АСИМПТОТИЧНЕ ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ З ВИРОДЖЕННЯМ

©2010 р. Петро САМУСЕНКО

Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова
вул. Пирогова, 9, Київ 01030

Редакція отримала статтю 26 листопада 2010 р.

У роботі побудовано асимптотичний розв'язок першої крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу з виродженням.

1 Вступ

У середині XX століття М.І. Вишик та Л.А. Люстерник розробили загальний метод побудови асимптотичних розвинень розв'язків лінійних сингулярно збурених рівнянь з частинними похідними [1]. При цьому розв'язок відповідної крайової задачі з гладкою межею складався з двох частин: регулярної та примежевої. Члени регулярної частини асимптотики визначались з алгебраїчних рівнянь, а члени примежевої частини – зі звичайних диференціальних рівнянь. Для розв'язування крайових задач з негладкою межею В.Ф. Бутузов ввів новий тип примежевих функцій – кутові примежеві функції [2]. Це дозволило задовольнити відповідні крайові умови.

Подібні ідеї використовувались в [3, 4] для побудови асимптотичних розв'язків крайових задач Діріхле і Неймана для сингулярно збуреного нелінійного рівняння теплопровідності з імпульсною дією.

УДК 517.956, MSC 2000: 35J55, 35C20

Лінійні диференціальні рівняння з частинними похідними гіперболічного типу у випадку повільно змінних коефіцієнтів розглядались С.Ф. Фещенком та М.І. Шкілем [3, с. 226 – 245]. Як і в [4, с. 70 – 125], С.Ф. Фещенко та М.І. Шкіль розв'язок першої крайової задачі шукали у вигляді ряду (метод Фур'є). При цьому збіжність побудованого ряду не доводилась.

Регулярно збурені лінійні системи диференціальних рівнянь з частинними похідними і матрицею біля старших похідних досліджувались М.А. Сотніченком та В.П. Яковцем. У випадку сталої кронекерової структури граничної в'язки матриць ними було розроблено алгоритм побудови асимптотичних розв'язків певних типів зазначених систем [5].

2 Постановка задачі. Основні припущення

Розглянемо першу крайову задачу

$$\varepsilon^2 B(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A(t,\varepsilon)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon C(x,t,\varepsilon)u + f(x,t,\varepsilon), \tag{1}$$

$t \in [0;T]$, $x \in [0;L]$,

$$u(0,t,\varepsilon) = a(t),\ u(L,t,\varepsilon) = b(t), \tag{2}$$

$$u(x,0,\varepsilon) = c(x),\ u(x,T,\varepsilon) = d(x), \tag{3}$$

де $u = u(x,t,\varepsilon)$ – шукана 2-вимірна вектор-функція, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(x,t,\varepsilon)$ – квадратні матриці 2-го порядку, $f(x,t,\varepsilon)$, $a(t)$, $b(t)$, $c(x)$, $d(x)$ – 2-вимірні вектор-функції з дійсними або комплекснозначними компонентами, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$, $\varepsilon_0 \ll 1$.

Надалі припускаємо виконання таких умов:

1. Компоненти матриць $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(x,t,\varepsilon)$ та вектор-функції $f(x,t,\varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра ε, тобто

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0}\varepsilon^i A_i(t),\ B(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0}\varepsilon^i B_i(t),\ t \in [0;T],$$

$$C(x,t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0}\varepsilon^i C_i(x,t),\ f(x,t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0}\varepsilon^i f_i(x,t),\ (x,t) \in \overline{D},$$

де $\overline{D} = \{(x,t) : 0 \leq x \leq L,\ 0 \leq t \leq T\}$.

2. $A_i(t)$, $B_i(t) \in C^\infty[0;T]$, $C_i(x,t)$, $f_i(x,t) \in C^\infty(\overline{D})$, $i \geq 0$.

3. $a(t) \in C^5[0;T]$, $b(t) \in C^5[0;T]$; $c(x) \in C^4[0;L]$, $d(x) \in C^4[0;L]$.
4. $a^{(2k)}(0) = a^{(2k)}(T) = 0$, $b^{(2k)}(0) = b^{(2k)}(T) = 0$, $k = \overline{0,1}$.
5. $c^{(2k)}(0) = c^{(2k)}(L) = 0$, $d^{(2k)}(0) = d^{(2k)}(L) = 0$, $k = \overline{0,1}$.
6. $f(0,t,\varepsilon) = f(L,t,\varepsilon) = 0$, $t \in [0;T]$.
7. $\lambda_0(t) < 0$, де $\lambda_0(t)$ – власне значення матриці $A_0(t)$ відносно $B_0(t)$.

3 Алгоритм побудови класичного розв'язку

Нехай в'язка $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ – регулярна, має один скінченний і один нескінченний елементарний дільник. Тоді існують [6] неособливі матриці $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon)$, $(t,\varepsilon) \in \overline{K}$,

$$\overline{K} = \{(t,\varepsilon) : 0 \le t \le T,\ 0 \le \varepsilon \le \varepsilon_1\},\ \varepsilon_1 \le \varepsilon_0,$$

компоненти яких допускають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε такі, що

$$P(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = H(t,\varepsilon) \equiv diag\{b(t,\varepsilon), e_2(t,\varepsilon)\},$$

$$P(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)Q(t,\varepsilon) = \Omega(t,\varepsilon) \equiv diag\{e_1(t,\varepsilon), \lambda_0(t,\varepsilon)\},$$

де

$$e_i(t,0) = 1,\ i = 1,2,\ b(t,0) = 0,\ \lambda_0(t,0) = \lambda_0(t)$$

. При цьому $P(t,\varepsilon)$, $Q(t,\varepsilon) \in C^\infty[0;T]$.

Розв'язок $u^{(1)} = u^{(1)}(x,t,\varepsilon)$ задачі (1), (3) такий, що

$$u^{(1)}(0,t,\varepsilon) = 0,\ u^{(1)}(L,t,\varepsilon) = 0,$$

шукатимемо у вигляді

$$u^{(1)}(x,t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} z_s^{(1)}(t,\varepsilon) v_s^{(1)}(x), \tag{4}$$

де $z_s^{(1)}(t,\varepsilon)$ – шукана 2-вимірна вектор-функція, а $v_s^{(1)}(x)$ – скалярна функція, що задовольняє рівняння

$$(v_s^{(1)}(x))'' + \omega_{s1}^2 v_s^{(1)}(x) = 0, \tag{5}$$

$\omega_{s1} = \dfrac{s\pi}{L}$, з крайовими умовами

$$v_s^{(1)}(0) = v_s^{(1)}(L) = 0.$$

Нехай

$$v_s^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \omega_{s1} x,\ s \in N.$$

Тоді

$$\int_0^L v_s^{(1)}(x) v_k^{(1)}(x) dx = \delta_{sk},$$

де δ_{sk} – символ Кронекера.

Підставляючи (4) в (1), з урахуванням (5), домножуючи отриману рівність на $v_s^{(1)}(x)$ та інтегруючи її обидві частини за змінною x в межах від 0 до L, дістаємо

$$\varepsilon^2 B(t,\varepsilon)(z_s^{(1)})'' + \omega_{s1}^2 A(t,\varepsilon) z_s^{(1)} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} C_{sk}(t,\varepsilon) z_k^{(1)} + f_s(t,\varepsilon),\ s \in N, \quad (6)$$

де

$$C_{sk}(t,\varepsilon) = \int_0^L C(x,t,\varepsilon) v_k^{(1)}(x) v_s^{(1)}(x) dx,\ f_s(t,\varepsilon) = \int_0^L f(x,t,\varepsilon) v_s^{(1)}(x) dx.$$

У системі (6) зробимо заміну $z_s^{(1)}(t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon) r_s(t,\varepsilon)$ і домножимо її обидві частини зліва на $P(t,\varepsilon)$. Матимемо

$$\varepsilon^2 H(t,\varepsilon) r_s'' + \omega_{s1}^2 \Omega(t,\varepsilon) r_s = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} D_{0sk}(t,\varepsilon) r_k + \varepsilon^2 (D_1(t,\varepsilon) r_s + G(t,\varepsilon) r_s') +$$

$$+ P(t,\varepsilon) f_s(t,\varepsilon), \quad (7)$$

де $D_{0sk}(t,\varepsilon) = P(t,\varepsilon) C_{sk}(t,\varepsilon) Q(t,\varepsilon)$, $s,k \in N$, $D_1(t,\varepsilon) = -P(t,\varepsilon) B(t,\varepsilon) \times$ $\times Q''(t,\varepsilon)$, $G(t,\varepsilon) = -2P(t,\varepsilon) B(t,\varepsilon) Q'(t,\varepsilon)$.

Запишемо систему (7) наступним чином:

$$\varepsilon^2 \widetilde{H}(t,\varepsilon) r'' + \widetilde{\Omega}(t,\varepsilon) r = \varepsilon (\widetilde{D}_0(t,\varepsilon) + \varepsilon \widetilde{D}_1(t,\varepsilon)) r + \varepsilon^2 \widetilde{G}(t,\varepsilon) r' + \widetilde{f}(t,\varepsilon), \quad (8)$$

де $r(t,\varepsilon)$ та $\widetilde{f}(t,\varepsilon)$ – нескінченновимірні вектори з компонентами $r_s(t,\varepsilon)$ та $P(t,\varepsilon) f_s(t,\varepsilon)$ відповідно,

$\widetilde{H}(t,\varepsilon) = diag\{H(t,\varepsilon), H(t,\varepsilon), ...\}$, $\widetilde{\Omega}(t,\varepsilon) = diag\{\omega_{11}^2 \Omega(t,\varepsilon), \omega_{21}^2 \Omega(t,\varepsilon), ...\}$,

$\widetilde{D}_0(t,\varepsilon)$ – нескінченна матриця, що складається з блоків $D_{0sk}(t,\varepsilon)$, $k,s \in N$, $\widetilde{D}_1(t,\varepsilon) = diag\{D_1(t,\varepsilon), D_1(t,\varepsilon), ...\}$, $\widetilde{G}(t,\varepsilon) = diag\{G(t,\varepsilon), G(t,\varepsilon), ...\}$.

Нехай

$$\widetilde{H}(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \widetilde{H}^{(i)}(t),\ \widetilde{\Omega}(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \widetilde{\Omega}^{(i)}(t), \widetilde{D}_0(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \widetilde{D}_0^{(i)}(t),$$

$$\widetilde{D}_1(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \widetilde{D}_1^{(i)}(t),\ \widetilde{f}(t,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \widetilde{f}^{(i)}(t).$$

При цьому $\widetilde{H}^{(0)}(t) \equiv \widetilde{H}^{(0)} = const$.

Розв'язок системи (8) шукатимемо у вигляді

$$r(t,\varepsilon) = \Pi_+(t,\varepsilon)\xi_+(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon), \tag{9}$$

де $\xi_+(t,\varepsilon)$ – нескінченновимірна вектор-функція, що є розв'язком задачі

$$\varepsilon\frac{d\xi_+}{dt} = \Lambda_+(t,\varepsilon)\xi_+,\ \xi_+(T,\varepsilon) = a, \tag{10}$$

a – нескінченновимірний вектор, всі компоненти якого дорівнюють 1; $\Pi_+(t,\varepsilon)$ – нескінченна матриця, $\Lambda_+(t,\varepsilon)$ – нескінченна діагональна матриця та $g(t,\varepsilon)$ – нескінченновимірна вектор-функція вигляду

$$\Pi_+(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \Pi_+^{(i)}(t),\ \Lambda_+(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i \Lambda_+^{(i)}(t),\ g(t,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i g^{(i)}(t). \tag{11}$$

Підставимо (9), враховуючи (10), до системи (8). Тоді зрівнюючи коефіцієнти біля $\xi_+(t,\varepsilon)$ і вільні члени, матимемо

$$\widetilde{H}(t,\varepsilon)\Pi_+(t,\varepsilon)\Lambda_+^2(t,\varepsilon) + \widetilde{\Omega}(t,\varepsilon)\Pi_+(t,\varepsilon) = \varepsilon(\widetilde{D}_0(t,\varepsilon) + \varepsilon\widetilde{D}_1(t,\varepsilon))\Pi_+(t,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon^2\widetilde{G}(t,\varepsilon)\Pi_+'(t,\varepsilon) + \varepsilon\widetilde{G}(t,\varepsilon)\Pi_+(t,\varepsilon)\Lambda_+(t,\varepsilon) - \varepsilon^2\widetilde{H}(t,\varepsilon)\Pi_+''(t,\varepsilon)- \tag{12}$$
$$-2\varepsilon\widetilde{H}(t,\varepsilon)\Pi_+'(t,\varepsilon)\Lambda_+(t,\varepsilon) - \varepsilon\widetilde{H}(t,\varepsilon)\Pi_+(t,\varepsilon)\Lambda_+'(t,\varepsilon),$$

$$\widetilde{\Omega}(t,\varepsilon)g(t,\varepsilon) = \varepsilon(\widetilde{D}_0(t,\varepsilon) + \varepsilon\widetilde{D}_1(t,\varepsilon))g(t,\varepsilon) + \varepsilon^2\widetilde{G}(t,\varepsilon)g'(t,\varepsilon)+ \tag{13}$$
$$+\widetilde{f}(t,\varepsilon) - \varepsilon^2\widetilde{H}(t,\varepsilon)g''(t,\varepsilon).$$

Розглянемо спочатку тотожність (12). Зрівнюючи в ній коефіцієнти біля однакових степенів ε^i, $i = \overline{0,m}$, отримуємо:

$$\widetilde{H}^{(0)}\Pi_+^{(0)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t))^2 + \widetilde{\Omega}^{(0)}(t)\Pi_+^{(0)}(t) = 0, \tag{14}$$

$$\widetilde{H}^{(0)}\Pi_+^{(i)}(t)(\Lambda_+^{(0)}(t))^2+\widetilde{\Omega}^{(0)}(t)\Pi_+^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{i-1}\widetilde{D}_0^{(j)}(t)\Pi_+^{(i-j-1)}(t)+$$
$$+\sum_{j=0}^{i-2}\Big(\widetilde{D}_1^{(j)}(t)\Pi_+^{(i-j-2)}(t)+\widetilde{G}^{(j)}(t)(\Pi_+^{(i-j-2)}(t))'-\widetilde{H}^{(j)}(t)(\Pi_+^{(i-j-2)}(t))''\Big)+$$
$$+\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j-1}\Big(\widetilde{G}^{(j)}(t)\Pi_+^{(k)}(t)\Lambda_+^{(i-k-j-1)}(t)-2\widetilde{H}^{(j)}(t)(\Pi_+^{(k)}(t))'\Lambda_+^{(i-k-j-1)}(t)-$$
$$-\widetilde{H}^{(j)}(t)\Pi_+^{(k)}(t)(\Lambda_+^{(i-k-j-1)}(t))'\Big)-\widetilde{H}^{(0)}\Pi_+^{(0)}(t)\Big(2\Lambda_+^{(0)}(t)\Lambda_+^{(i)}(t)+\qquad(15)$$
$$+\sum_{j=1}^{i-1}\Lambda_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(i-j)}(t)\Big)-\widetilde{H}^{(0)}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j}\Pi_+^{(j)}(t)\Lambda_+^{(k)}(t)\Lambda_+^{(i-k-j)}(t)-$$
$$-\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=0}^{i-j}\sum_{s=0}^{i-k}\widetilde{H}^{(j)}(t)\Pi_+^{(k)}(t)\Lambda_+^{(s)}(t)\Lambda_+^{(i-k-j-s)}(t)-\sum_{j=1}^{i}\widetilde{\Omega}^{(j)}(t)\Pi_+^{(i-j)}(t),$$

$i=\overline{1,m}$, $\Pi_+^{(k)}(t)\equiv 0$, $\Lambda_+^{(k)}(t)\equiv 0$, $t\in[0;T]$, $k<0$.

Доведемо розв'язність матричних рівнянь (14), (15). Нехай $p_{l+}^{(0)}(t)$, $l\in N$, – стовпці матриці $\Pi_+^{(0)}(t)$, $\Lambda_+^{(0)}(t)=diag\{0,\lambda_{1+}^{(0)}(t),0,\lambda_{2+}^{(0)}(t),...\}$.

Тоді систему (14) можна записати наступним чином:

$$(\widetilde{\Omega}^{(0)}(t)+(\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2\widetilde{H}^{(0)})p_{2l+}^{(0)}(t)=0,$$
$$\widetilde{\Omega}^{(0)}(t)p_{2l-1,+}^{(0)}(t)=0,\quad l\in N.$$

Покладемо
$$\lambda_{l+}^{(0)}(t)=\omega_{l1}\sqrt{-\lambda_0(t)},\ l\in N,$$
$$p_{2l-1,+}^{(0)}(t)\equiv 0,\ \{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2j-1}\equiv 0,\ t\in[0;T],\ j,l\in N,$$
$$\{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2j}\equiv 0,\ t\in[0;T],\ j\neq l,\ j,l\in N,$$

$\{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l}$, $l\in N$, визначимо далі.

За побудовою матриці $\Pi_+^{(0)}(t)$ і $\Lambda_+^{(0)}(t)$ діагональні. А тому відповідні добутки нескінченних матриць у (14) існують і є діагональними матрицями.

Із системи (15) отримуємо

$$(\widetilde{\Omega}^{(0)}(t)+(\lambda_{l+}^{(0)}(t))^2\widetilde{H}^{(0)})p_{2l+}^{(i)}(t)=b_{2l+}^{(i)}(t),$$

$$\widetilde{\Omega}^{(0)}(t)p_{2l-1,+}^{(i)}(t)=b_{2l-1,+}^{(i)}(t),\quad l\in N$$

, де

$$b_{2l+}^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{i-1}\widetilde{D}_0^{(j)}(t)p_{2l+}^{(i-j-1)}(t)+\sum_{j=0}^{i-2}\Big(\widetilde{D}_1^{(j)}(t)p_{2l+}^{(i-j-2)}(t)+\widetilde{G}^{(j)}(t)(p_{2l+}^{(i-j-2)}(t))'-$$

$$-\widetilde{H}^{(j)}(t)(p_{2l+}^{(i-j-2)}(t))''\Big)+\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j-1}\Big(\lambda_{l+}^{(i-k-j-1)}(t)\widetilde{G}^{(j)}(t)p_{2l+}^{(k)}(t)-$$

$$-2\lambda_{l+}^{(i-k-j-1)}(t)\widetilde{H}^{(j)}(t)(p_{2l+}^{(k)}(t))'-(\lambda_{l+}^{(i-k-j-1)}(t))'\widetilde{H}^{(j)}(t)p_{2l+}^{(k)}(t)\Big)-$$

$$-\widetilde{H}^{(0)}p_{2l+}^{(0)}(t)\Big(2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\lambda_{l+}^{(i)}(t)+\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_{l+}^{(j)}(t)\lambda_{l+}^{(i-j)}(t)\Big)-$$

$$-\widetilde{H}^{(0)}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j}\lambda_{l+}^{(k)}(t)\lambda_{l+}^{(i-k-j)}(t)p_{2l+}^{(j)}(t)-$$

$$-\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=0}^{i-j}\sum_{s=0}^{i-k}\lambda_{l+}^{(s)}(t)\lambda_{l+}^{(i-k-j-s)}(t)\widetilde{H}^{(j)}(t)p_{2l+}^{(k)}(t)-\sum_{j=1}^{i}\widetilde{\Omega}^{(j)}(t)p_{2l+}^{(i-j)}(t),$$

$l\in N$; $p_{l+}^{(i)}(t)$, $l\in N$, $i=\overline{1,m}$, – стовпці матриці $\Pi_+^{(i)}(t)$, $\Lambda_+^{(i)}(t)=diag\{0,\lambda_{1+}^{(i)}(t),0,\lambda_{2+}^{(i)}(t),...\}$.

Тоді

$$p_{2l-1,+}^{(i)}(t)\equiv 0,\ t\in[0;T],\quad i=\overline{1,m},$$

$$\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j-1}=\frac{\{b_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j-1}}{\omega_{j1}^2},\quad i=\overline{1,m},\quad j,l\in N,$$

$$\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j}=\frac{\{b_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2j}}{\lambda_0(t)(\omega_{j1}^2-\omega_{l1}^2)},\ i=\overline{1,m},\ j\neq l,\ j,l\in N,$$

$$\{p_{2l+}^{(i)}(t)\}_{2l}\equiv 0,\ t\in[0;T],\ i=\overline{1,m},\ l\in N,$$

$$\lambda_{l+}^{(i)}(t)=\frac{1}{2\lambda_{l+}^{(0)}(t)\{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l}}\left(\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{h=1}^{\infty}\{\widetilde{D}_0^{(j)}(t)\}_{2l,h}\{p_{2l+}^{(i-j-1)}(t)\}_h+\right.$$

$$+\sum_{j=0}^{i-2}\sum_{h=1}^{\infty}\Big(\{\widetilde{D}_1^{(j)}(t)\}_{2l,h}\{p_{2l+}^{(i-j-2)}(t)\}_h+\{\widetilde{G}^{(j)}(t)\}_{2l,h}\{p_{2l+}^{(i-j-2)}(t)\}'_h-$$

$$-\{\widetilde{H}^{(j)}(t)\}_{2l,h}\{p_{2l+}^{(i-j-2)}(t)\}''_h\Big)+$$

$$+\sum_{j=0}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j-1}\sum_{h=1}^{\infty}\Big(\lambda_{l+}^{(i-k-j-1)}(t)\{\widetilde{G}^{(j)}(t)\}_{2l,h}\{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h-$$

$$-2\lambda_{l+}^{(i-k-j-1)}(t)\{\widetilde{H}^{(j)}(t)\}_{2l,h}\{p_{2l+}^{(k)}(t)\}'_h-$$

$$-(\lambda_{l+}^{(i-k-j-1)}(t))'\{\widetilde{H}^{(j)}(t)\}_{2l,h}\{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h\Big)-\{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l}\sum_{j=1}^{i-1}\lambda_{l+}^{(j)}(t)\lambda_{l+}^{(i-j)}(t)-$$

$$-\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{i-j}\lambda_{l+}^{(k)}(t)\lambda_{l+}^{(i-k-j)}(t)\{p_{2l+}^{(j)}(t)\}_{2l}-$$

$$-\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=0}^{i-j}\sum_{s=0}^{i-k}\sum_{h=1}^{\infty}\lambda_{l+}^{(s)}(t)\lambda_{l+}^{(i-k-j-s)}(t)\{\widetilde{H}^{(j)}(t)\}_{2l,h}\{p_{2l+}^{(k)}(t)\}_h-$$

$$-\sum_{j=1}^{i}\sum_{h=1}^{\infty}\{\widetilde{\Omega}^{(j)}(t)\}_{2l,h}\{p_{2l+}^{(i-j)}(t)\}_h\Bigg),\quad i=\overline{1,m},\quad l\in N.$$

Розглянемо тепер тотожність (13). Зрівнюючи в ній коефіцієнти біля однакових степенів ε^i, $i=\overline{0,m}$, отримуємо:

$$\widetilde{\Omega}^{(0)}(t)g^{(0)}(t)=\widetilde{f}^{(0)}(t),$$

$$\widetilde{\Omega}^{(0)}(t)g^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{i-1}\widetilde{D}_0^{(j)}(t)g^{(i-j-1)}(t)+\sum_{j=0}^{i-2}\Big(\widetilde{D}_1^{(j)}(t)g^{(i-j-2)}(t)+$$

$$+\widetilde{G}^{(j)}(t)(g^{(i-j-2)}(t))'-\widetilde{H}^{(j)}(t)(g^{(i-j-2)}(t))''\Big)-\sum_{j=1}^{i}\widetilde{\Omega}^{(j)}(t)g^{(i-j)}(t)+\widetilde{f}^{(i)}(t),$$

$i=\overline{1,m}$, $g^{(k)}(t)\equiv 0$, $t\in[0;T]$, $k<0$.

Таким чином,

$$g^{(0)}(t)=(\widetilde{\Omega}^{(0)}(t))^{-1}\widetilde{f}^{(0)}(t),$$

$$g^{(i)}(t)=(\widetilde{\Omega}^{(0)}(t))^{-1}\Bigg(\sum_{j=0}^{i-1}\widetilde{D}_0^{(j)}(t)g^{(i-j-1)}(t)+\sum_{j=0}^{i-2}\Big(\widetilde{D}_1^{(j)}(t)g^{(i-j-2)}(t)+$$

$$+\widetilde{G}^{(j)}(t)(g^{(i-j-2)}(t))' - \widetilde{H}^{(j)}(t)(g^{(i-j-2)}(t))''\Big) - \sum_{j=1}^{i} \widetilde{\Omega}^{(j)}(t) g^{(i-j)}(t) + \widetilde{f}^{(i)}(t)\Bigg),$$

$i = \overline{1, m}$.

Формули для визначення $p_{l+}^{(i)}(t)$, $\lambda_{l+}^{(i)}(t)$, $l \in N$, $i = \overline{1, m}$, отримані за умови існування відповідних нескінченних матриць у системі (15). Зупинимося на цьому питанні докладніше.

Вважатимемо, що пара натуральних чисел (j, l) належить множині A $((j, l) \in A)$, якщо $j = 2q - 1, 2q$; $l = 2r - 1, 2r$; $q \neq r$, $q, r \in N$.
8. Припустимо, що $m = 1$.

Нехай $\{p_{2l+}^{(0)}(t)\}_{2l} \equiv \{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l} = const$, $t \in [0; T]$, $l \in N$. Тоді за побудовою

$$\{\widetilde{D}_0^{(0)}(t) p_{2l+}^{(0)}\}_k = \begin{cases} \dfrac{O(1)\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}}{(\omega_{j1} - \omega_{l1})^2},\ (k, 2l) \in A, \\ O(1)\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l},\ (k, 2l) \notin A,\ k = 2j - 1, 2j;\ j, l \in N, \end{cases}$$

причому стала $O(1)$ не залежить від j, l.

Отже, $p_{l+}^{(1)}(t)$, $\lambda_{l+}^{(1)}(t)$, $l \in N$, для всіх $t \in [0; T]$ існують і

$$\{p_{2l+}^{(1)}(t)\}_{2j-1} = \begin{cases} \dfrac{O(1)\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}}{\omega_{j1}^2(\omega_{j1} - \omega_{l1})^2},\ (2j - 1, 2l) \in A, \\ O(1)\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l},\ (2j - 1, 2l) \notin A,\ j, l \in N; \end{cases} \tag{16}$$

$$\{p_{2l+}^{(1)}(t)\}_{2j} = \frac{O(1)\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}}{(\omega_{j1}^2 - \omega_{l1}^2)(\omega_{j1} - \omega_{l1})^2},\ (2j, 2l) \in A,\ j, l \in N; \tag{17}$$

$$\lambda_{l+}^{(1)}(t) = O(1)\omega_{l1},\ l \in N, \tag{18}$$

стала $O(1)$ не залежить від j, l.

Оскільки $\widetilde{\Omega}^{(0)}(t)$ – діагональна матриця, то

$$\{g^{(i)}(t)\}_k = \frac{O(1)}{\omega_{j1}^4},\ i = 0, 1;\ k = 2j - 1, 2j;\ j \in N,$$

зі сталою $O(1)$, що не залежить від j.

Нехай $w_+(t,\varepsilon) = \Pi_+(t,\varepsilon)\xi_+(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon)$. Аналогічно визначаємо $w_-(t,\varepsilon) = \Pi_-(t,\varepsilon)\xi_-(t,\varepsilon) + g(t,\varepsilon)$. При цьому вважатимемо $\xi_-(t,\varepsilon)$ розв'язком задачі

$$\varepsilon\frac{d\xi_-}{dt} = \Lambda_-(t,\varepsilon)\xi_-,\ \xi_-(0,\varepsilon) = a, \tag{19}$$

і

$$\lambda_{l-}^{(0)}(t) = -\omega_{l1}\sqrt{-\lambda_0(t)},\ l \in N.$$

Побудуємо вектор-функцію

$$u_1^{(1)}(x,t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)\sum_{s=1}^{\infty}(w_{s+}(t,\varepsilon) + w_{s-}(t,\varepsilon))v_s^{(1)}(x), \tag{20}$$

де

$$w_{s+}(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix}\{w_+(t,\varepsilon)\}_{2s-1}\\ \{w_+(t,\varepsilon)\}_{2s}\end{pmatrix},\ s \in N,$$

$$\{w_+(t,\varepsilon)\}_j = \sum_{l=1}^{\infty}\{\Pi_+(t,\varepsilon)\}_{jl}\{\xi_+(t,\varepsilon)\}_l + \{g(t,\varepsilon)\}_j,\ j = 2s-1, 2s,\ s \in N.$$

Аналогічно визначаємо $w_{s-}(t,\varepsilon)$.

Невідомі $\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}$ і $\{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}$, $l \in N$, знаходимо із системи

$$\begin{aligned}\{w_+(0,\varepsilon)\}_{2l} + \{w_-(0,\varepsilon)\}_{2l} &= \sum_{j=1}^{2}\{Q^{-1}(0,\varepsilon)\}_{2j}\{c_l\}_j,\\ \{w_+(T,\varepsilon)\}_{2l} + \{w_-(T,\varepsilon)\}_{2l} &= \sum_{j=1}^{2}\{Q^{-1}(T,\varepsilon)\}_{2j}\{d_l\}_j,\end{aligned} \tag{21}$$

$l \in N$, де $\{c_l\}_j$ і $\{d_l\}_j$ – компоненти, відповідно, векторів

$$c_l = \int_0^L c(x)v_l^{(1)}(x)dx, \quad d_l = \int_0^L d(x)v_l^{(1)}(x)dx, \quad l \in N.$$

Використовуючи формули Крамера, запишемо систему (21) наступним чином

$$\begin{aligned}\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l} &= f_1\left(\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}\right),\\ \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l} &= f_2\left(\{p_{2l+}^{(0)}\}_{2l}, \{p_{2l-}^{(0)}\}_{2l}\right),\end{aligned} \tag{22}$$

$l \in N$, де

$$\left\| f_i \left(\{p^{(0)}_{2l+}\}_{2l}, \{p^{(0)}_{2l-}\}_{2l} \right) \right\| \leq \frac{M_1}{\omega^4_{l1}} + \varepsilon M_2 \sum_{\substack{h=1 \\ h \neq l}}^{\infty} \frac{|\{p^{(0)}_{2h+}\}_{2h}| + |\{p^{(0)}_{2h-}\}_{2h}|}{|\omega^2_{l1} - \omega^2_{h1}|(\omega_{l1} - \omega_{h1})^2}, \; i = 1, 2,$$

сталі M_1, M_2 не залежать від l.

А тому на множині S_{l4}, де

$$S_{l4} = \left\{ (\{p^{(0)}_{2l+}\}_{2l}, \{p^{(0)}_{2l-}\}_{2l}) \in R^2 : \max\{|\{p^{(0)}_{2l+}\}_{2l}|, |\{p^{(0)}_{2l-}\}_{2l}|\} \leq \frac{M}{\omega^4_{l1}} \right\},$$

$l \in N$, система (22) має єдиний розв'язок. При цьому

$$\|p^{(0)}_{2l+}\| \leq \frac{M}{\omega^4_{l1}}, \; \|p^{(0)}_{2l-}\| = \frac{M}{\omega^4_{l1}}, \; l \in N$$

(стала M не залежить від l).

Надалі припускаємо виконання таких умов:
9. Компоненти $\{p^{(0)}_{2l+}\}_{2l}$, $\{p^{(0)}_{2l-}\}_{2l}$, $l \in N$, розв'язку системи (22) відмінні від нуля.
10.

$$\{w_+(0,\varepsilon)\}_{2l-1} + \{w_-(0,\varepsilon)\}_{2l-1} = \sum_{j=1}^{2} \{Q^{-1}(0,\varepsilon)\}_{1j}\{c_l\}_j,$$

$$\{w_+(T,\varepsilon)\}_{2l-1} + \{w_-(T,\varepsilon)\}_{2l-1} = \sum_{j=1}^{2} \{Q^{-1}(T,\varepsilon)\}_{1j}\{d_l\}_j,$$

$l \in N$.

Для знайдених $\{p^{(0)}_{2l+}\}_{2l}$ та $\{p^{(0)}_{2l-}\}_{2l}$ ряд (20) збігається абсолютно і рівномірно у прямокутнику $\overline{D}$. При цьому можливе почленне диференціювання ряду (20) до двох разів включно; отримані таким чином ряди збігаються абсолютно і рівномірно для всіх $(x,t) \in \overline{D}$.

За побудовою

$$u^{(1)}_1(x,0,\varepsilon) = c(x), \; u^{(1)}_1(x,T,\varepsilon) = d(x).$$

Вектор-функція $w_{s+}(t,\varepsilon) + w_{s-}(t,\varepsilon)$ задовольняє систему (7) з точністю $O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega^2_{s1}}\right)$, $s \in N$. Сталу в $O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega^2_{s1}}\right)$ позначимо через k_0.

У системі (7) зробимо заміну

$$r_s(t,\varepsilon) = w_{s+}(t,\varepsilon) + w_{s-}(t,\varepsilon) + y_s^{(1)}(t,\varepsilon). \tag{23}$$

Матимемо

$$\varepsilon^2 H(t,\varepsilon)(y_s^{(1)})'' + \omega_{s1}^2 \Omega(t,\varepsilon) y_s^{(1)} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} D_{0sk}(t,\varepsilon) y_k^{(1)} +$$

$$+\varepsilon^2 (D_1(t,\varepsilon) y_s^{(1)} + G(t,\varepsilon)(y_s^{(1)})') + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_{s1}^2}\right),\ s \in N. \tag{24}$$

Покладемо

$$y_s^{(1)}(0,\varepsilon) = 0,\ y_s^{(1)}(T,\varepsilon) = 0,\ s \in N. \tag{25}$$

Запишемо систему (24) у координатній формі:

$$\varepsilon^2 b(t,\varepsilon)(y_{s1}^{(1)})'' + \omega_{s1}^2 e_1(t,\varepsilon) y_{s1}^{(1)} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \{D_{0sk}(t,\varepsilon)\}_{1j} y_{kj}^{(1)} +$$

$$+\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{2} \left(\{D_1(t,\varepsilon)\}_{1j} y_{sj}^{(1)} + \{G(t,\varepsilon)\}_{1j} (y_{sj}^{(1)})' \right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_{s1}^2}\right), \tag{26}$$

$$\varepsilon^2 e_2(t,\varepsilon)(y_{s2}^{(1)})'' + \omega_{s1}^2 \lambda_0(t,\varepsilon) y_{s2}^{(1)} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \{D_{0sk}(t,\varepsilon)\}_{2j} y_{kj}^{(1)} +$$

$$+\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{2} \left(\{D_1(t,\varepsilon)\}_{2j} y_{sj}^{(1)} + \{G(t,\varepsilon)\}_{2j} (y_{sj}^{(1)})' \right) + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_{s1}^2}\right), \tag{27}$$

$s \in N$, де $y_{si}^{(1)}$ – i-та компонента вектор-функції $y_s^{(1)}$.
11. Припустимо, що $b(t,\varepsilon) = \varepsilon b_1(t,\varepsilon)$, $b_1(t,0) < 0$, $t \in [0;T]$.

Тоді

$$y_{si}^{(1)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T G_i^{(1)}(t,\tau,\varepsilon) h_{si}^{(1)}(\tau,\varepsilon) d\tau,\ i = 1,2,\ s \in N, \tag{28}$$

де $G_1^{(1)}(t,\tau,\varepsilon)$, $G_2^{(1)}(t,\tau,\varepsilon)$ – функції Гріна однорідних крайових задач

$$(y_{s1}^{(1)})'' + \frac{\omega_{s1}^2}{\varepsilon^3 b_1(t,0)}\, y_{s1}^{(1)} = 0,$$

$$y_{s1}^{(1)}(0,\varepsilon)=0,\ y_{s1}^{(1)}(T,\varepsilon)=0,$$

$s\in N$, та

$$(y_{s2}^{(1)})''+\frac{\omega_{s1}^2\lambda_0(t)}{\varepsilon^2}\,y_{s2}^{(1)}=0,$$

$$y_{s2}^{(1)}(0,\varepsilon)=0,\ y_{s2}^{(1)}(T,\varepsilon)=0,$$

$s\in N$, відповідно, а

$$h_{s1}^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\omega_{s1}^2O(1)y_{s1}^{(1)}+\frac{\varepsilon}{b(\tau,\varepsilon)}\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\{D_{0sk}(t,\varepsilon)\}_{1j}y_{kj}^{(1)}+$$

$$+\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\left(\{D_1(t,\varepsilon)\}_{1j}y_{sj}^{(1)}+\{G(t,\varepsilon)\}_{1j}(y_{sj}^{(1)})'\right)+O\left(\frac{\varepsilon}{\omega_{s1}^2}\right)\Bigg),$$

$$h_{s2}^{(1)}(\tau,\varepsilon)=\omega_{s1}^2O(\varepsilon)y_{s2}^{(1)}+\frac{\varepsilon}{e_2(\tau,\varepsilon)}\Bigg(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\{D_{0sk}(t,\varepsilon)\}_{2j}y_{kj}^{(1)}+$$

$$+\varepsilon\sum_{j=1}^{2}\left(\{D_1(t,\varepsilon)\}_{2j}y_{sj}^{(1)}+\{G(t,\varepsilon)\}_{2j}(y_{sj}^{(1)})'\right)+O\left(\frac{\varepsilon}{\omega_{s1}^2}\right)\Bigg),$$

$s\in N$.

Нехай

$$0<\beta<\min_{0\le t\le T}\left\{\sqrt{-\lambda_0(t)},\frac{1}{\sqrt{-b_1(t,0)}}\right\}.$$

Тоді існує [7, с. 83, 84] така додатна стала d_1 така, що

$$|G_1^{(1)}(t,\tau,\varepsilon)|\le\begin{cases}\dfrac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}d_1}{\omega_{s1}}\,\exp\left(\dfrac{\beta\omega_{s1}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\,(\tau-t)\right),\ 0\le\tau\le t,\\[2ex]\dfrac{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}d_1}{\omega_{s1}}\,\exp\left(\dfrac{\beta\omega_{s1}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\,(t-\tau)\right),\ t\le\tau\le T,\end{cases}$$

$$|(G_1^{(1)}(t,\tau,\varepsilon))'_\tau|\le\begin{cases}d_1\exp\left(\dfrac{\beta\omega_{s1}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\,(\tau-t)\right),\ 0\le\tau\le t,\\[2ex]d_1\exp\left(\dfrac{\beta\omega_{s1}}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}\,(t-\tau)\right),\ t\le\tau\le T,\end{cases}$$

$$|G_2^{(1)}(t,\tau,\varepsilon)| \le \begin{cases} \dfrac{\varepsilon d_1}{\omega_{s1}} \exp\left(\dfrac{\beta\omega_{s1}}{\varepsilon}(\tau - t)\right), \ 0 \le \tau \le t, \\ \dfrac{\varepsilon d_1}{\omega_{s1}} \exp\left(\dfrac{\beta\omega_{s1}}{\varepsilon}(t-\tau)\right), \ t \le \tau \le T, \end{cases}$$

$$|(G_2^{(1)}(t,\tau,\varepsilon))'_\tau| \le \begin{cases} d_1 \exp\left(\dfrac{\beta\omega_{s1}}{\varepsilon}(\tau - t)\right), \ 0 \le \tau \le t, \\ d_1 \exp\left(\dfrac{\beta\omega_{s1}}{\varepsilon}(t-\tau)\right), \ t \le \tau \le T, \end{cases} .$$

З наведених оцінок випливає, що для таких достатньо великих k_2, що

$$k_2 > \frac{2d_1k_0}{\beta}\max_{0\le t\le T}\left\{1, -\frac{1}{b_1(t,0)}\right\},$$

оператор, визначений за допомогою (28), відображує опуклу компактну множину $D_{s4}^{(2)}$, де

$$D_{s4}^{(2)} = \left\{y_s^{(1)}(t,\varepsilon) \in C[0;T] : ||y_s^{(1)}(t,\varepsilon)|| \le \frac{k_2\varepsilon^2}{\omega_{s1}^4}\right\}, s \in N, \ \varepsilon \in [0;\varepsilon_1],$$

в себе і є неперервним на ній. А тому він має нерухомі точки на множині D_{s4} [8, с. 628].

Отже, система (28) сумісна. При цьому мають місце рівності (25).

Використовуючи метод доведення від супротивного, показуємо єдиність знайденого розв'язку системи (28) [9, с. 147 – 149].

Розв'язок $u^{(2)} = u^{(2)}(x,t,\varepsilon)$ задачі (1), (2) такий, що

$$u^{(2)}(x,0,\varepsilon) = 0, \ u^{(2)}(x,T,\varepsilon) = 0,$$

шукатимемо у вигляді

$$u^{(2)}(x,t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} z_s^{(2)}(x,\varepsilon)v_s^{(2)}(t), \tag{29}$$

де $z_s^{(2)}(x,\varepsilon)$ – шукана 2-вимірна вектор-функція, а

$$v_s^{(2)}(t) = \sqrt{\frac{2}{T}}\sin\omega_{s2}t, \ \omega_{s2} = \frac{s\pi}{T}, \ s \in N.$$

Згідно умови 7 $detA(t,\varepsilon) \neq 0$, $t \in [0;T]$. А тому, підставляючи (29) в (1), домножуючи отриману рівність на $A^{-1}(t,\varepsilon)$ зліва та на $v_s^{(2)}(t)$, інтегруючи її обидві частини за змінною t в межах від 0 до T, дістаємо

$$(z_s^{(2)})'' = -\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} U_{sk}(x,\varepsilon) z_k^{(2)} + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{k2}^2 V_{sk}(\varepsilon) z_k^{(2)} - h_s(x,\varepsilon),\ s \in N, \tag{30}$$

де

$$U_{sk}(x,\varepsilon) = \int_0^T A^{-1}(t,\varepsilon) C(x,t,\varepsilon) v_k^{(2)}(t) v_s^{(2)}(t) dt,$$

$$V_{sk}(\varepsilon) = \int_0^T A^{-1}(t,\varepsilon) B(t,\varepsilon) v_k^{(2)}(t) v_s^{(2)}(t) dt,$$

$$h_s(x,\varepsilon) = \int_0^T A^{-1}(t,\varepsilon) f(x,t,\varepsilon) v_s^{(2)}(t) dt, \quad s,k \in N$$

.

Систему (30) запишемо наступним чином

$$(z^{(2)})'' = -\varepsilon \widetilde{U}(x,\varepsilon) z^{(2)} + \varepsilon^2 \widetilde{V}(\varepsilon) z^{(2)} - \widetilde{h}(x,\varepsilon), \tag{31}$$

де $z^{(2)}(x,\varepsilon)$ та $\widetilde{h}(x,\varepsilon)$ – нескінченновимірні вектори з компонентами $z_s^{(2)}(x,\varepsilon)$ та $h_s(x,\varepsilon)$ відповідно, $\widetilde{U}(x,\varepsilon)$ та $\widetilde{V}(\varepsilon)$ – нескінченні матриці, що складаються з блоків $U_{sk}(x,\varepsilon)$ та $\omega_{k2}^2 V_{sk}(\varepsilon)$, $s,k \in N$.

Розв'язок системи (31) шукаємо у вигляді

$$z^{(2)}(x,\varepsilon) = p(x,\varepsilon), \tag{32}$$

де $p(x,\varepsilon)$ – нескінченновимірна вектор-функція така, що

$$p(x,\varepsilon) = \sum_{i=0}^{m} \varepsilon^i p^{(i)}(x). \tag{33}$$

Підставляючи (32) до системи (31), дістаємо

$$p''(x,\varepsilon) = -\varepsilon \widetilde{U}(x,\varepsilon) p(x,\varepsilon) + \varepsilon^2 \widetilde{V}(\varepsilon) p(x,\varepsilon) - \widetilde{h}(x,\varepsilon). \tag{34}$$

Зрівнюючи в тотожності (34) коефіцієнти біля однакових степенів ε^i, $i = \overline{0,m}$, отримуємо:

$$(p^{(0)}(x))'' = -\widetilde{h}^{(0)}(x), \tag{35}$$

$$(p^{(i)}(x))'' = -\sum_{j=0}^{i-1} \widetilde{U}^{(j)}(x)p^{(i-j-1)}(x) + \sum_{j=0}^{i-2} \widetilde{V}^{(j)}p^{(i-j-2)}(x) - \widetilde{h}^{(i)}(x), \quad (36)$$

$i = \overline{1,m}$, $p^{(k)}(x) \equiv 0$, $x \in [0;L]$, $k < 0$, де

$$\widetilde{U}(x,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \widetilde{U}^{(i)}(x),\ \widetilde{V}(\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \widetilde{V}^{(i)},\ \widetilde{h}(x,\varepsilon) = \sum_{i\geq 0} \varepsilon^i \widetilde{h}^{(i)}(x).$$

Таким чином,

$$p^{(0)}(x) = a_0 + b_0 x - \int_0^x \left(\int_0^x \widetilde{h}^{(0)}(x)dx \right) dx, \quad (37)$$

де a_0 та b_0 – нескінченновимірні вектори зі сталими компонентами, що будуть знайдені нижче; $p^{(i)}(x)$, $i = \overline{1,m}$, рекурентним чином визначаються із системи (36). При цьому вважається, що сталі, які виникають під час інтегрування, дорівнюють нулю, тобто

$$p^{(i)}(x) = -\int_0^x \left(\int_0^x \left(\sum_{j=0}^{i-1} \widetilde{U}^{(j)}(x)p^{(i-j-1)}(x) - \sum_{j=0}^{i-2} \widetilde{V}^{(j)}p^{(i-j-2)}(x) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \widetilde{h}^{(i)}(x) \right) dx \right) dx,\ i = \overline{1,m}. \quad (38)$$

Надалі припускаємо виконання таких умов:

12.

$$\frac{\partial^{2k+1} A^{-1}(0,\varepsilon)C(x,0,\varepsilon)}{\partial t^{2k+1}} = \frac{\partial^{2k+1} A^{-1}(T,\varepsilon)C(x,T,\varepsilon)}{\partial t^{2k+1}} = 0,\ x \in [0;L],\ k = 0,1.$$

13.

$$\frac{\partial A^{-1}(0,\varepsilon)B(0,\varepsilon)}{\partial t} = \frac{\partial A^{-1}(T,\varepsilon)B(T,\varepsilon)}{\partial t} = 0.$$

14.

$$\frac{\partial^{2k} A^{-1}(0,\varepsilon)f(x,0,\varepsilon)}{\partial t^{2k}} = \frac{\partial^{2k} A^{-1}(T,\varepsilon)f(x,T,\varepsilon)}{\partial t^{2k}} = 0,\ x \in [0;L],\ k = 0,1.$$

Тоді

$$\{U_{sk}(x,\varepsilon)\}_{ij} = \frac{O(1)}{(\omega_{k2} - \omega_{s2})^5},\ \{V_{sk}(\varepsilon)\}_{ij} = \frac{O(1)}{(\omega_{k2} - \omega_{s2})^4},$$

$$\{h_s(x,\varepsilon)\}_{ij} = \frac{O(1)}{\omega_{s2}^5},$$

$i,j=1,2$; $k\neq s$; $k,s\in N$, причому стала $O(1)$ не залежить від k, s.

Припускаючи виконання умови 8, побудуємо вектор-функцію

$$u_1^{(2)}(x,t,\varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} w_s(x,\varepsilon)v_s^{(2)}(t), \tag{39}$$

де

$$w_s(x,\varepsilon) = \begin{pmatrix} \{w(x,\varepsilon)\}_{2s-1} \\ \{w(x,\varepsilon)\}_{2s} \end{pmatrix},\ s\in N,$$
$$\{w(x,\varepsilon)\}_j = \{p(x,\varepsilon)\}_j,\ j=2s-1,2s,\ s\in N.$$

Вектори a_0 та b_0 підберемо так, щоб

$$u_1^{(2)}(0,t,\varepsilon) = a(t),\ u_1^{(2)}(L,t,\varepsilon) = b(t),$$

тобто, щоб

$$w_s(0,\varepsilon) = a_s,\ w_s(L,\varepsilon) = b_s,\ s\in N, \tag{40}$$

$a_s = \int\limits_0^T a(t)v_s^{(2)}(t)dt$, $b_s = \int\limits_0^T b(t)v_s^{(2)}(t)dt$, $s\in N$.

Запишемо систему (40) наступним чином

$$a_0 = \widetilde{a}, \tag{41}$$

$$(E+T_0(\varepsilon))b_0 = T_1(\varepsilon), \tag{42}$$

де

$$T_0(\varepsilon) = -\frac{\varepsilon}{L}\int\limits_0^L\left(\int\limits_0^x x\widetilde{U}^{(0)}(x)dx\right)dx,$$

$$T_1(\varepsilon) = \frac{1}{L}\left(\widetilde{b} - a_0 + \int\limits_0^L\left(\int\limits_0^x\left(\widetilde{h}^{(0)}(x)+\varepsilon\widetilde{h}^{(1)}(x)\right)dx\right)dx +\right.$$

$$\left.+\varepsilon\int\limits_0^L\left(\int\limits_0^x\widetilde{U}^{(0)}(x)\left(a_0 - \int\limits_0^x\left(\int\limits_0^\tau\widetilde{h}^{(0)}(t)dt\right)d\tau\right)dx\right)dx\right),$$

де $\widetilde{a}$ та $\widetilde{b}$ – нескінченновимірні вектори з компонентами a_s, b_s відповідно.

За побудовою

$$\{a_0\}_l = \frac{O(1)}{\omega_{l2}^5},\ l \in N,$$

зі сталою $O(1)$, що не залежить від l.

Позначимо

$$||T_0(\varepsilon)|| = \sup_{i \in N} \sum_{j=1}^{\infty} |\{T_0(\varepsilon)\}_{ij}|.$$

Оскільки $||T_0(\varepsilon)|| = O(\varepsilon)$, то рівняння (42) відносно b_0 сумісне, причому

$$\{b_0\}_l = \frac{O(1)}{\omega_{l2}^5},\ l \in N,$$

стала $O(1)$ не залежить від l [10, с. 43].

Тоді ряд (39) збігається абсолютно і рівномірно у прямокутнику $\overline{D}$. При цьому можливе почленне диференціювання ряду (39) до двох разів включно; отримані таким чином ряди збігаються абсолютно і рівномірно для всіх $(x, t) \in \overline{D}$.

Вектор-функція $w_s(x, \varepsilon)$ задовольняє систему (30) з точністю $O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_{s2}^3}\right)$, $s \in N$.

У системі (30) зробимо заміну

$$z_s^{(2)}(x, \varepsilon) = w_s(x, \varepsilon) + y_s^{(2)}(x, \varepsilon). \tag{43}$$

Матимемо

$$(y_s^{(2)})'' = -\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} U_{sk}(x, \varepsilon) y_k^{(2)} + \varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{k2}^2 V_{sk}(\varepsilon) y_k^{(2)} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_{s2}^3}\right), \tag{44}$$

$s \in N$.

Покладемо

$$y_s^{(2)}(0, \varepsilon) = 0,\ y_s^{(2)}(L, \varepsilon) = 0,\ s \in N. \tag{45}$$

15. Припустимо, що

$$\frac{\{Q(t,0)\}_{12}\{Q(t,0)\}_{21}}{det\, Q(t,0)} < 0,\ \frac{\{Q(t,0)\}_{11}\{Q(t,0)\}_{22}}{det\, Q(t,0)} < 0,\ t \in [0; T].$$

Запишемо систему (44) у координатній формі:

$$(y_{si}^{(2)})'' + \varepsilon^2 \omega_{s2}^2 \{V_{ss}(0)\}_{ii} y_{si}^{(2)} = \varepsilon^2 \omega_{s2}^2 \left(O(\varepsilon) y_{si}^{(2)} + \{V_{ss}(\varepsilon)\}_{i,1+\delta_{i1}} y_{s,1+\delta_{i1}}^{(2)} \right) -$$

$$-\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\{U_{sk}(x,\varepsilon)\}_{ij}y_{kj}^{(2)}+\varepsilon^2\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\omega_{k2}^2\{V_{sk}(\varepsilon)\}_{ij}y_{kj}^{(2)}+O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_{s2}^3}\right),$$

$i=1,2;\ s\in N$.

Згідно припущень 11, 15 існує таке $s_0\in N$, що для всіх $s\geq s_0$ $\{V_{ss}(0)\}_{ii}<0$, $i=1,2$.

Тоді

$$y_{si}^{(2)}(x,\varepsilon)=\int\limits_0^L G_i^{(2)}(x,\tau,\varepsilon)h_{si}^{(2)}(\tau,\varepsilon)d\tau,\ i=1,2,\ s\geq s_0, \tag{46}$$

де $G_i^{(2)}(x,\tau,\varepsilon)$ – функція Гріна відповідної однорідної крайової задачі, а

$$h_{si}^{(2)}(\tau,\varepsilon)=\varepsilon^2\omega_{s2}^2\left(O(\varepsilon)y_{si}^{(2)}+\{V_{ss}(\varepsilon)\}_{i,1+\delta_{i1}}y_{s,1+\delta_{i1}}^{(2)}\right)-$$

$$-\varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\{U_{sk}(\tau,\varepsilon)\}_{ij}y_{kj}^{(2)}+\varepsilon^2\sum_{\substack{k=1\\k\neq s}}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\omega_{k2}^2\{V_{sk}(\varepsilon)\}_{ij}y_{kj}^{(2)}+O\left(\frac{\varepsilon^2}{\omega_{s2}^3}\right),$$

$i=1,2;\ s\in N$.

За побудовою

$$|G_i^{(2)}(x,\tau,\varepsilon)|\leq\frac{1}{2\varepsilon\omega_{s2}\sqrt{-\{V_{ss}(0)\}_{ii}}}\times$$

$$\times\begin{cases}\exp\left(\varepsilon\omega_{s2}\sqrt{-\{V_{ss}(0)\}_{ii}}(\tau-x)\right),\ 0\leq\tau\leq x,\\ \exp\left(\varepsilon\omega_{s2}\sqrt{-\{V_{ss}(0)\}_{ii}}(x-\tau)\right),\ x\leq\tau\leq L,\end{cases}$$

$i=1,2$.

Надалі припускаємо виконання таких умов:

16.

$$\frac{1}{|\{V_{ss}(0)\}_{ii}|}\max_{0\leq t\leq T}\left|\frac{\{Q(t,0)\}_{ii}\{Q(t,0)\}_{i,1+\delta_{i1}}}{\lambda_0(t)\,det\,Q(t,0)}\right|\leq\frac{d}{3},\ d<1,\ i=1,2,\ s\geq s_0.$$

17.

$$\frac{2k_1T}{\pi\sqrt{-\{V_{ss}(0)\}_{ii}}}\left(1+16\left(\frac{T}{\pi}\right)^4\right)\leq\frac{d}{3},\ \frac{18k_1'}{|\{V_{ss}(0)\}_{ii}|}\left(\frac{T}{\pi}\right)^4\leq\frac{d}{3},$$

$i = 1, 2,\ s \in N$, де

$$||U_{ss}(t,\varepsilon)|| \le k_1,\ ||U_{sk}(t,\varepsilon)|| \le \frac{k_1}{(\omega_{s2}-\omega_{k2})^4},$$

$$||V_{ss}(t,\varepsilon)|| \le k_1',\ ||V_{sk}(t,\varepsilon)|| \le \frac{k_1'}{(\omega_{s2}-\omega_{k2})^4},$$

$s \ne k;\ s, k \in N$.

Тоді для таких достатньо великих k_2, що

$$k_2 > \frac{k_0}{1-d}\max\left\{\frac{1}{\sqrt{-\{V_{ss}(0)\}_{11}}}, \frac{1}{\sqrt{-\{V_{ss}(0)\}_{22}}}\right\},$$

на множині $D_{s4}^{(1)}$, де

$$D_{s4}^{(1)} = \left\{y_s^{(2)}(x,\varepsilon) \in C[0;L] : ||y_s^{(2)}(x,\varepsilon)|| \le \frac{k_2\varepsilon}{\omega_{s2}^4}\right\}, s \in N,\ \varepsilon \in [0;\varepsilon_1],$$

система (46) сумісна. При цьому мають місце рівності (45).

Для $1 \le s \le s_0$ існує таке ε_1, що для всіх ε, $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, система (46) на множині $D_{s4}^{(1)}$ має розв'язок. Єдиність знайденого розв'язку системи (28) випливає з [9, с. 147 – 149].

За побудовою

$$\varepsilon^2 B(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}(z_k^{(1)}(t,\varepsilon))''\int_0^L v_k^{(1)}(x)v_s^{(1)}(x)dx+$$

$$+A(t,\varepsilon)\sum_{k=1}^{\infty}\omega_{k1}^2 z_k^{(1)}(t,\varepsilon)\int_0^L v_k^{(1)}(x)v_s^{(1)}(x)dx \equiv$$

$$\equiv \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_0^L C(x,t,\varepsilon)v_k^{(1)}(x)v_s^{(1)}(x)dx\right)z_k^{(1)}(t,\varepsilon)+\int_0^L f(x,t,\varepsilon)v_s^{(1)}(x)dx,\ s \in N,$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty}(z_k^{(2)}(x,\varepsilon))''\int_0^T v_k^{(2)}(t)v_s^{(2)}(t)dt \equiv$$

$$\equiv -\varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^T A^{-1}(t,\varepsilon) C(x,t,\varepsilon) v_k^{(2)}(t) v_s^{(2)}(t) dt \right) z_k^{(2)}(x,\varepsilon) +$$

$$+\varepsilon^2 \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{k2}^2 \left(\int_0^T A^{-1}(t,\varepsilon) B(t,\varepsilon) v_k^{(2)}(t) v_s^{(2)}(t) dt \right) z_k^{(2)}(x,\varepsilon) -$$

$$-\int_0^T A^{-1}(t,\varepsilon) f(x,t,\varepsilon) v_s^{(2)}(t) dt,\ s \in N,$$

або

$$\int_0^L \Bigg(\varepsilon^2 B(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u^{(1)}(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2} - A(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u^{(1)}(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} - \varepsilon C(x,t,\varepsilon) u^{(1)}(x,t,\varepsilon) -$$

$$- f(x,t,\varepsilon) \Bigg) v_s^{(1)}(x) dx \equiv 0,$$

$$\int_0^T \Bigg(\frac{\partial^2 u^{(2)}(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} + \varepsilon A^{-1}(t,\varepsilon) C(x,t,\varepsilon) u^{(2)}(x,t,\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon^2 A^{-1}(t,\varepsilon) B(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u^{(2)}(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2} + A^{-1}(t,\varepsilon) f(x,t,\varepsilon) \Bigg) v_s^{(2)}(t) dt \equiv 0,$$

$s \in N$, де вектор-функції $u^{(1)}(x,t,\varepsilon)$, $u^{(2)}(x,t,\varepsilon)$ визначено згідно формул (4), (29).

Покладемо

$$q^{(1)}(x,t,\varepsilon) = \varepsilon^2 B(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u^{(1)}(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2} - A(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u^{(1)}(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} -$$

$$-\varepsilon C(x,t,\varepsilon) u^{(1)}(x,t,\varepsilon) - f(x,t,\varepsilon)$$

та

$$q^{(2)}(x,t,\varepsilon) = \frac{\partial^2 u^{(2)}(x,t,\varepsilon)}{\partial x^2} + \varepsilon A^{-1}(t,\varepsilon) C(x,t,\varepsilon) u^{(2)}(x,t,\varepsilon) -$$

$$-\varepsilon^2 A^{-1}(t,\varepsilon) B(t,\varepsilon) \frac{\partial^2 u^{(2)}(x,t,\varepsilon)}{\partial t^2} + A^{-1}(t,\varepsilon) f(x,t,\varepsilon).$$

Розглянемо ряди

$$\sum_{s=1}^{\infty} q_s^{(1)}(t,\varepsilon)v_s^{(1)}(x),\ \sum_{s=1}^{\infty} q_s^{(2)}(x,\varepsilon)v_s^{(2)}(t),$$

де

$$q_s^{(1)}(t,\varepsilon) = \int\limits_0^L q^{(1)}(x,t,\varepsilon)v_s^{(1)}(x)dx,\ q_s^{(2)}(x,\varepsilon) = \int\limits_0^T q(x,t,\varepsilon)v_s^{(2)}(t)dt,\ s \in N.$$

За побудовою $q_s^{(1)}(t,\varepsilon) \equiv 0$, $t \in [0;T]$, $q_s^{(2)}(x,\varepsilon) \equiv 0$, $x \in [0;L]$, $s \in N$.

Оскільки вектор-функція $q^{(1)}(x,t,\varepsilon)$ неперервна за змінною x, $x \in [0;L]$, (t, ε вважаємо параметрами) і

$$q^{(1)}(0,t,\varepsilon) = q^{(1)}(L,t,\varepsilon) = 0,$$

то продовжуючи непарним способом компоненти $q^{(1)}(x,t,\varepsilon)$ на відрізок $[-L;0]$ приходимо до висновку, що $q^{(1)}(x,t,\varepsilon) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{D}$ [11, с. 578]. Аналогічно показуємо, що $q^{(2)}(x,t,\varepsilon) \equiv 0$, $(x,t) \in \overline{D}$.

Таким чином, вектор-функція

$$u(x,t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)\sum_{s=1}^{\infty}(w_{s+}(t,\varepsilon) + w_{s-}(t,\varepsilon) + y_s^{(1)}(t,\varepsilon))v_s^{(1)}(x) +$$

$$+\sum_{s=1}^{\infty}(w_s(x,\varepsilon) + y_s^{(2)}(x,\varepsilon))v_s^{(2)}(t) \qquad (47)$$

є розв'язком задачі (1) – (3). При цьому можливе почленне диференціювання ряду (47) до двох разів включно; отримані таким чином ряди збігаються абсолютно і рівномірно для всіх $(x,t) \in \overline{D}$.

4 Основний результат

Теорема. *Нехай $A_i(t)$, $B_i(t) \in C^{m+4}[0;T]$, $C_i(x,t)$, $f_i(x,t) \in C^{m+4}(\overline{D})$, $i \geq 0$, в'язка матриць $A_0(t) - \lambda B_0(t)$ на відрізку $[0;T]$ регулярна, має один скінченний елементарний дільник та один нескінченний елементарний дільник і виконуються умови 1, 3 – 17. Тоді існує таке ε_2, $\varepsilon_2 \leq \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$, що задача (1) – (3) у прямокутнику $\overline{D}$ для всіх $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_2$ має єдиний розв'язок (47), для якого справджується оцінка*

$$||u(x,t,\varepsilon) - u_1(x,t,\varepsilon)|| = O(\varepsilon), \qquad (48)$$

де

$$u_1(x,t,\varepsilon) = Q(t,\varepsilon)\sum_{s=1}^{\infty}(w_{s+}(t,\varepsilon)+w_{s-}(t,\varepsilon))v_s^{(1)}(x)+\sum_{s=1}^{\infty}w_s(x,\varepsilon)v_s^{(2)}(t).$$

5 Висновки

Побудовано асимптотичний розв'язок першої крайової задачі для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з частинними похідними еліптичного типу з виродженням, що має певну асимптотичну оцінку.

[1] *Вишик М.И., Люстерник Л.А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук – 1957. – 12, № 5. – С. 3 – 122.

[2] *Бутузов В.Ф.* Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений // Матем. сб. – 1977. – 104 (146), № 3 (11). – С. 460 – 485.

[3] *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. — К.: "Наук. думка", 1966. — 249 с.

[4] *Ладыженская О.А.* Смешанная задача для гиперболического уравнения. — М.: Гос. изд-во техн.-теорет лит., 1953. — 279 с.

[5] *Сотниченко Н.А., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование некоторых систем линейных уравнений в частных производных // Укр. мат. журн. – 1983. – Т. 35, № 2. – С. 187 – 193.

[6] *Sibuya Y.* Simplification of a System of Linear Ordinary Differential Equations about a Singular Point // Funkcialaj Ekvacioj. – 1962. — № 4. — P. 29 – 56.

[7] *Павлюк І.А.* Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку. – К.: Вид-во Київ. ун-ту. – 1970. – 208 с.

[8] *Канторович Л.В., АкиловГ.П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1977. – 744 с.

[9] *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 468 с.

[10] *Кук Р.* Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 472 с.

[11] *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, том III. – М.: Наука, 1969. – 656 с.

ASYMPTOTICAL INTEGRATION OF THE SINGULARLY PERTURBED SYSTEMS OF ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH DEGENERATION

Petro SAMUSENKO

National Pedagogical Dragomanov University
9, Pyrogova Str., Kyiv 01030

The asymptotic solution to the first boundary value problem for the linear singularly perturbed system of elliptic partial differential equations with degeneration is obtained.