ЗАУВАЖЕННЯ ДО ТЕОРЕМИ ГЛІВЕНКА-КАНТЕЛЛІ У СЕПАРАБЕЛЬНОМУ МЕТРИЧНОМУ ПРОСТОРІ

©2010 р. Іван МАЦАК[1], *Анатолій ПЛІЧКО*[2]

[1] Київський національний університет імені Тараса Шевченка
проспект Глушкова 4 д, Київ 03127, Україна
e-mail: mik@unicyb.kiev.ua
[2]Краківська політехніка ім. Тадеуша Косцюшка
вул. Варшавська 24, Краків 31-155, Польща
e-mail: aplichko@pk.edu.pl

Редакція отримала статтю 26 листопада 2010 р.

У замітці дається доведення теореми Глівенка-Кантеллі для сепарабельних метричних просторів. Доводиться також наступне твердження. Нехай X – випадковий елемент зі значеннями в сепарабельному метричному просторі T, $\mathcal{U}$ – довільний клас борелівських множин з T, $\delta > 0$, а $\partial_\delta(U)$ означає δ-окіл межі ∂U множини U. Тоді існує система борелівських множин $\mathcal{U}'$ з умовою: $\forall U \in \mathcal{U} \quad \exists U' \in \mathcal{U}', \quad U \subset U' \ : \ U' \backslash U \subset \partial_\delta(U)$, для якої виконується теорема Глівенка-Кантеллі.

Присвячується Володимирові Маслюченку з нагоди його 60-річчя

Вступ і основні результати. Для незалежних однаково розподілених випадкових величин (в.в.) $\xi_1, \xi_2, \ldots$ в $\mathbb{R}$ з функцією розподілу $F(t)$ *емпірична функція розподілу* визначається формулою

$$F_n^*(t) = \frac{1}{n} \sum\nolimits_{i=1}^{n} I_{(-\infty,t)}(\xi_i)\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

[0]УДК 519.21; MSC 2010: 60B10, 60B12, 60G50

Відома теорема Глівенка-Кантеллі [6], [3] стверджує, що майже напевне (м.н.)

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |F_n^*(t) - F(t)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,.$$

Природно постає питання про її узагальнення на ширші класи просторів. У теоремі Глівенка-Кантеллі фактично маємо справу з супремумом по півпрямих. Найприроднішою при узагальненні на простір $\mathbb{R}^n$ є заміна їх на півпростори або на їхні скінченні перетини. Для півпросторів це зробили Форте та Мур'є [4, с. 281], з додатковою умовою абсолютної неперервності розкладу даного випадкового вектора щодо міри Лебега λ. Ця умова була знята в працях Вольфовіца [17, с. 131], [18]. Ахмад [1] і Ранга Рао [8, с. 665, 675] незалежно отримали узагальнення на вимірні опуклі множини, за умови неперервності класу опуклих множин щодо розподілу даного випадкового вектора (означення див нижче). Прості приклади [5, с. 197] показують, що для довільних розподілів цю умову зняти не можна. Існує значна кількість праць, присвячених теоремі Глівенка-Кантеллі в $\mathbb{R}^n$. Докладну бібліографію див. у огляді [5]. Про пізніші результати щодо теореми Глівенка-Кантеллі у просторі $\mathbb{R}^n$ див. [12], [13].

Розглянемо деякі узагальнення теореми Глівенка-Кантеллі на сепарабельний метричний простір. Піонерськими тут були праці Варадараяна [16], Ранги Рао [9] та Сазонова [10]. Систематичне дослідження справедливості теореми Глівенка-Кантеллі в метричних просторах, у контексті слабкої рівномірної збіжності мір, було проведене Топсо та його співавторами [2], [14], а також деякими іншими математиками (див. огляд [7]). Уведемо небхідні позначення й означення.

Нехай (T, Σ) – вимірний простір, а $(X_i)_1^\infty$ – послідовність незалежних копій в.е. X, заданого на ймовірнісному просторі $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ зі значеннями в T. Позначимо через

$\mathcal{U}$ довільний підклас σ-алгебри Σ,

$\mathbb{P}(U) = \mathbb{Q}\{X \in U\}$, $U \in \mathcal{U}$ – теоретичний розподіл в.е. X (деякі результати природніше формулювати в термінах розподілу, тобто ймовірнісної міри на метричному просторі, не згадуючи про випадкові елементи),

$\mathbb{P}_n^*(U) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(X_i \in U)$ – емпіричний розподіл, де

$I(X_i \in U) = 1$ при $X_i \in U$ і $= 0$, при $X_i \notin U$.

Для метричного простору T з метрикою dist, за Σ братимемо сукупність борелівських множин. Позначатимемо також через $\partial_\delta(U)$ δ-окіл межі ∂U множини U.

Ми розглядаємо тільки сепарабельні метричні простори, спеціально про це не згадуючи. Усі міри вважаємо ймовірнісними.

Кажуть, що $\mathcal{U}$ є *GC-класом для розподілу* $\mathbb{P}$ [5, с. 196], або що для в.е. X і для класу $\mathcal{U}$ *виконується теорема Глівенка-Кантеллі*, коли м.н.

$$\sup_{U\in\mathcal{U}} |\mathbb{P}_n^*(U) - \mathbb{P}(U)| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty\,.$$

Супремум у цій формулі не завжди вимірний, а вимірність не завжди потрібна (пор. із зауваженням у [15, с. 240]). Для зліченного класу $\mathcal{U}$, звичайно, проблеми нема. У багатьох випадках вимірність доведена. Часто її просто постулюють.

Першим природним кроком для перевірки виконання теореми Глівенка-Кантеллі є розбиття в.е., чи радше відповідного розподілу, на дискретну (атомну) і неперервну (безатомну) частини і доведення теореми для кожної частини окремо. Це стверджує, наприклад, [15, лема 2 та заув. на с. 242]. Кожна система множин буде GC-класом для дискретного розподілу (безпосередній наслідок леми Шеффе [11]; див. також доведення теореми 7.1 з [9]; ми отримаємо цей факт як наслідок леми 1). Тому має сенс розглядати тільки безатомні розподіли, що надалі й робитимемо.

Нагадаємо [9, с. 660], що множина U метричного простору T називається $\mathbb{P}$-*неперервною*, якщо $\mathbb{P}(\partial U) = 0$.

Часом (див. напр. [14, с. 279]) вживаєтся зворотний термін: говориться про U-неперервність міри $\mathbb{P}$. Кожна опукла борелівська множина з $\mathbb{R}^m$ буде $\mathbb{P}$-неперервною для кожної міри $\mathbb{P}$, абсолютно неперервної відносно міри Лебега [5, с. 198]. Часто $\mathbb{P}$-неперервність також і необхідна для виконання теореми Глівенка-Кантеллі. Так простий приклад (див. [9, с. 679], [5, с. 197],) показує, що без умови $\mathbb{P}$-неперервності теорема Глівенка-Кантеллі може не виконуватися навіть для кругів з $\mathbb{R}^2$. Більше того, рівність $\mathbb{P}$-міри крайніх точок класу замкнених опуклих множин необхідна для виконання теореми Глівенка-Кантеллі для цього класу [5, с. 198]. Очевидні винятки отримуємо для опуклих ∂U. Так, наприклад, як тільки міра $\mathbb{P}$ в $\mathbb{R}^2$ зосереджена на одновимірному підпросторі L, то сукупність півпросторів буде GC-класом для розподілу $\mathbb{P}$, але міра межі кожного півпростру, яка містить L, дорівнює одиниці.

Клас $\mathcal{U}$ підмножин метричного простору T називатимемо $\mathbb{P}$-*одностайно неперервним*, якщо для кожного $\epsilon > 0$ існує $\delta > 0$ з

$$\rho(\delta) := \sup_{U \in \mathcal{U}} \mathbb{P}(\partial_\delta(U)) < \epsilon\,.$$

Інакше кажучи, $\mathbb{P}$-одностайна неперервність означає неперервність функції $\rho(\delta) = \rho_{\mathcal{U},\mathbb{P}}(\delta)$ в нулі. Ця властивість без назви неодноразово вживалася в літературі (див. напр. [10], [2, с. 2], [14, с. 282], [15, с. 242]) і еквівалентна так званій $\mathbb{P}$-рівномірності, яку ми не розглядатимемо. Звичайно, кожна множина $\mathbb{P}$-одностайно неперервного класу буде $\mathbb{P}$-неперервною. Наступне твердження показує важливість цього поняття.

Теорема 1. *Нехай X – випадковий елемент зі значеннями в метричному просторі T і клас множин $\mathcal{U}$ є $\mathbb{P}$-одностайно неперервним. Тоді $\mathcal{U}$ є GC-класом для розподілу $\mathbb{P}$.*

Самої $\mathbb{P}$-неперервності мало для виконання теореми 1, навіть для опуклих множин. Так, у праці [10] показано, що сукупність $\mathcal{H}$ усіх півпросторів нескінченновимірного банахового простору не буде GC-класом для довільної міри $\mathbb{P}$, відносно якої усі півпростори неперервні. Легко помітити, що кожен півпростір банахового простору буде $\mathbb{P}$-неперервним, наприклад, для невиродженої (тобто не зосередженої на жодній гіперплощині) гаусівської міри $\mathbb{P}$.

Зауваження 1. Невиродженість міри ще не гарантує $\mathbb{P}$-неперервності. Нехай, наприклад, S_n – послідовність кіл на площині радіусу n з центром у нулі. Розглянемо міру $\mathbb{P}(S_n) = 1/2^n$, $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2 \setminus \cup S_n) = 0$ і рівномірну на кожному S_n. Ця міра невироджена, але відповідні круги не будуть $\mathbb{P}$-неперервними.

Для класу $\mathcal{H}$ півпросторів банахового простору теорема 1 доведена в [10]. У загальному випадку вона випливає з еквівалентності $\mathbb{P}$-одностайної неперервності та $\mathbb{P}$-рівномірності (див. [2, Теорема 2]) і результату Варадараяна про слабку збіжність емпіричних розподілів до теоретичного [16]. Це, зокрема, зазначено у [14, с. 287].[1] Як добре відомо, теореми Глівенка-Кантеллі є специфікацією закону великих чисел (ЗВЧ) у (несепарабельному) банаховому просторі. Цікаво, що ЗВЧ у (сепарабельному) банаховому просторі виводиться з результатів про рівномірну слабку збіжність мір [9, Теорема 6.2].

[1]Автори вдячні рецензентові першого варіанту цієї замітки за вказівку на роботу [2] та деякі пояснення стосовно теореми Глівенка-Кантеллі.

Звичайно ж з того, що $\mathcal{U}$ є GC-класом для розподілу $\mathbb{P}$ не випливає його $\mathbb{P}$-одностайна неперервність, бо, як вже зазаначалося, не випливає навіть $\mathbb{P}$-неперервність. Наголосимо, що умова $\mathbb{P}$-одностайної неперервності далека від необхідності. *Носієм* $\operatorname{supp}\mathbb{P}$ імовірності $\mathbb{P}$ називаємо таку найменшу замкнену підмножину $S \subset T$, що $\mathbb{P}(S) = 1$. Заміна в теоремі 1 простору T на носій $\operatorname{supp}\mathbb{P}$ негайно дає загальніший результат.

У цій замітці наводиться ще одне доведення теореми 1 з використанням наближення X дискретними в.е. На нашу думку це доведення має певний методичний інтерес. Далі доводиться наступний результат, який видається нам новим.

Теорема 2. *Нехай X – випадковий елемент зі значеннями в метричному просторі T, $\mathcal{U}$ – довільний клас борелівських множин з T і $\delta > 0$. Тоді існує система борелівських множин $\mathcal{U}'$, яка є GC-класом для розподілу $\mathbb{P}$, з умовою*

$$\forall\, U \in \mathcal{U} \quad \exists\, U' \in \mathcal{U}' , \;\; U \subset U' \; : \; U' \backslash U \subset \partial_\delta(U) \, .$$

Доведення основних результатів. Підставою доведень буде наступна лема.

Лема 1. *Нехай у вимірному просторі (T, Σ) заданий випадковий елемент X і клас множин $V_i \in \Sigma$, $i \in \mathcal{I}$. Розглянемо клас $\mathcal{U}$ усіх "вимірних" об'єднань множин з (V_i) :*

$$\mathcal{U} = \Big\{ \bigcup\nolimits_{i \in I} V_i \in \Sigma \; : \; I \subset \mathcal{I} \Big\} \, . \tag{1}$$

Якщо для кожного $\epsilon > 0$ існує така скінченна множина $K \subset \mathcal{I}$, що $\mathbb{P}(\cup_{i \in \mathcal{I} \backslash K} V_i) < \epsilon$, то $\mathcal{U}$ є GC-класом для розподілу $\mathbb{P}$.

Доведення. Зафіксуємо довільне $\epsilon > 0$. За умовою леми існує така скінченна множина K, що $\mathbb{P}(\mathbb{V}) < \epsilon$, де $\mathbb{V} = \cup_{i \in \mathcal{I} \backslash K} V_i$. Покладемо $\overline{\mathbb{V}} = \cup_{i \in K} V_i$. Оскільки $\mathbb{P}_n^*(U)$ – випадкова міра, то для кожної множини $U \in \mathcal{U}$ напевне

$$|\mathbb{P}_n^*(U) - \mathbb{P}(U)| \le \Delta_1(U) + \Delta_2(U), \tag{2}$$

де

$$\Delta_1(U) = |\mathbb{P}_n^*(U \cap \mathbb{V}) - \mathbb{P}(U \cap \mathbb{V})| \, , \quad \Delta_2(U) = |\mathbb{P}_n^*(U \cap \overline{\mathbb{V}}) - \mathbb{P}(U \cap \overline{\mathbb{V}})| \, .$$

Оскільки $\mathbb{P}(\mathbb{V}) < \epsilon$, то на підставі ЗВЧ Колмогорова м.н.

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{U\in\mathcal{U}} \Delta_1(U) \le \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}_n^*(\mathbb{V}) + \mathbb{P}(\mathbb{V}) \le 2\mathbb{P}(\mathbb{V}) < 2\epsilon\,. \tag{3}$$

Покладемо $\mathcal{U}' = \{U' = \bigcup_{i\in I\cap K} V_i,\ I \subset \mathcal{I}\}$. Тоді для кожного $U \in \mathcal{U}$ існує $U' \in \mathcal{U}'$, для якої

$$U \cap \overline{\mathbb{V}} = U' \cap \overline{\mathbb{V}}\,.$$

Справді, для множини $U = \bigcup_{i\in I} V_i \subset \mathcal{U}$ досить взяти $U' = \bigcup_{i\in I\cap K} V_i \subset \mathcal{U}'$.

Це означає, що при $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &\sup\nolimits_{\mathcal{U}} \Delta_2(U) = \sup\nolimits_{\mathcal{U}'} \Delta_2(U') \le \\ \le\ &\sup\nolimits_{\mathcal{U}'} |\mathbb{P}_n^*(U' \cap \overline{\mathbb{V}}) - \mathbb{P}(U' \cap \overline{\mathbb{V}})| \le \\ \le\ &\sum\nolimits_{\mathcal{U}'} |\mathbb{P}_n^*(U' \cap \overline{\mathbb{V}}) - \mathbb{P}(U' \cap \overline{\mathbb{V}})| \to 0 \quad \text{м.н.} \end{aligned} \tag{4}$$

Останнє співвідношення випливає із ЗВЧ Колмогорова, бо множина $\mathcal{U}'$ скінчена.

Збираючи разом (2), (3) та (4) отримуємо

$$\limsup_{n\to\infty} \sup\nolimits_{\mathcal{U}} |\mathbb{P}_n^*(U) - \mathbb{P}(U)| < 2\epsilon\,.$$

Але число ϵ довільне, тому $\mathcal{U}$ буде GC-класом для розподілу $\mathbb{P}$. □

Наступний простий наслідок добре відомий.

Наслідок 1. *Нехай X дискретний випадковий елемент зі значеннями у вимірному просторі (T, Σ). Тоді Σ є GC-класом для розподілу $\mathbb{P}$.*

Доведення. Якщо X набуває зліченної кількості значень x_i, то візьмемо $V_i = \{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$. За лемою 1, $\mathcal{U}$ є GC-класом. Оскільки для кожного $A \in \Sigma$ існує таке $U \in \mathcal{U}$, що $\mathbb{P}(A \triangle U) = 0$, то Σ також є GC-класом. □

Наслідок 2. *Нехай X – випадковий елемент зі значеннями у вимірному просторі (T, Σ), (V_i) – послідовність неперетинних множин з Σ, а $\mathcal{U}$ – клас множин, визначений рівністю (1). Тоді $\mathcal{U}$ є GC-класом для розподілу $\mathbb{P}$.*

Наслідок 2 отримуємо безпосередньо з леми 1, бо для неперетинної послідовності множин (V_i) виконується умова цієї леми.

Доведення теореми 1. Зафіксуємо довільне $\epsilon > 0$ та у відповідності з $\mathbb{P}$-одностайною неперервністю підберемо $\delta > 0$ так, щоб $\rho(2\delta) < \epsilon$. У (сепарабельному!) метричному просторі T існує послідовність неперетинних борелівських множин V_n, кожна діаметру $< \delta$, об'єднання яких становить увесь простір. Зафіксуємо у кожній множині V_n по точці x_n. Нарешті, введемо допоміжні в.е. $X^\delta = x_n$, якщо $X \in V_n$ і $X_i^\delta = x_n$, якщо $X_i \in V_n$, $n = 1, 2, \ldots$, та розподіли $\mathbb{P}_\delta(U) = \mathbb{Q}\{X^\delta \in U\}$ і $\mathbb{P}^*_{\delta n}(U) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(X_i^\delta \in U)$.

Нехай $U \in \mathcal{U}$. Очевидно, напевне

$$|\mathbb{P}^*_n(U) - \mathbb{P}(U)| \le \Delta_1(U) + \Delta_2(U) + \Delta_3(U)\,, \tag{5}$$

де

$$\Delta_1(U) = |\mathbb{P}^*_n(U) - \mathbb{P}^*_{\delta n}(U)|,$$
$$\Delta_2(U) = |\mathbb{P}^*_{\delta n}(U) - \mathbb{P}_\delta(U)|\,,$$
$$\Delta_3(U) = |\mathbb{P}_\delta(U) - \mathbb{P}(U)|\ .$$

Оцінимо згори доданки правої частини нерівності (5).

Почнімо з $\Delta_1(U)$. Оскільки напевне

$$\mathrm{dist}(X, X^\delta) < \delta\,, \tag{6}$$

то звідси отримуємо

$$|I(X \in U) - I(X^\delta \in U)| \le I(X^\delta \in \partial_\delta(U))\,. \tag{7}$$

Справді, ліва частина нерівності (7) завжди не перевищує 1. Тому, якщо станеться подія $\{X^\delta \in \partial_\delta(U)\}$, то в правій частині (7) буде 1 і нерівність виконана.

Навпаки, нехай сталася протилежна подія. Тоді можливі випадки:

i) $X^\delta \in \{x \in U : \mathrm{dist}(x, T \setminus U) \ge \delta\}$, або

ii) $X^\delta \in \{x \in T : \mathrm{dist}(x, U) \ge \delta\}$.

Для випадку *i*) з нерівності (6) випливає, що сталися події $\{X \in U\}$ та $\{X^\delta \in U\}$, а отже, ліворуч у нерівності (7) буде $1 - 1 = 0$.

У випадку *ii*) аналогічно маємо: сталися події $\{X \in T \setminus U\}$ та $\{X^\delta \in T \setminus U\}$, тобто ліворуч у (7) буде $0 - 0 = 0$. Таким чином, в обох випадках нерівність (7) виконується.

З неї одержуємо

$$\Delta_1(U) \le \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} I(X_i^\delta \in \partial_\delta(U)) = \mathbb{P}^*_{\delta n}(\partial_\delta(U))\,.$$

Але в.е. X^δ дискретний, тому у відповідності з наслідком 1 можна записати

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \sup\nolimits_{\mathcal{U}} \Delta_1(U) \le \limsup_{n\to\infty} \sup\nolimits_{\mathcal{U}} \mathbb{P}^*_{\delta n}(\partial_\delta(U)) = \\ = \quad & \sup\nolimits_{\mathcal{U}} \mathbb{P}_\delta(\partial_\delta(U)) \le \sup\nolimits_{\mathcal{U}} \mathbb{P}(\partial_{2\delta}(U)) = \rho(2\delta) < \epsilon \quad \text{м.н.} \end{aligned} \tag{8}$$

Оцінка $\Delta_2(U)$. Оскільки в.е. X^δ дискретний, то за наслідком 1

$$\lim_{n\to\infty} \sup\nolimits_{\mathcal{U}} \Delta_2(U) = 0 \quad \text{м.н.} \tag{9}$$

Оцінка $\Delta_3(U)$. Враховуючи нерівність (7), маємо

$$\begin{aligned} \Delta_3(U) &= \left|\mathbb{E}I(X^\delta \in U) - \mathbb{E}I(X \in U)\right| \le \\ &\le \mathbb{E}\left|I(X^\delta \in U) - I(X \in U)\right| \le \\ &\le \mathbb{E}I(X^\delta \in \partial_\delta(U)) \le \mathbb{E}I(X \in \partial_{2\delta}(U)) = \\ &= \mathbb{Q}\{X \in \partial_{2\delta}(U)\} \le \rho(2\delta) < \epsilon\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Збираючи разом співвідношення (5), (8)–(10) отримаємо

$$\limsup_{n\to\infty} \sup\nolimits_{\mathcal{U}} |\mathbb{P}^*_n(U) - \mathbb{P}(U)| < 2\epsilon \quad \text{м.н.}$$

Але число ϵ довільне, тому $\mathcal{U}$ є GC-класом для розподілу $\mathbb{P}$. □

Доведення теореми 2. Розглянемо у просторі T послідовність (V_i) неперетинних борелівських множин, кожна діаметру $< \delta$, об'єднання яких становить увесь простір. Тоді зрозуміло, що для кожного $U \subset \mathcal{U}$ існує мінімальна підпослідовність $\{V_i \,:\, i \in I_U\}$ така, що

$$U \subset U' = \cup_{i \in I_U} V_i\,,$$

причому без однієї з множин V_i останнє включення вже не виконується.

Позначимо через $I_\partial \subset I_U$ номери множин, які перетинають межу множини U. З геометричних міркувань ясно, що

$$U' \backslash U \subset \cup_{i \in I_\partial} V_i \subset \partial_\delta(U)\,.$$

Тоді, згідно з наслідком 2, $\mathcal{U}' = \{U'\}$ є GC-класом для розподілу $\mathbb{P}$. $\square$

Приклад. Наведемо ще приклад застосування $\mathbb{P}$-одностайної неперервності. Через B^* позначатимемо спряжений до банахового простору B, а через S^* – одиничну сферу простору B^*. Через $\mathcal{H}$ позначатимемо клас усіх замкнених півпросторів простору B, тобто множин вигляду $H_{x^*t} = \{x \in B : x^*(x) \leq t\}\,,\ x^* \in S^*$, $t \in \mathbb{R}$. Очевидно,

$$\partial_\delta(H_{x^*t}) = \{x \in B : |x^*(x) - t| \leq \delta\}.$$

Твердження 1. *Нехай X – нормально розподілений випадковий елемент зі значеннями в банаховому просторі B, $D \subset S^*$ і $\alpha > 0$. Клас $\{H_{x^*t} : x^* \in D\,,\ \mathbb{D}x^*(X) \geq \alpha\}$ є $\mathbb{P}$-одностайно неперервним.*

Доведення. Нехай γ – стандартна нормальна в.в., а $\Phi(t)$ – її функція розподілу. Тоді для кожного t

$$\Phi(t+\delta) - \Phi(t-\delta) \leq \Phi(\delta) - \Phi(-\delta) \leq \sqrt{2/\pi}\delta\,.$$

Звідси, враховуючи, що для кожного $x^* \in B$ маємо

$$x^*(X) = \sqrt{\mathbb{D}x^*(X)}\gamma + \mathbb{E}x^*(X),$$

негайно отримуємо $\mathbb{P}$-одностайну неперервність. $\square$

Вибираючи у просторі $B = C[0,1]$ поточкові функціонали, дістаємо

Наслідок 3. *Нехай $X = (X(s), s \in [0,1])$ – нормально розподілений неперервний випадковий процес з $\mathbb{D}X(s) \geq \alpha > 0$ (наприклад, X – стаціонарний процес), (X_i) – незалежні копії X. Тоді виконується теорема Глівенка-Кантеллі: м.н.*

$$\sup_{s\in[0,1],\ t\in\mathbb{R}} \left| \frac{1}{n}\sum\nolimits_{i=1}^{n} I(X_i(s) < t) - \mathbb{Q}\{X(s) < t\} \right| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty\,.$$

Зауваження 2. Твердження 1 залишається вірним і для довільно розподілених в.е. при умові: для кожного $x^* \in D$ в.в. $x^*(X)$ має рівномірно обмежену симетричну відносно 0 щільність, монотонну на $(0,\infty)$.

Відповідно, наслідок 3 буде вірним для довільних неперервних випадкових процесів, для яких щільність розподілу в.в. $X(s)$ задовольняє аналогічну умову.

[1] Ahmad S. *Sur le théorème de Glivenko-Cantelli* // C. R. Acad. Sci., Paris. – 1961. – **252**. – P. 1413–1417.

[2] Billingsley P., Topsøe F. *Uniformity in weak convergence* // Z. Wahrschein. verw. Geb. – 1967. – **7**. – P. 1–16.

[3] Cantelli F.P. *Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilita* // Ist. Ital. Attuary. – 1933. – **4**. – P. 421–424.

[4] Fortet R., Mourier E. *Convergence de la répartition empirique vers la rèpartition théorique* // Ann. Sci. École Norm. Sup. – 1953. — 3^e sér, **70**. – P. 267–285.

[5] Gaenssler[Gänssler] P., Stute W. *Empirical processes: a survey of results for independent and identically distributed random variables* // Annals of Probab. – 1979. – **7**. – P. 193–243.

[6] Glivenko V. *Sulla determinazione empirica della leggi di probabilità* // Giorn. Ist. Ital. Attuari. – 1933. – **4**. – P. 92–99.

[7] Hoffmann-Jørgensen J. *The Glivenko-Cantelli theorem and the Ranga Rao theorem* // Functional analysis, VI (Dubrovnik, 1999), P. 65–290, Various Publ. Ser. (Aarhus), 45, Univ. Aarhus, Aarhus, 2000.

[8] Ranga Rao[Rao] R. *Generalization of a theorem of Pólya and applications* // Ann. Math. Statist. – 1960. – **31**. – P. 241 (abstract).

[9] Ranga Rao[Rao] R. *Relation between weak and uniform convergence of measures with applications*// Ann. Math. Statistics. – 1962. – **33**. – P. 659–680.

[10] Сазонов В.В. *К теореме Гливенко-Кантелли*// Теория вероятн. и ее примен. – 1963. – **8**, №3. – С. 299–303.

[11] Scheffé H. *A uuseful convergence theorem for probability distributions*// Ann. Math. Statist. – 1947. – **18**. – P. 434–438.

[12] Talagrand M. *The Glivenko-Cantelli problem* // Annals of Probab. – 1987. – **15**. – P. 837–870.

[13] Talagrand M. *The Glivenko-Cantelli problem, ten years later* // J. Theoret. Probab. – 1996. – **9**. – P. 371–384.

[14] Topsøe F. *On the connection between P-continuity and P-uniformity in weak convergence* // Теория вероятн. и ее примен. – 1967. – **12**, №2. – С. 279–288.

[15] Topsøe F. *On the Glivenko-Cantelli theorem* // Z. Wahrschein. verw. Geb. – 1970. – **14**. – P. 239–250.

[16] Varadarajan V.S. *On the convergence of sample probability distributions* // Sankyā. – 1958. – **19**. – P. 23–26.

[17] Wolfowitz J. *Generalization of the theorem of Glivenko-Cantelli* // Ann. Math. Statistics. – 1954. – **25**. – P. 131-138.

[18] Wolfowitz J. *Convergence of the empiric distribution function on half-spaces*// Contribution to probability and statistics. Stanford Univ. Press, Stanford, Calif. – 1960. P. 504–507.

REMARKS ON THE GLIVENKO-CANTELLI THEOREM IN A SEPARABLE METRIC SPACE

Ivan MATSAK[1], *Anatolij PLICHKO*[2]

[1] Kyiv National Taras Shevchenko University
4*d*, Academician Glushkov Avenue, Kyiv 03127, Ukraine
[2] Cracow University of Technology
ul. Warszawska 24, Cracow 31-155, Poland

We give a proof of the Glivenko-Cantelli theorem for separable metric spaces. It is proved also the following statement: Let X be a random element in a separable metric space T, $\mathcal{U}$ be an arbitrary class of Borel sets in T, $\delta > 0$, and $\partial_\delta(U)$ denotes the δ-neighborhood of the border ∂U of a set U. Then there exists a system of Borel sets $\mathcal{U}'$ with the condition: $\forall U \in \mathcal{U} \quad \exists U' \in \mathcal{U}', \;\; U \subset U' \; : \; U' \backslash U \subset \partial_\delta(U)$, for which the Glivenko-Cantelli theorem is valid.