвивалася обернена теорема Бернштейна [8-13]. Найближчою з них за змістом до нашого дослідження є стаття [11], яка не перекриває отримані нами результати, бо в ній на метрику накладається умова монотонності. Доведена у цій праці основна теорема була нами анонсована в [14].

Література

[1] *Bernstein S.N.* Sur le problème inverse de la theorie de la meilleure approximation des fonctions continues // Comp. Rend. – 1938. – **206**. – P. 1520-1523.

[2] *Бернштейн С.Н.* Об одной обратной задаче теории приближения //Собрание сочинений в 4-х т. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т.2. – С.292-294.

[3] *Никольський С.М.* Приближение многочленами функций действительного переменного// Математика в СССР за 30 лет. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – С.288-318.

[4] *Тиман А.Ф.* Теория приближений функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624с.

[5] *Rolewicz S.* Metric linear spaces. – Warszawa: Polish Scientific Publisners, 1985. – 459p.

[6] *Маслюченко В.К.* Лінійні неперервні оператори. – Чернівці: Рута, 2002. – 72с.

[7] *Волошин Г.А., Маслюченко В.К.* До питання про узагальнення однієї теореми Бернштейна // FM 2009 Conference "Functional Methods in Approximation Theory and Operator Theory III"dedicated to the memory of V.K. Dzyadyk (1919-1998)., August 22-26, 2009. Abstracts. Kuiv, 2009. – C. 106-107.

[8] *Шведов А.С.* Существование елемента с заданными величинами наилучших приближений. – Москва, 1982. –20 с. – (Препр. / АН СССР. Института прикладной математики им. М.В. Келдыша; №55).

[9] *Шведов А.С.* Существование елемента с заданной последовательностью наилучших приближений // Теория приближений функций. Труды Международной конференции по теории приближений функций. Киев, 1983. – М.: Наука, 1987. – С. 473-475.

[10] *Lewicki G.* A theorem of Bernstein's type for linear projections // Zeszyty naukowe universytetu jagiellonskiego acta mathematica. – 1988.–**27**. – P. 23-27.

[11] *Васильев А.И.* Обратная задача теории наилучшего приближения в F-пространствах // Доклады Академии наук. – 1999. – С. 583-585.

[12] *Бородин П.А.* К задаче существования элемента с заданными уклонениями от расширяющейся системы подпространств // Мат. заметки.–2006.– **80**,№5. – С. 657-667.

[13] *Тюремских И.С.* Об одной задаче С.Н. Бернштейна // Уч. зап. Калин. гос. пед. ин-та. –1964. – **39** – С. 53-54.

[14] *Maslyuchenko V.K., Voloshyn H.A.* On one Bernstein's theorem // International Scientific Conference Infinite dimensional analysis and topology., May 27-June 1, 2009. Abstracts. Ivano-Frankivsk, 2009. – P. 24-26.

THE GENERALIZATION OF ONE BERNSTEIN'S THEOREM

Halyna VOLOSHYN, Volodymyr MASLYUCHENKO

Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University,
2 Kotsjubynskyi Str., Chernivtsi 58012, Ukraine

It is found conditions on the metric of an F-space X, such that the following generalization of well known inverse Bernstein theorem holds: for every strictly increasing sequence of finite dimensional linear subspaces L_n and for every vanishing sequence of reals α_n there is an element x of X, such that $d(x, L_n) = \alpha_n$ for every n.