ФУНКТОРИ НА КАТЕГОРІЇ K-УЛЬТРАМЕТРИЧНИХ ПРОСТОРІВ

©2011 р. Олександр САВЧЕНКО

Херсонський державний аграрний університет,
вул. Рози Люксембург 23, Херсон 73011

e-mail: *savchenko1960@rambler.ru*

Редакція отримала статтю 25 червня 2011 р.

Клас K-ультраметричних просторів є узагальненням класу ультраметричних просторів. У статті розглянуто функтори у категорії (рівномірно) K-ультраметричних просторів та K-нерозтягуючих відображень. Зокрема, показано, що функтори ймовірнісних мір та гіперпростору утворюють монади у цій категорії. Розглянуто задачу продовження функторів на категорії Клейслі цих монад.

1 Вступ

Ультраметричні простори знаходять широкі застосування у теорії чисел, функціональному аналізі, еволюційній біології, семантиці мов програмування та фізиці твердого тіла.

У попередній статті автора [1] показано, що стаціонарні розмиті метричні простори природно породжують поняття K-ультраметричного простору при $0 \leq K \leq \infty$. Це поняття є одночасним узагальненням метричних (при $K = 0$) і ультраметричних (при $K = \infty$) просторів.

УДК: 515.12; MSC 2000: 54E35,54B30,54B20

Ключові слова і фрази: ультраметричний простір, K-ультраметричний простір, G-симетричний степінь, функтор ймовірнісних мір

Ультраметризація гіперпросторів, просторів ймовірнісних мір, ідемпотентних мір та ємностей розглядалася у статтях різних авторів. Показано, що утворені конструкції є функторіальними на категорії ультраметричних просторів та нерозтягуючих відображень.

Стаття присвячена деяким функторіальним конструкціям у категорії K-ультраметричних просторів і нерозтягуючих відображень. Спочатку встановлюємо деякі загальні властивості K-ультраметричних просторів, а потім розглядаємо K-ультраметризацію гіперпросторів, просторів ймовірнісних мір та G-симетричних степенів K-ультраметричних просторів. Показано, що такі K-ультраметризації дають змогу означити функтори на згаданій категорії.

2 K-ультраметрика

Нехай $K \in [0, \infty]$. Метрику d на множині X називають K-ультраметрикою, якщо виконано умову: для кожних $x, y, z \in X$ маємо

$$d(x, y) \le \max\{d(x, z), d(z, y)\},$$

якщо $\min\{d(x, z), d(z, y)\} \le K$.

Зрозуміло, що при $K = 0$ одержуємо поняття метричного простору, а при $K = \infty$ — поняття ультраметричного простору. Зауважимо також, що кожен K-ультраметричний простір є K'-ультраметричним простором, якщо $K' \le K$.

Опишемо конструкцію, яка дозволяє будувати приклади K-ультраметричних просторів. Обмежимося лише випадком $K \in (0, \infty)$.

Нехай $\{(X_\alpha, d_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ — сім'я ультраметричних просторів діаметра $\le K$. Нехай також D — метрика на Aтака, що $D(\alpha, \beta) > K$ для кожних $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \ne \beta$. Означимо функцію $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ формулою:

$$d(x, y) = \begin{cases} d_\alpha(x, y), & \text{якщо } x, y \in \alpha \in A; \\ D(\alpha, \beta), & \text{якщо } x \in \alpha,\ y \in \beta,\ \alpha, \beta \in A,\ \alpha \ne \beta. \end{cases}$$

Теорема 1. *Функція D є K-ультраметрикою на множині X.*

Доведення. Твердження теореми очевидне. □

Теорема 2. *Нехай* (X,d) — K*-ультраметричний простір. Тоді відношення* $\sim$ *на* X*, означене умовою* $x \sim y \;\Leftrightarrow\; d(x,y) \le K$*, є відношенням еквівалентності. Функція* $D\colon A \times A \to \mathbb{R}$ *(тут* $A = X/\sim$*), означена формулою* $D(\alpha,\beta) = \inf\{d(x,y) \mid x \in \alpha,\; y \in \beta\}$*, є метрикою на* A *такою, що* $D(\alpha,\beta) > K$ *для всіх* $\alpha,\beta \in A$*,* $\alpha \ne \beta$*. Метрика* d *тоді є амальгамою метрики* D *і сім'ї ультраметрик* $\{d_\alpha \mid \alpha \in A\}$*,* $d_\alpha = d|(\alpha \times \alpha)$*.*

Доведення. Легко бачити, що відношення $\sim$ є відношенням еквівалентності на множині X.

Покажемо, що $D(\alpha,\beta) > K$ для кожних $\alpha,\beta \in A$, $\alpha \ne \beta$. Справді, припустимо протилежне, тобто що існують $\alpha,\beta \in A$, $\alpha \ne \beta$, такі, що $D(\alpha,\beta) \le K$. Тоді існують послідовності (x_i) та (y_i) у множинах α і β відповідно такі, що $\lim_{i\to\infty} d(x_i,y_i) \le K$. Не зменшуючи загальності, можемо припустити, що $d(x_i,x_j) < K$ та $d(y_i,y_j) < K$ для всіх i,j. Тоді з означення K-ультраметрики випливає, що

$$d(x_i,y_i) \le \max\{d(x_i,x_j), d(x_j,y_i)\} = d(x_j,y_i) \le$$

$$\le \max\{d(y_i,y_j), d(x_j,y_j)\} = d(x_j,y_j),$$

тобто послідовність $(d(x_i,y_i))$ стаціонарна і ми одержуємо суперечність.

Покажемо, що для D виконано нерівність трикутника. Нехай α,β, $\gamma \in A$ — попарно різні елементи. За доведеним вище, існують $x,x' \in \alpha$, $y,y' \in \beta$ та $z,z' \in \gamma$ такі, що $D(\alpha,\beta) = d(x,y)$, $D(\beta,\gamma) = d(y',z')$, $D(\alpha,\gamma) = d(x',z)$. Тоді

$$\begin{aligned} D(\alpha,\gamma) = d(x',z) &\le \max\{d(x',z'), d(z,z')\} = d(x',z') \le \\ &\le \max\{d(x',x), d(x,z')\} = d(x,z') \le \\ &\le d(x,y) + d(y,z') = D(\alpha,\beta) + D(\beta,\gamma). \end{aligned}$$

Означимо також $d_\alpha = d|(\alpha \times \alpha)$. □

Твердження 1. *Нехай* (X,d) — K*-ультраметричний простір. Кожна відкрита куля радіуса* $r < K$ *замкнена в* X*.*

Доведення. Зауважимо, що кожне $\alpha \in A$ є відкрито-замкненою підмножиною в X. Оскільки d_α є ультраметрикою на α, з властивостей ультраметрики випливає, що кожна куля радіуса r з центром у точці $x \in \alpha$ відкрито-замкнена в α, а тому і в X. $\square$

Нагадаємо, що топологічний простір називається *нульвимірним*, якщо він має базу з відкрито-замкнених множин.

Наслідок 1. *Кожен K-ультраметричний простір нульвимірний.*

3 Функтори у категорії K-ультраметричних просторів

Означимо категорію $\mathbf{UMET}_K$. Її об'єктами є K-ультраметричні простори, а морфізмами простору (X, d) у простір (Y, ϱ) — K-нерозтягуючі відображення, тобто неперервні відображення $f\colon X \to Y$ такі, що $\varrho(f(x), f(y)) \le d(x, y)$ для кожних $x, y \in X$ таких, що $d(x, y) \le K$.

Назвемо K-ультраметричний простір рівномірно K-ультраметричним, якщо існує $\varepsilon > 0$ таке, що кожна куля $B_K(x)$ є також кулею $B_{K+\varepsilon}(x)$, $x \in X$. Прикладом 1-ультраметричного простору, який не є рівномірно 1-ультраметричним простором, є такий. На множині $\mathbb{N}$ розглядаємо метрику d, означену формулою $d(m, n) = 1 + \frac{1}{m+n}$, якщо $m \ne n$.

Нагадаємо, що гіперпростором топологічного простору X називають множину $\exp X$ непорожніх компактних підмножин у X. Якщо (X, d) — метричний простір, то метрику Гаусдорфа d_H на $\exp X$ задають формулою:

$$d_H(A, B) = \inf\{r > 0 \mid A \subset O_r(B),\ B \subset O_r(A)\}$$

(тут $O_r(C)$ означає r-окіл множини C).

Теорема 3. *Гіперпростір кожного K-ультраметричного простору є K-ультраметричним простором.*

Доведення. Нехай (X, d) — K-ультраметричний простір. Покажемо, що метрика Гаусдорфа d_H є K-ультраметрикою на $\exp X$.

Нехай $A, B, C \in \exp X$ і $d_H(A, B) = t \le K$. Нехай також $d_H(A, C) = s$. Тоді за відомими властивостями метрики Гаусдорфа для кожного $b \in B$ існує $a \in A$ таке, що $d(a, b) \le t$ і існує $c \in C$ таке, що $d(b, c) \le s$. Тоді $d(b, c) \le \max\{s, t\}$. Аналогічно можна показати, що для кожного $c \in C$ існує $b \in B$ таке, що $d(b, c) \le \max\{s, t\}$. Звідси випливає, що

$$d_H(B, C) \le \max\{s, t\} = \max\{d_H(A, B), d_H(A, C)\}.$$

$\square$

Через $P(X)$ позначаємо множину всіх ймовірнісних мір з компактними носіями на метричному просторі X. Необхідну інформацію, що стосується функтора ймовірнісних мір можна знайти, наприклад, в [2]. Тут зазначимо лише, що кожна міра зі скінченними носіями має вигляд $\sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$, де через δ_x позначаємо міру Дірака, зосереджену в точці $x \in X$.

Якщо $f\colon X \to Y$ — неперервне відображення метричних просторів, то через

$$P(f)\colon P(X) \to P(Y)$$

позначають відображення, означене формулою:

$$\int_Y \varphi d(P(f)(\mu)) = \int_X \varphi f d\mu,\ \ \varphi \in C(Y)$$

(тут $C(Y)$ означає простір неперервних функцій на Y).

Нагадаємо, що на множині $P(X)$ можна означити метрику Канторовича $\hat{d}$ (див., наприклад, [3]). Позначимо через $\mathrm{Lip}(X)$ множину всіх дійснозначних 1-ліпшицевих функцій на метричному просторі X. Нехай $\mu, \nu \in P(X)$, тоді приймемо

$$\hat{d}(\mu, \nu) = \sup\left\{\left|\int_X \varphi d\mu - \int_X \varphi d\nu\right| \mid \varphi \in \mathrm{Lip}(X)\right\}.$$

Якщо (X, d) — ультраметричний простір, то на множині $P(X)$ можна означити ультраметрику d_{HV} (див. [4]):

$$d_{HV}(\mu, \nu) = \inf\{r > 0 \mid \mu(O_r(x)) = \nu(O_r(x)) \text{ для кожного } x \in X\}.$$

Нехай $q_K\colon X \to X/\sim_K$ — фактор-відображення. Приймемо:

$$d_K(\mu,\nu) = \begin{cases} d_{HV}(\mu,\nu), & \text{якщо} \\ & P(q_K)(\mu) = P(q_k)(\nu), \\ \max\{\hat{d}(P(q_K)(\mu), P(q_k)(\nu)), K+\varepsilon\}, & \text{у протилежному} \\ & \text{випадку.} \end{cases}$$

Теорема 4. *Функція d_K є рівномірною K-ультраметрикою на множині $P(X)$.*

Доведення. Спочатку покажемо, що d_K — метрика на множині $P(X)$. Потрібно довести лише нерівність трикутника.

Якщо $P(q_K)(\mu), P(q_k)(\nu), P(q_k)(\tau)$ — попарно різні міри, то

$$\begin{aligned} d_K(\mu,\nu) &= \max\{\hat{d}(P(q_K)(\mu), P(q_k)(\nu)), K+\varepsilon\} \leq \\ &\leq \max\{\hat{d}(P(q_K)(\mu), P(q_k)(\tau)), K+\varepsilon\} + \\ &+ \max\{\hat{d}(P(q_K)(\tau), P(q_k)(\nu)), K+\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Тепер перевіримо умову з означення K-ультраметрики. Надалі нехай $\mu,\nu,\tau \in P(X)$ — попарно різні міри.

Не зменшуючи загальності, припускаємо, що $\hat{d}(\mu,\nu) \leq K$. Якщо також $\hat{d}(\nu,\tau) \leq K$, то з сильної нерівності трикутника для метрики d_{HV} випливає, що

$$\hat{d}(\mu,\nu) \leq \max\{\hat{d}(\mu,\tau), \hat{d}(\tau,\nu)\}.$$

Тепер якщо $\hat{d}(\mu,\nu) \leq K$ і $\hat{d}(\nu,\tau) \geq K+\varepsilon$, то також і $\hat{d}(\mu,\tau) \geq K+\varepsilon$, а отже

$$\begin{aligned} \hat{d}(\mu,\tau) =& d_K(P(q_K)(\mu), P(q_K)(\tau)) = d_K(P(q_K)(\nu), P(q_K)(\tau)) = d(\nu,\tau) = \\ =& \max\{d(\mu,\nu), d(\nu,\tau)\}. \end{aligned}$$

Якщо

$$\min\{d(\mu,\nu), d(\mu,\tau), d(\nu,\tau)\} \geq K+\varepsilon,$$

то

$$\begin{aligned} d(\mu,\nu) =& \max\{K+\varepsilon, d_K(\mu,\nu)\} \leq \max\{K+\varepsilon, d_K(\mu,\tau)+d_K(\tau,\nu)\} \leq \\ \leq& \max\{K+\varepsilon, d_K(\mu,\tau)\} + \max\{K+\varepsilon, d_K(\tau,\nu)\} = \\ =& d(\mu,\tau) + d(\tau,\nu). \end{aligned}$$

Це завершує доведення теореми. □

Зауваження 1. *З доведення випливає, що побудована K-ультраметрика насправді є рівномірною K-ультраметрикою.*

Твердження 2. *Нехай $f\colon X \to Y$ — K-нерозтягуюче відображення. Тоді відображення $P(f)\colon P(X) \to P(Y)$ також K-нерозтягуюче.*

Доведення. Нехай $\mu, \nu \in P(X)$ і $d_K(\mu, \nu) \le \varepsilon$, де $\varepsilon \le K$. Нехай також $y \in Y$ і $\eta > \varepsilon$. З K-нерозтягуваності відображення f випливає, що множина $f^{-1}(B_\eta(y))$ є об'єднанням куль вигляду $B_\varepsilon(x)$ в X. З σ-адитивності мір μ, ν випливає тоді

$$P(f)(\mu)(B_\eta(y)) = \mu(f^{-1}(B_\eta(y))) = \nu(f^{-1}(B_\eta(y))) = P(f)(\nu)(B_\eta(y)).$$

Оскільки y довільне, одержуємо, що $d_K(P(f)(\mu), P(f)(\nu)) \le \varepsilon$. □

Одержуємо функтор ймовірнісних мір P у категорії $\mathbf{UUMET}_K$ рівномірно K-ультраметричних просторів та K-нерозтягуючих відображень.

Твердження 3. *Відображення* $\mathrm{supp}\colon P(X) \to \exp X$ *неперервне.*

Доведення. Нехай $\mu, \nu \in P(X)$ і $d(\mu, \nu) < r$, де $r \le K$. Тоді для кожного $x \in X$ одержуємо:

$$\mathrm{supp}(\mu) \cap B_r(x) \ne \emptyset \Leftrightarrow 0 \ne \mu(B_r(x)) = \nu(B_r(x)) \Leftrightarrow \mathrm{supp}(\nu) \cap B_r(x) \ne \emptyset,$$

звідки випливає, що $d_H(\mathrm{supp}(\mu), \mathrm{supp}(\nu)) \le r$. □

Зауваження 2. *Легко бачити, що* $\mathrm{supp} = (\mathrm{supp}_X)\colon P \to \exp$ *є природним перетворенням функторів.*

Твердження 4. *Множина $P_\omega(X)$ мір зі скінченними носіями всюди щільна у просторі $P(X)$.*

Доведення. Нехай $\mu \in P(X)$ і $r \in (0, K)$. Розглянемо скінченне диз'юнктне покриття $\{B_r(x_i) \mid i = 1, \dots, m\}$ множини $\mathrm{supp}(\mu)$. Нехай $\nu = \sum_{i=1}^m \mu(B(x_i))\delta_{x_i}$. Тоді нескладно побачити, що $d(\mu, \nu) \le r$. □

Зауваження 3. *Аналогічно можна показати всюди щільність у $P(X)$ множини мір зі скінченними носіями з деякої всюди щільної у X множини.*

Наша мета — означити відображення $\psi_X\colon P^2(X)\to P(X)$. Спочатку означимо його на всюди щільній підмножині $P_\omega(P_\omega(X))\subset P^2(X)$. Нехай $M=\sum_{i=1}^k\alpha_i\delta_{\mu_i}$, де $\mu_i=\sum_{j=1}^{l_i}\beta_{ij}\delta_{x_{ij}}$. Приймемо $\psi_X(M)=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^{l_i}\alpha_i\beta_{ij}\delta_{x_{ij}}\in P(X)$ (відображення Маркова).

Покажемо, що якщо також $M'\in P_\omega(P_\omega(X))\subset P^2(X)$ і $d(M,M')<K$, то тоді $d(\psi_X(M),\psi_X(M'))\le d(M,M')$.

Нехай $d(M,M')<r$ для деякого $r<K$. Розглянемо скінченне покриття множини $\mathrm{supp}(M)\cup\mathrm{supp}(M')$ кулями радіуса r. Тоді міри M,M' можна зобразити у вигляді $M=\sum_{i=1}^p M_i$, $M'=\sum_{i=1}^p M_i'$, де $\mathrm{supp}(M_i)\cup\mathrm{supp}(M_i')$ лежить у деякій кулі B_i радіуса r у просторі $P(X)$. Запишемо $M_i=\sum_{s\in A_i}\alpha_i\delta_{\mu_s}$, $M_i'=\sum_{s\in A_i}\alpha_i'\delta_{\mu_s'}$.

Оскільки $M(B_i)=M'(B_i)$, то $\sum_{s\in A_i}\alpha_i=\sum_{s\in A_i}\alpha_i'$. Оскільки $d(\mu_s,\mu_t)<r$ для кожних $s,t\in A_i$, то існує покриття $\mathcal{V}_i$ множини $\mathrm{supp}(M_i)\cup\mathrm{supp}(M_i')$ кулями радіуса r в просторі X таке, що для кожних μ_s,μ_t' і кожного $\tilde B\in\mathcal{V}_i$ маємо $\mu_s(\tilde B)=\mu_t'(\tilde B)$. Нехай $\mathcal{V}=\cup_i\mathcal{V}_i$. За побудовою одержуємо, що $\psi_X(M)(\tilde B)=\psi_X(M')(\tilde B)$ для кожного $\tilde B\in\mathcal{V}$. А це означає, що $d(\psi_X(M),\psi_X(M'))\le r$.

Продовжимо відображення ψ_X на всю множину $P^2(X)$. Нехай $M\in P^2(X)$. Існує збіжна до M послідовність $(M_i)_{i=1}^\infty$ у множині $P_\omega(P_\omega(X))\subset P^2(X)$. Оскільки відображення supp і відображення об'єднання $\cup\colon \exp^2X\to\exp X$ неперервні, існує компактна множина $Y\subset X$ така, що $\{M\}\cup\{M_i\mid i\in\mathbb{N}\}\subset P^2(Y)\subset P(X)$. Міркуючи аналогічно як у статті [5] приходимо до висновку, що фундаментальна послідовність $(\psi_X(M_i))_{i=1}^\infty$ збіжна у множині $P(Y)\subset P(X)$. Границю одержаної послідовності позначаємо $\psi_X(M)$. Легко бачити, що так одержане відображення означене коректно і воно неперервне.

Ми одержуємо природне перетворення функтора P^2 у функтор ймовірнісних мір P у категорії $\mathbf{UMET}_K$.

Тут ми нагадаємо деякі необхідні означення з теорії категорій; більш детально див., наприклад, у [6].

Для категорії $\mathcal{C}$ позначимо через $|\mathcal{C}|$ клас об'єктів у $\mathcal{C}$. Якщо $X,Y\in|\mathcal{C}|$, то через $\mathcal{C}(X,Y)$ позначаємо множину морфізмів з X у Y в категорії $\mathcal{C}$.

Трійка $\mathbb{T}=(T,\eta,\mu)$ називається *монадою* в категорії $\mathcal{C}$, якщо T — ендофунктор в категорії $\mathcal{C}$ і $\eta\colon 1_{\mathcal{C}}\to T$, $\mu\colon T^2\equiv TT\to T$ — природні перетворення такі, що

$$\mu\eta_T = \mu T(\eta) = 1_T,\ \mu T(\mu) = \mu\mu_T. \tag{1}$$

Тоді η називається *одиницею*, а μ — *множенням* монади $\mathbb{T}$. Функтор T у цьому випадку називається *функторіальною частиною* монади $\mathbb{T}$.

Категорією Клейслі монади $\mathbb{T}$ називається категорія $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, означена умовами: $|\mathcal{C}_{\mathbb{T}}| = |\mathcal{C}|, \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X,Y) = \mathcal{C}(X, T(Y))$, і композиція $g*f$ морфізмів $f \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(X,Y)$, $g \in \mathcal{C}_{\mathbb{T}}(Y,Z)$ задається формулою $g * f = \mu_Z T(g) f$.

Означимо функтор $F_{\mathbb{T}} \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ умовами: $F_{\mathbb{T}}(X) = X$ для кожного $X \in |\mathcal{C}|$ і $F_{\mathbb{T}}(f) = \eta_Y f$ для кожного $f \in \mathcal{C}(X,Y)$.

Функтор $\overline{F} \colon \mathcal{C}_{\mathbb{T}} \to \mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ називається *продовженням функтора* $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *на категорію Клейслі* $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$, якщо $IF = \overline{F}I$.

Теорема 5. *Існує біективна відповідність між продовженнями функтора F на категорію Клейслі $\mathcal{C}_{\mathbb{T}}$ монади $\mathbb{T}$ і природними перетвореннями $\xi \colon FT \to TF$, що задовольняють умови:*

1. $\xi F(\eta) = \eta_F$;
2. $\mu_F T(\xi)\xi_T = \xi F(\mu)$.

Нагадаємо конструкцію функтора G-симетричного степеня. Нехай G — підгрупа симетричної групи S_n. Група G діє на n-ому степені множини (або топологічного простору) X перестановками координат. Простір орбіт цієї дії позначаємо $SP^n_G(X)$. При цьому орбіту, що містить точку $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$, позначаємо $[x_1, \ldots, x_n]$, або коротше $[x_i]$.

Нехай тепер (X, d) — метричний простір. Відомо, що формула

$$\hat{d}([x_i],[y_i]) = \min_{\sigma\in G} \max_{i=1,\ldots,n} d(x_i, y_{\sigma(i)})$$

визначає метрику на $SP^n_G(X)$. Означимо відображення $\pi_G \colon X^n \to SP^n_G(X)$ формулою:

$$\pi_G(x_1, \ldots, x_n) = [x_1, \ldots, x_n].$$

Теорема 6. *Нехай d — K-ультраметрика на множині X. Тоді $\hat{d}$ — K-ультраметрика на множині $SP^n_G(X)$.*

Доведення. Нехай $[x_i], [y_i], [z_i] \in SP^n_G(X)$. Для визначеності припустимо, що $\hat{d}([x_i], [y_i]) \le K$. Звідси випливає, що існує $\sigma \in G$ таке, що $d(x_i, y_{\sigma(i)}) \le K$ для всіх $i = 1, \dots, n$. Тоді для кожного $\tau \in G$ і кожного $i = 1, \dots, n$ маємо

$$d(x_i, z_{\tau(\sigma(i))}) \le \max\{d(x_i, y_{\sigma(i)}), d(y_{\sigma(i)}, z_{\tau(\sigma(i))})\}.$$

Нехай $\tau \in G$ — таке, що $\hat{d}([y_j], [z_k]) = \max_{j=1,\dots,n} d(y_j, z_{\tau(j)})$, тоді

$$\begin{aligned}\hat{d}([x_i], [y_i]) &\le \max_{i=1,\dots,n} d(x_i, z_{\tau(\sigma(i))}) \le \\ &\le \max\{\max_{i=1,\dots,n} d(x_i, y_{\sigma(i)}), \max_{j=1,\dots,n} d(y_i, z_{\tau(j)})\} \le \\ &\le \max\{\hat{d}([x_i], [y_i]), \hat{d}([y_i], [z_i])\}.\end{aligned}$$

□

Зауваження 4. *Легко бачити, що конструкція SP^n_G визначає функтор у категорії $\mathbf{UMET}_K$, а також у категорії $\mathbf{UUMET}_K$ (функтор G-симетричного степеня).*

Легко бачити, що означені вище відображення $\psi_X \colon P^2(X) \to P(X)$ утворюють природне перетворення функтора P^2 у функтор P. Крім того, відображення $\delta_X \colon X \to P(X)$, $x \mapsto \delta_X$, є компонентами природного перетворення тотожнього функтора у функтор P.

Теорема 7. *Трійка $\mathbb{P} = (P, \delta, \psi)$ утворює монаду на категорії $\mathbf{UUMET}_K$.*

Доведення. Перевірити умови 1 з означення монади нескладно для елементів зі скінченними носіями у просторі $P(X)$ і, відповідно, для мір у просторі $P^2(X)$ вигляду $M = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{\mu_i}$, де μ_i — міри зі скінченними носіями у просторі $P(X)$ (див., наприклад, [2]). Твердження теореми випливає тепер з того факту, що ці елементи утворюють всюди щільні множини у просторах $P(X)$ та $P^2(X)$ відповідно (див. твердження 4 та зауваження, що йде після нього). □

Нагадаємо, що для кожного метричного простору X відображення $u_X \colon \exp^2 X \to \exp X$, $u_X(\mathcal{A}) = \cup\mathcal{A}$, та $s_X \colon X \to \exp X$, $s_X(x) = \{x\}$, є нерозтягуючими, а тому є також і K-нерозтягуючими. Клас $u =$

(u_X) (відповідно $s = (s_X)$) є природним перетворенням функтора $\exp^2$ у функтор $\exp$ (відповідно тотожнього функтора $1_{\mathbf{UMET}_K}$ у функтор $\exp$).

Теорема 8. *Трійка* $\mathbb{H} = (\exp, s, u)$ *утворює монаду на категорії* $\mathbf{UMET}_K$*.*

Монаду $\mathbb{H}$ називають монадою гіперпростору.

Теорема 9. *Функтор G-симетричного степеня SP^n_G допускає єдине продовження на категорію Клейслі монади гіперпростору на категорії* $\mathbf{UMET}_K$*.*

Доведення. Означимо відображення $\xi_X\colon SP^n_G \exp X \to \exp SP^n_G(X)$ формулою:

$$\xi_X([A_1, \dots, A_n]) = \{[a_1, \dots, a_n] \mid a_i \in A_i,\ i = 1, \dots, n\}.$$

В [7] показано, що таке відображення коректно означене. Покажемо, що воно K-нерозтягуюче.

Нехай $\hat{d_H}([A_1, \dots, A_n], [B_1, \dots, B_n]) \le K$. Тоді існує $\sigma \in S_n$ таке, що $d_H(A_i, B_{\sigma(i)}) \le K$, а тому для кожного $a_i \in A_i$ існує $b_{\sigma(i)} \in B_{\sigma(i)}$ таке, що $d(a_i, b_{\sigma(i)}) \le K$, $i = 1, \dots, n$. Підсумовуючи, бачимо, що для кожного $[a_1, \dots, a_n] \in \xi_X([A_1, \dots, A_n])$ існує

$$[b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}] \in \xi_X([B_{\sigma(1)}, \dots, B_{\sigma(n)}]) = \xi_X([B_1, \dots, B_n]),$$

для якого $\hat{d}([a_1, \dots, a_n], [b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}]) \le K$. Міняючи місцями $[A_1, \dots, A_n]$ і $[B_1, \dots, B_n]$, одержуємо остаточно, що

$$\hat{d}_H(\xi_X([A_1, \dots, A_n]), \xi_X([B_1, \dots, B_n])) \le K.$$

Той факт, що природне перетворення ξ задовольняє умови теореми 5, випливає з аналогічного факту, доведеного в [2].

Доведення єдиності продовження проводиться так само, як і доведення аналогічного результату в [2]. □

Теорема 10. *Функтор гіперпростору* $\exp$ *допускає два продовження на категорію Клейслі монади гіперпростору* $\mathbb{H}$ *на категорії* $\mathbf{UMET}_K$*.*

Доведення. Нагадаємо, що відображення трансверсалі $t_X\colon \exp^2 X \to \exp^2 X$ задається формулою:

$$t_X(\mathcal{A}) = \{B \in \exp X \mid B \subset \cup\mathcal{A},\ B \cap A \neq \emptyset \text{ для всіх } A \in \mathcal{A}\}$$

(див., напр., [2]).

Покажемо, що відображення трансверсалі є K-нерозтягуючим. Нехай $\mathcal{A}, \mathcal{A}' \in \exp^2 X$ і $d_{HH}(\mathcal{A}, \mathcal{A}') \leq K$. Нехай $B \in t_X(\mathcal{A})$. Для кожного $A' \in \mathcal{A}'$ виберемо $A \in \mathcal{A}$ таке, що $d_H(A, A') \leq K$ і для кожного $a \in A \cap B$ виберемо точку $a' \in A'$ таку, що $d(a, a') \leq K$. Позначимо через B' замикання множини усіх таких точок a'.

Очевидно, що $B' \subset \cup\mathcal{A}'$, а тому $B' \in \exp X$. За побудовою, $B' \in t_X(\mathcal{A}')$ і $d_H(B, B') \leq K$.

Ми показали, що для кожного $B \in t_X(\mathcal{A})$ існує $B' \in t_X(\mathcal{A}')$ таке, що $d_H(B, B') \leq K$. Аналогічно доводиться, що для кожного $B' \in t_X(\mathcal{A}')$ існує $B \in t_X(\mathcal{A})$ таке, що $d_H(B, B') \leq K$. Звідси випливає, що $d_{HH}(t_X(\mathcal{A}), t_X(\mathcal{A}')) \leq K$ і відображення t_X є K-нерозтягуючим.

Міркуючи, як і в монографії [2], одержуємо, що $t = (t_X)$ — природне перетворення функтора $\exp^2$ у себе. Більше того, воно задовольняє умови теореми 5 (для монади гіперпростору $\mathbb{H}$ і функтора $F = \exp$), звідки випливає, що функтор exp допускає продовження на категорію Клейслі монади $\mathbb{H}$.

Ще одне продовження функтора exp на категорію Клейслі монади $\mathbb{H}$ відповідає природному перетворенню $t' = us_{\exp}$ (див. [2]). Доведення того факту, що лише природні перетворення t, t' відповідають продовженням функтора exp на категорію Клейслі монади $\mathbb{H}$, здійснюється аналогічно до доведення відповідного факту в [2]. □

Нехай $\mu_i \in P(X_i)$, де (X_i, d_i) — K-ультраметричні простори, $i = 1, \ldots, n$. Через $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \cdots \otimes \mu_n \in P(X_1 \times \cdots \times X_n)$ позначаємо добуток мір $\mu_i \in P(X_i)$, $i = 1, \ldots, n$.

Лема 1. *Нехай $0 \leq c \leq K$ і $\mu_i, \nu_i \in P(X)$ і $d_K(\mu_i, \nu_i) \leq c$ для кожного $i = 1, \ldots, n$. Тоді*

$$d_K(\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n, \nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_n) \leq c. \tag{2}$$

Доведення. Для кожного $(x_1,\dots,x_n)\in X^n$ і кожного $\eta>c$ одержуємо

$$\begin{aligned}&(\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n)(B_\eta(x_1,\dots,x_n))=(\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n)\left(\prod_{i=1}^n B_\eta(x_i)\right)=\\&=\prod_{i=1}^n \nu_i(B_\eta(x_i))=(\nu_1\otimes\cdots\otimes\nu_n)\left(\prod_{i=1}^n B_\eta(x_i)\right)=\\&=(\nu_1\otimes\cdots\otimes\nu_n)(B_\eta(x_1,\dots,x_n)),\end{aligned}$$

звідки випливає (2). □

Теорема 11. *Функтор G-симетричного степеня допускає продовження на категорію Клейслі монади ймовірнісних мір на категорії* $\mathbf{UMET}_K$.

Доведення. Для кожного K-ультраметричного простору (X,d) означимо відображення $\xi_X\colon SP^n_G P(X)\to PSP^n_G(X)$ формулою:

$$\xi_X[\mu_1,\dots,\mu_n]=P(\pi_G)(\mu_1\otimes\cdots\otimes\mu_n).$$

Покажемо, що відображення ξ_X є K-нерозтягуючим, тобто є морфізмом категорії $\mathbf{UMET}_K$. Нехай $[\mu_1,\dots,\mu_n],[\nu_1,\dots,\nu_n]\in SP^n_G P(X)$ і $d([\mu_1,\dots,\mu_n],[\nu_1,\dots,\nu_n])\le K$. Тоді існує $\sigma\in G$ таке, що $d_K(\mu_i,\nu_{\sigma(i)})\le K$ для кожного i. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\sigma=e$, тобто що $d_K(\mu_i,\nu_i)\le K$ для кожного i.

З леми 1 і з K-нерозтягуваності відображення $P(\pi_G)$ випливає тепер K-нерозтягуваність відображення ξ_X. Заключна частина доведення відбувається аналогічно до доведення відповідного факту в [2]. □

4 Дискретні метричні простори

Метричний простір (X,d) назвемо K-дискретним, якщо $d(x,y)\ge K$ для кожних $x,y\in X$, $x\ne y$. Зрозуміло, що кожний K-дискретний простір є K-ультраметричним.

Одне з застосувань K-дискретних метричних просторів знаходимо у асимптотичній топології: у статті [8] показано, що кожен метричний простір евівалентний K-дискретному просторові у сенсі асимптотичної категорії $\mathcal{A}$.

Легко бачити, що гіперпростір K-дискретного метричного простору є знову K-дискретним простором. Описана вище конструкція метризації множини ймовірнісних мір дає таку формулу для K-дискретного метричного простору:

$$\hat{d}(\mu,\nu) = \max\{K, d_K(\mu,\nu)\},$$

якщо $\mu \neq \nu$.

Описані вище результати мають свої аналоги і для категорії K-дискретних метричних просторів і їх (довільних) відображень.

5 Зауваження

Відомо, що аналога відображення Маркова $\psi_X\colon P^2(X) \to P(X)$ не існує для всіх метричних просторів. Однією з мотивацій запровадження поняття K-ультраметричного простору якраз і є змога означити таке відображення.

Бачимо, що на відміну від гіперпростору, K-ультраметризація простору ймовірнісних мір побудована лише для рівномірних K-ультраметричних просторів. Це природно приводить до відкритої проблеми: чи існує K-ультраметризація простору ймовірнісних мір всіх K-ультраметричних просторів?

[1] *Savchenko A.* A remark on stationary fuzzy metric spaces // Carpathian Math. Publ. — 2011. — **3**, №1. — С. 124–129.

[2] *Teleiko A., Zarichnyi M.* Categorical topology of compact Hausdorff spaces. — Lviv: VNTL Publ., 1999. — 200 p.

[3] *Вершик А.М.* Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения // Теория представлений, динамические системы. XI. Спец. выпуск. Зап. научн. сем. ПОМИ, СПб. — 2004. — **312**. — С. 69–85.

[4] *den Hartog J.I., de Vink E.P.* Building Metric Structures with the Meas-Functor // Liber Americorum, Jaco de Bakker, F. de Boer, M. van der Heijden, P. Klint and J. Rutten (eds.), CWI, Amsterdam. — 2002. — P. 93–108.

[5] *Hubal' O., Zarichnyi M.* Idempotent probability measures on ultrametric spaces // J. Math. Anal. and Appl. — 2008. — **343**, №2. — P. 1052–1060.

[6] *Barr M., Wells Ch.* Toposes, triples and theories. – Berlin: Springer-Verlag, 1985. — 342 p.

[7] *Заричный М.М.* Характеризация функторов G-симметрической степени и продолжения функторов на категории Клейсли // Мат. заметки. — 1992. — **52**, №5. — С. 42–48.

[8] *Дранишников А.Н.* Асимптотическая топология // УМН. — 2000. — **55**, №6. — С. 71–116.

FUNCTORS ON THE CATEGORY OF K-ULTRAMETRIC SPACES

Aleksandr SAVCHENKO

Kherson State Agrarian University,
23 Rozy Lyuksemburg Str., Kherson 73011, Ukraine

e-mail: *savchenko1960@rambler.ru*

The class of K-ultrametric spaces is a generalization of that of ultrametric spaces. In the paper, we consider functors in the category of (uniformly) K-ultrametric spaces and K-nonexpanding maps. In particular, it is shown that the probability meassure and hyperspace functors form monads in this category. The problem of extension of functors onto the Kleisli categories of these monads is considered.