ПРО ПРАВІ КІЛЬЦЯ БЕЗУ СКІНЧЕННОГО СТАБІЛЬНОГО РАНГУ

©2012 р. Богдан ЗАБАВСЬКИЙ[1], *Галина ЗЕЛІСКО*[1], *Тетяна КИСІЛЬ*[2]

[1] Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, Львів 79000

e-mail: *b_zabava@ukr.net, zelisko_halyna@yahoo.com*

[2] Хмельницький національний університет, вул. Інститутська 11, Хмельницький 29016

e-mail: *kysil_tanya@ukr.net*

Редакція отримала статтю 19 березня 2012 р.

Отримано нове описання правих кілець Безу скінченного стабільного рангу n за допомогою вираження довільного рядка довжини n через відповідний унімодулярний рядок.

В праці [1] описано регулярні кільця скінченного стабільного рангу n як кільця, в яких для довільного рядка x довжини n над кільцем існує такий унімодулярний стовпчик y довжини n над даним кільцем, що $xyx = x$. В даній праці ми отримали аналогічне описання правих кілець Безу скінченного стабільного рангу n.

Під кільцем R в даній праці розумітимемо таке асоціативне кільце з одиницею, що $1 \neq 0$.

УДК: 512.552.12; MSC 2010: 16U80

Ключові слова і фрази: кільце Безу, стабільний ранг

Праве (ліве) кільце Безу — це кільце, в якому довільний скінченно породжений правий (лівий) ідеал є головним. Рядок $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ над кільцем R називається унімодулярним, якщо

$$a_1R + a_2R + \cdots + a_nR = R.$$

Скажемо, що натуральне число n є стабільним рангом кільця R, якщо для довільного унімодулярного рядка $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1})$ довжини $n+1$ над кільцем R існують такі елементи $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$, що рядок

$$(a_1 + a_{n+1}x_1, a_2 + a_{n+1}x_2, \ldots, a_n + a_{n+1}x_n)$$

є унімодулярним [2].

Твердження 1. *Кільце R є правим кільцем Безу тоді і тільки тоді, коли для довільних $a, b \in R$ існує такий елемент $d \in R$ і унімодулярний рядок (a_0, b_0, c), що виконується рівність*

$$(a, b, 0) = d(a_0, b_0, c).$$

Доведення. Нехай R — праве кільце Безу. Тоді для елементів $a, b \in R$ існує такий елемент $d \in R$, що $aR + bR = dR$. Тоді $au + bv = d$, $a = da_0$, $b = db_0$ для деяких елементів $u, v, a_0, b_0 \in R$. Звідси $d(1 - a_0u - b_0v) = 0$, а отже,

$$a_0u + b_0v + c = 1 \tag{1}$$

для деякого елемента $c \in R$ такого, що $dc = 0$. Очевидно, що $(a, b, 0) = d(a_0, b_0, c)$, де рядок (a_0, b_0, c) згідно (1) є унімодулярним.

Нехай тепер для довільних елементів $a, b \in R$ існує такий елемент $d \in R$ і унімодулярний рядок (a_0, b_0, c), що

$$(a, b, 0) = d(a_0, b_0, c). \tag{2}$$

Оскільки рядок (a_0, b_0, c) унімодулярний, то існують такі елементи $u, v, w \in R$, що

$$a_0u + b_0v + cw = 1. \tag{3}$$

З рівності (2) випливає, що

$$a = da_0, b = db_0, dc = 0. \tag{4}$$

Звідси $aR + bR \subset dR$.

Враховуючи рівності (3) та (4), маємо $au + bv = d$, тобто $dR \subseteq aR + bR$. Звідси $aR + bR = dR$. З довільності вибору елементів a і b випливає, що R — праве кільце Безу. $\square$

У випадку правих кілець Безу скінченного стабільного рангу n отримаємо аналогічний результат.

Теорема 1. *Нехай R — праве кільце Безу скінченного стабільного рангу n. Тоді для довільного рядка $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ довжини n над кільцем R існує такий елемент $d \in R$ і такий унімодулярний рядок $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ довжини n над R, що*

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = d(b_1, b_2, \dots, b_n).$$

Доведення. Оскільки R є правим кільцем Безу, то для елементів $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$ знайдеться такий елемент $d \in R$, що

$$a_1R + a_2R + \dots + a_nR = dR.$$

Звідси

$$a_1 = da_1^0,\ a_2 = da_2^0,\ \dots,\ a_n = da_n^0 \tag{5}$$

і

$$a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_nu_n = d \tag{6}$$

для деяких елементів $u_1, u_2, \dots, u_n, a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0 \in R$. З рівностей (5) та (6) отримаємо

$$d(1 - a_1^0u_1 - a_2^0u_2 - \dots - a_n^0u_n) = 0.$$

Тоді

$$a_1^0u_1 + a_2^0u_2 + \dots + a_n^0u_n + c = 1 \tag{7}$$

для деякого такого елемента $c \in R$, що

$$dc = 0. \tag{8}$$

Оскільки стабільний ранг кільця R дорівнює n, то для унімодулярного рядка $(a_1^0, a_2^0, \dots, a_n^0, c)$ існують такі елементи $x_1, x_2, \dots, x_n \in R$, що

$$(a_1^0 + cx_1)R + (a_2^0 + cx_2)R + \dots + (a_n^0 + cx_n)R = R. \tag{9}$$

Завдяки рівностям (7) та (8) отримаємо, що

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = d(a_1^0 + cx_1, a_2^0 + cx_2, \dots, a_n^0 + cx_n),$$

де, в силу (9), рядок $(a_1^0 + cx_1, a_2^0 + cx_2, \dots, a_n^0 + cx_n)$ є унімодулярним. Теорему доведено. $\square$

У випадку комутативного кільця для рядків довжини 2 правильним є і обернене твердження.

Теорема 2. *Нехай R — таке комутативне кільце, що для довільного рядка (a_1, a_2) над R існує такий елемент $d \in R$ і такий унімодулярний рядок (b_1, b_2), що $(a_1, a_2) = d(b_1, b_2)$. Тоді R є кільцем Безу стабільного рангу 2.*

Доведення. Оскільки рядок (b_1, b_2) є унімодулярним, то існують такі елементи $u_1, u_2 \in R$, що

$$b_1u_1 + b_2u_2 = 1. \tag{10}$$

З рівності $(a_1, a_2) = d(b_1, b_2)$ випливає, що

$$a_1 = db_1, \;\; a_2 = db_2. \tag{11}$$

В силу (10) отримаємо $a_1u_1 + a_2u_2 = d$, згідно (11) маємо $a_1R + a_2R = dR$. Тобто R є кільцем Безу.

Покажемо, що стабільний ранг R дорівнює 2. Нехай (a_1, a_2, a_3) — довільний унімодулярний рядок над R. Згідно обмежень, накладених на кільце R, для рядка (a_1, a_2) існує такий елемент d та такий унімодулярний рядок (b_1, b_2), що $(a_1, a_2) = d(b_1, b_2)$.

З унімодулярності рядка (b_1, b_2) випливає існування таких елементів u_1, u_2, що $b_1u_1 + b_2u_2 = 1$.

Покажемо, що рядок $(a_1 - a_3u_2, a_2 + a_3u_1)$ є унімодулярним. Справді,

$$(a_1 - a_3u_2)(-b_2) + (a_2 + a_3u_1)b_1 = -a_1b_2 + a_2b_1 + a_3(u_1b_1 + u_2b_2).$$

Оскільки $a_2b_1 = a_1b_2$ і $b_1u_1 + b_2u_2 = 1$, то

$$(a_1 - a_3u_2)(-b_2) + (a_2 + a_3u_1)b_1 = a_3.$$

Крім того $(a_1 - a_3u_2)u_1 + (a_2 + a_3u_1)u_2 = a_1u_1 + a_2u_2 = d$. Оскільки рядок (a_1, a_2, a_3) є унімодулярним, то очевидно, що $dR + a_3R = R$, а тому рядок $(a_1+a_3(-u_2), a_1+a_3u_1)$ є унімодулярним. Тобто, стабільний ранг кільця R дорівнює 2. $\square$

Індукція дозволяє нам перенести цей результат на випадок довільного скінченного стабільного рангу.

Автори не знають, чи можна перенести цей результат на випадок некомутативного кільця.

[1] *Menal P., Moncasi J.* On regular ring with stable range 2 // J. Pure Appl. Algebra. — 1982. — **24**. — P. 25–40.

[2] *Vaserstein L. N.* The stable rank of rings and dimensionality of topological spaces // Functional Anal. Appl. — 1971. — **5**. — P. 102–110.

ON THE RIGHT BEZOUT RING WITH FINITE STABLE RANGE

Bogdan ZABAVSKY[1], *Halyna ZELISKO*[1], *Tetyana KYSIL*[2]

[1] Ivan Franko Lviv National University,
1 Unversytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

e-mail: *b_zabava@ukr.net, zelisko_halyna@yahoo.com*

[2] Khmelnitsky National University,
11 Instytutska Str., Khmelnitsky 29016, Ukraine

e-mail: *kysil_tanya@ukr.net*

New characterization of right Bezout rings with the finite stable range n is received by means of expressing of any row of the length n through the relevant unimodular row.