# ФУНКЦІОНАЛЬНО-ОПЕРАТОРНИЙ АНАЛІЗ ПРОБЛЕМИ ЗБІЖНОСТІ ДЛЯ МЕТОДУ ДИСКРЕТНИХ АПРОКСИМАЦІЙ Ф. КАЛОДЖЕРО В БАНАХОВИХ ПРОСТОРАХ

©*2012 р. Мирослав ЛЮСТИК*[1], *Анатолій ПРИКАРПАТСЬКИЙ*[1,2], *Микола ПРИТУЛА*[3], *Мирослава ВОВК*[4]

[1] Гірничо-металургійна академія, Університет науки і технологій, Краків 30059, Польща

e-mail: *lustyk@wms.mat.agh.edu.pl*

[2] Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, вул. Франка 24, Дрогобич 82100

e-mail: *pryk.anat@ua.fm, prykanat@cybergal.com*

[3] Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, Львів 79602

e-mail: *pmm@franko.lviv.ua*

[4] Львівський національний університет "Львівська Політехніка", вул. С. Бандери 12, Львів 79013

Редакція отримала статтю 24 квітня 2012 р.

УДК: 517.95; MSC 2010: Primary 65L07, 65N12; Secondary 65M12; 11J83

*Ключові слова і фрази:* прекційно-алгебраїчний підхід, дискретна апроксимація, збіжність, стабільність, проблема нерухомої точки

Розвивається проєкційно-алгебраїчний метод дискретних апроксимацій для лінійних диференціальних рівнянь в банахових просторах, дано аналіз збіжності скінченно-вимірних апроксимацій, що грунтуються на функціонально-алгебраїчному підході до дискретних апроксимацій та методах теорії операторів в банахових просторах. Розглянуто застосування отриманих результатів до функціонально-інтерполяційної схеми проєкційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій. На основі узагальненого твердження типу Лере-Шаудера розглянута проєкційно-алгебраїчна схема дискретних апроксимацій та дано аналіз її розв'язності та збіжності для спеціального класу нелінійних операторних рівнянь.

## 1 Вступ

Нехай $X$ і $Y$ є заданими функціональними просторами Банаха. Розглянемо диференціально-операторне рівняння

$$Au = f(u), \tag{1}$$

де, в загальнім випадку, $f : X \to Y$ є деяким неперервним нелінійним відображенням, а оператор $A : X \to Y$ є замкненим лінійним диференціальним виразом $A := \sum_{|\beta|=0}^{m} a_\beta(x) \frac{\partial^\beta}{\partial x^\beta}$ з частковими похідними в області $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ з гладкими коефіцієнтами $a_\beta \in C^\infty(\mathbb{R}^q; \mathbb{R}), q, m \in \mathbb{Z}_+$, та областю визначення $D(A) \subset X$, і задовольняє умову $\overline{Range(A)} = Y$, або $Range(A) = Y$. З метою побудови дискретної апроксимації рівняння (1), придатної для ефективних комп'ютерних обчислень, ми розвиваємо проєкційно-алгебраїчний метод дискретних апроксимацій, що грунтується на функціональному та Лі-алгебраїчному підходах праць [1, 2, 3, 4, 5]. Грунтуючись на загальних властивостях [6, 7, 8] апроксимуючих скінченно-вимірних банахових підпрострів, нами дано опис необхідних умов збіжності прєкційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій для сталого відображення $f : X \to Y$ як в загальному випадку, так і у випадку функціонально-інтерполяційної схеми дискретних апроксимацій, адаптованої до відповідних скінченно-вимірних квазі-репрезентацій базисної операторної алгебри Гайзенберга-Вейля. Використовуючи результати праць [4, 5] про існування розв'язків нелінійних операторних рівнянь, що грунтуються на узагальненій теоремі типу Лере-Шаудера, нами описані достатньо ефективні необхідні умови розв'язності та збіжності проєкційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій для випадку нелінійного неперервного A-компактного відображення $f : X \to Y$ та замкненого лінійного сюрєктивного оператора $A : X \to Y$.

## 2 Функціонально-операторні аспекти проєкційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій лінійних рівнянь

Нижче будемо вивчати випадок рівняння (1), коли відображення $f : X \to Y$ є довільним, але сталим вектором простору $Y$. Розглянемо дві сім'ї скінченно-вимірних інтерполяційних функціональних підпросторів $\tilde{X}_N \subset X$, а також $\tilde{Y}_N \subset Y$ для $N \in \mathbb{Z}_+$ і таких, що $\tilde{X}_N \subset \tilde{X}_{N+1}$, $\tilde{Y}_N \subset \tilde{Y}_{N+1}$.

Коли задана область $\Omega \subset \mathbb{R}^q$ є обмеженою, для простору $X := L_p(\Omega; \mathbb{R})$ та області визначення $D(A) = W_p^{(m+s)}(\Omega)$ і $Range(A) = W_p^{(s)}(\Omega) \subset L_p(\Omega; \mathbb{R}) := Y$, $p > q$, $s > 0$, вирази $\tilde{X}_N := P_N^{(x)} W_p^{(m+s)}(\Omega)$, $\tilde{Y}_N := P_N^{(y)} W_p^{(s)}(\Omega)$, де $P_N^{(x)} \to X$ і $P_N^{(y)} \to Y$, $N \in \mathbb{Z}_+$, є лінійними операторами, визначеними на неперервних функціях в області $\Omega \subset \mathbb{R}^q$. Оператори $P_N^{(x)}$ і $P_N^{(y)}$ є, як відомо, операторами проєктування, для яких виконуються умови $P_N^{(x)} P_N^{(x)} = P_N^{(x)}$, $P_N^{(y)} P_N^{(y)} = P_N^{(y)}$ для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$.

Розглянемо тепер для кожного $N \in \mathbb{Z}_+$ наступне рівняння

$$P_N^{(y)} A \tilde{u}_N = P_N^{(y)} f \tag{2}$$

на елемент $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$, для якого $\lim_{N\to\infty} \|A\tilde{u}_N - f\|_Y = 0$ при $N \to \infty$, де відображення $f : X \to Y$ є сталим заданим елементом простору $Y$. Очевидно, що рівняння (2) має один розв'язок $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$, коли для кожного $N \in \mathbb{Z}_+$ має місце рівність

$$P_N^{(y)} A \tilde{X}_N = \tilde{Y}_N. \tag{3}$$

Умова (3) є рівнозначна існуванню оберненого скінченно-вимірного оператора $P_N^{(y)} A P_N^{(x)} := A_N : \tilde{X}_N \to \tilde{Y}_N$ для кожного $N \in \mathbb{Z}_+$.

Дамо визначення довільної гранично-щільної сім'ї підпросторів $\{\mathcal{B}_N \subset \mathcal{B} : N \in \mathbb{Z}_+\}$ банахового простору $B$.

**Означення 2.1.** *Сім'я підпросторів* $\{\mathcal{B}_N \subset \mathcal{B} : N \in \mathbb{Z}_+\}$ *називається гранично-щільною в* $\mathcal{B}$, *якщо для кожного* $g \in \mathcal{B}$ *має місце рівність*

$$\rho(g, \mathcal{B}_N) := \inf_{\tilde{w}_N \in \mathcal{B}_N} \|g - \tilde{w}_N\|_{\mathcal{B}} \to 0$$

*при* $N \to \infty$.

Для подальшого аналізу нам буде потрібне наступне твердження про збіжність процесу апроксимації.

**Твердження 2.1.** *Нехай оператор* $A : X \to Y$ *є оборотним на щільній області визначення* $D(A) \subset X$ *а також має місце рівність* $\overline{Range(A)} = Y$, *де* $X$ *і* $Y$ *є просторами Банаха. Припустимо, що сім'я підпросторів* $\left\{A\tilde{X}_N \in Y : N \in \mathbb{Z}_+\right\}$ *є гранично-щільною, а оператори проєктування* $P_N^{(y)} : Y \to Y$ *задовольняють умову*

$$\|P_N^{(y)}\| \leq c_N^{(y)} \tag{4}$$

*для деякої послідовності* $c_N^{(y)} \in \mathbb{R}^N$, $N \in \mathbb{Z}_+$. *Тоді для кожного елемента* $f \in Y$ *рівняння*

$$P_N^{(y)} Au = P_N^{(y)} f$$

*має єдиний розв'язок* $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$ *для усіх* $N \in \mathbb{Z}_+$, *де*

$$\lim_{N\to\infty} \|A\tilde{u}_N - f\|_Y = 0, \tag{5}$$

*тоді і тільки тоді, коли*
*i) виконується умова* (3)*;*
*ii) існують такі послідовності* $\tau_N^{(y)} \in \mathbb{R}_+$, $N \in \mathbb{Z}_+$, *що*

$$\|P_N^{(y)} \tilde{v}_N\|_{\tilde{Y}_N} \geq \tau_N^{(y)} \|\tilde{v}_N\|_Y, \quad \overline{\lim}_{N\to\infty} c_N^{(y)} \tau_N^{(y),-1} < \infty, \tag{6}$$

*для кожного елемента* $\tilde{v}_N \in A\tilde{X}_N$, $N \in \mathbb{Z}_+$;
*iii) верхня межа*

$$\overline{\lim}_{N\to\infty} \left[ \left(1 + c_N^{(y)} \tau_N^{(y),-1}\right) \rho(f, A\tilde{X}_N) \right] = 0$$

*для кожного* $f \in Y$.

***Доведення.*** Перш за все припустимо, що для кожного елемента $f \in Y$ рівняння $P_N^{(y)} Au = P_N^{(y)} f$, $N \in \mathbb{Z}_+$, має єдиний розв'язок $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$, а також $\|A\tilde{u}_N - f\|_Y \to 0$ при $N \to \infty$. Тоді на основі нерівності

$$\rho(f, A\tilde{X}_N) = \inf_{w_N \in A\tilde{X}_N} \|f - \tilde{w}_N\|_Y \leq \|f - A\tilde{u}_N\|_Y$$

можна зробити висновок, що $\lim_{N\to\infty} \rho(f, A\tilde{X}_N) = 0$, тобто сім'я підпросторів $\left\{A\tilde{X}_N \in Y : n \in \mathbb{Z}_+\right\}$ є гранично щільною в $Y$. Тепер визначимо $N \in \mathbb{Z}_+$ і розглянемо рівняння $P_N^{(y)} Au = \tilde{f}_N \in \tilde{Y}_N$. Зрозуміло, що існує такий елемент $f \in Y$, для якого $P_N^{(y)} f = \tilde{f}_N$, тобто отримуємо рівняння, котре на підставі припущення твердження має вже єдиний розв'язок $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$. А це означає, що $P_N^{(y)} A\tilde{X}_N = \tilde{Y}_N$, тобто маємо доведення умови $i)$ нашого твердження.

Оскільки відображення $P_N^{(y)} : Y \to Y$ є оператором проєктування, то можна розглянути його звуження $\bar{P}_N^{(y)}|_{A\tilde{X}_N} : A\tilde{X}_N \to \tilde{Y}_N$ для кожного $N \in \mathbb{Z}_+$. Оператор $\bar{P}_N^{(y)} : A\tilde{X}_N \to \tilde{Y}_N$ згідно (4) та (6) є обмеженим і взаємно однозначним. Тоді на підставі твердження Банаха про обернений оператор отримуємо, що існує обмежений обернений оператор $\bar{P}_N^{(y),-1} : \tilde{Y}_N \to A\tilde{X}_N$.

Нехай тепер $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$ є відповідним наближеним розв'язком рівняння $P_N Au = P_N f$. Тоді має місце рівність $A\tilde{u}_N = \bar{P}_N^{(y),-1} P_N f$, з котрої на підставі умови (5) отримуємо, що

$$\lim_{N\to\infty} \|\bar{P}_N^{(y),-1} P_N f - f\|_Y = 0$$

для кожного $f \in Y$. А це означає, що $\lim_{N\to\infty} \bar{P}_N^{(y),-1} P_N f = f$ для кожного заданого елемента $f \in Y$. Застосовуючи тепер до цієї умови класичне твердження Банаха-Штайнгауза [6, 7] отримуємо, що

$$\sup_{N\in\mathbb{Z}_+} \|\bar{P}_N^{(y),-1} P_N^{(y)}\|_Y \leq c^{(y)} < \infty$$

для певної сталої величини $c^{(y)} \in \mathbb{R}_+$. Таким чином, для кожного елемента $P_N^{(y)} \tilde{w}_N = \tilde{w}_N$ отримуємо, що

$$\|\bar{P}_N^{(y),-1} \tilde{w}_N\|_Y = \|\bar{P}_N^{(y),-1} P_N^{(y)} j_N \tilde{w}_N\|_Y \leq \|\bar{P}_N^{(y),-1} P_N\|_Y \|j_N \tilde{w}_N\|_Y \leq$$
$$\leq c^{(y)} \|j_N\| \|\tilde{w}_N\|_{\tilde{Y}_N} \tag{7}$$

де $j_N : \tilde{Y}_N \to Y$ є відповідним щільно-заданим оператором вкладення, а $\|j_N\|$ є його нормою. Нерівність (7) означає, що норма оператора $\bar{P}_N^{(y),-1} : \tilde{Y}_N \to A\tilde{X}_N \subset Y$ є одностайно обмеженою для усіх $N \in \mathbb{Z}_+$.

Тепер виберемо довільний елемент $\tilde{v}_N \in A\tilde{X}_N \subset Y$ і обчислимо величину $\tilde{w}_N := \bar{P}_N^{(y)}\tilde{v}_N \in \tilde{Y}_N$. Тоді на підставі нерівності (7) отримуємо

$$\|\tilde{v}_N\|_Y = \|\bar{P}_N^{(y),-1}\tilde{w}_N\|_Y \leq c^{(y)}\|j_N\|\|\tilde{w}_N\|_{\tilde{Y}_N} := \tau_N^{(y),-1}\|P_N\tilde{v}_N\|_{\tilde{Y}_N},$$

де величини $\tau_N^{(y)} > 0$ є обмеженими для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$. А це означає, що стосовно кожного елемента $\tilde{v}_N \in A\tilde{X}_N$ виконується умова $ii)$ нашого твердження, тобто $\|P_N^{(y)}\tilde{v}_N\|_{\tilde{Y_N}} \geq \tau_N^{(y)}\|\tilde{v}_N\|_Y$, $N \in \mathbb{Z}_+$.

Достатність умов $i) - iii)$ доведемо наступним чином. Розв'яжемо рівняння $P_N Au = P_N f$ для $N \in \mathbb{Z}_+$, розв'язок котрих $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$ є єдиним. Тоді їх можна подати у такому вигляді:

$$\tilde{u}_N = A^{-1}\bar{P}_N^{(y),-1}P_N f,$$

де, як і вище, лінійне відображення $\bar{P}_N^{(y)} := P_N^{(y)}|_{A\tilde{X}_N} : A\tilde{X}_N \to \tilde{Y}_N$ є відповідною редукцією на $A\tilde{X}_N \subset Y$ оператора проєктування $P_N^{(y)} : Y \to Y$ на підпростір $\tilde{Y}_N \subset Y$. Оскільки на підставі умови $ii)$ маємо $\|\bar{P}_N^{(y),-1}\| \leq \tau_N^{(y),-1}$, то норма $\|\bar{P}_N^{(y),-1}P_N^{(y)}\| \leq c_N^{(y)}\tau_N^{(y),-1}$ є рівномірно обмеженою для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$. Звідси для довільного елемента $\tilde{w}_N \in A\tilde{X}_N$ отримуємо

$$\begin{gathered}
\|A\tilde{u}_N - f\|_Y = \|\bar{P}_N^{(y),-1}P_N f - f\|_Y \leq \\
\leq \inf_{\tilde{w}_N \in A\tilde{X}_N}\left(\|\bar{P}_N^{(y),-1}P_N f - \bar{P}_N^{(y),-1}P_N^{(y)}\tilde{w}_N\|_Y + \|\tilde{w}_N - f\|_Y\right) \leq \\
\leq \inf_{\tilde{w}_N \in A\tilde{X}_N}\left(\|\bar{P}_N^{(y),-1}P_N f - \bar{P}_N^{(y),-1}P_N^{(y)}\tilde{w}_N\|_Y + \|\tilde{w}_N - f\|_Y\right) \leq \\
\leq \inf_{\tilde{w}_N \in A\tilde{X}_N}\left(c_N^{(y)}\tau_N^{(y),-1} + 1\right)\rho(f,\tilde{w}_N) = \left(c_N^{(y)}\tau_N^{(y),-1} + 1\right)\rho(f, A\tilde{X}_N),
\end{gathered} \tag{8}$$

де ми взяли до уваги, що $\bar{P}_N^{(y),-1}P_N^{(y)}\tilde{w}_N = \tilde{w}_N$ для всіх $\tilde{w}_N \in A\tilde{X}_N$. А це на підставі припущення $iii)$ означає існування границі $\lim_{N\to\infty}\|A\tilde{u}_N - f\|_Y = 0$ для довільного елемента $f \in Y$, що завершує доведення. $\square$

*Зауваження.* Відзначимо, що певний аналог даного твердження, але відмінний від Твердження 2.2, був встановлений раніше в [8].

Як очевидний висновок з доведення Твердження 2.2 отримуємо, що у випадку, коли $dim\ \tilde{X}_N = dim\ \tilde{Y}_N < \infty$ для всіх $N \in \mathbb{Z}_+$, отримуємо, що умова $i)$ у вигляді (3) виникає з умови $ii)$. Більше того, має місце наступне твердження про збіжність ров'язку $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$ при $N \to \infty$ до елемента $u \in X$.

**Твердження 2.2.** *Нехай виконуються всі умови Твердження* 2.1, *зокрема замкнений оператор* $A : X \to Y$ *володіє обмеженим оберненим оператором, тобто* $\|A^{-1}\| < \infty$ *і* $D(A) = X$ *(на підставі класичного твердження про замкнений оператор). Тоді отримана послідовність роз'язків* $\tilde{u}_N \in \tilde{X}_N$ *рівняння* $P_N^{(y)}Au = P_N^{(y)}f$ *при* $N \to \infty$ *є відповідними наближеннями до розв'язку рівняння* $Au = f$ *щодо норми* $\|\cdot\|_X$.

***Доведення.*** Припустимо, що $u_N \in X_N$ є розв'язком $P_N^{(y)}Au_N = P_N^{(y)}f$ для усіх $N \in \mathbb{Z}_+$. Оцінимо тепер різницю $(u - \tilde{u}_N) \in X$ щодо норми простору $X$ :

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}_N - u\|_X = \|\tilde{u}_N - A^{-1}f\|_X = \|A^{-1}A\tilde{u}_N - A^{-1}f\|_X = \\ = \|A^{-1}(A\tilde{u}_N - f)\|_X \leq \|A^{-1}\| \, \|A\tilde{u}_N - f\|_Y. \end{aligned} \tag{9}$$

На підставі (8) маємо $\lim_{N\to\infty} \|A\tilde{u}_N - f\|_Y = 0$, а з того, що оператор $A^{-1}$ є обмеженим, права сторона рівняння (9) прямує до нуля при $N \to \infty$. Тим самим стверджуємо, що $\lim_{N\to\infty} \|\tilde{u}_N - u\|_X = 0$, а це завершує наше доведенн. □

## 3 Функціонально-операторні аспекти проєкційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій для нелінійних операторних рівнянь в банахових просторах

Розглянемо нелінійне операторне рівняння (1) у вигляді

$$Au = f(u), \tag{10}$$

де $A : X \to Y$ є замкненим сюр'єктивним оператором з умовою $\dim ker A > 0$, а відображення $f : X \to Y$ є довільним нелінійним і неперервним із областю визначення $D(f) = S_r(0) \cap D(A) \subset X$ ($S_r(0) \subset X$ є сферою радіуса $r > 0$ з центром в нулі), і які задовільняють наступні

дві умови: i) $A$-компактності, тобто для будь-яких обмежених множин $U \subset D(f)$ і $V \subset Y$ замкнена множина $\overline{f(U \cap A^{-1}(V)} \subset Y$ є компактною;
ii) $k_f < k_A$, де за визначенням,

$$k_A^{-1} := \sup_{\|v\|_Y=1} \inf_{u \in D(A)} \{\|u\|_X : Au = v\} < \infty, \quad k_f := \sup_{u \in S_r(0)} \frac{1}{r} \|f(u)\| < \infty.$$

Якщо $\tilde{X_N} \subset \tilde{X}_{N+1} \subset X$ і $\tilde{Y_N} \subset \tilde{Y}_{N+1} \subset Y, N \in \mathbb{Z}_+$ є скінченновимірними банаховими підпросторами, а $P_N^x : X \to \tilde{X}_N, N \in \mathbb{Z}_+$, та $P_N^y : Y \to \tilde{Y}_N, N \in \mathbb{Z}_+$ є відповідними операторами проєктування, то наступні рівняння

$$P_N^{(y)} A\tilde{u}_N = P_N^{(y)} f(\tilde{u}_N) \tag{11}$$

на елементи $\tilde{u}_N \subset \tilde{X}_N, N \in \mathbb{Z}_+$, котрі є наближеннями до шуканого розв'язку рівняння (10), у загальнім випадку не єдиного, оскільки $\dim kerA \geq 1$. Зауважимо тут, що проєкційний метод називають "реалізовним", якщо множина $\mathcal{M} \subset X$ розв'язків рівняння (10) є непустою, а при достатньо великих $N \in \mathbb{Z}_+$ також є не пустими множини $M_N \subset \tilde{X}_N$ розв'язків рівнянь (11). Метод називають "збіжним", якщо він є реалізовним і виконана умова

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\tilde{u}_N \in \tilde{\mathcal{M}}_N} \inf_{u \in \mathcal{M}} ||\tilde{u}_N - u||_X = 0. \tag{12}$$

Є очевидним, що для практичних застосувань критерії реалізовності проєкційного методу та його збіжності є вельми важливими, тому ми зупинимось на них, грунтуючись на результатах праць [4, 5], де питання розв'язності певного класу нелінійних операторних рівнянь були проаналізовані на основі одного узагальненого твердження типу Лере-Шаудера в банахових просторах. А саме, має місце наступне твердження, встановлене в [4, 5], яке дає опис множини $\mathcal{M}$ розв'язків нелінійного операторного рівняння (10).

**Твердження 3.1.** *Нехай виконані умови i) та ii), сформульовані вище. Тоді при додатковій умові* $\dim kerA \geq 1$ *рівняння* (10) *має непусту множину* $\mathcal{M}$ *розв'язків, чия топологічна розмірність* $\dim \mathcal{M} \geq \dim kerA - 1$.

Нижче вважатимемо, що виконнані всі необхідні умови Твердження 3.1. Тоді наступний результат характеризує реалізовність проєкційного алгоритму (11).

**Твердження 3.2.** *Нехай виконані умови i), ii) та додатково*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{v\in Range(A)\cap Range(f)} ||P_N^{(y)}v - v||_Y = 0. \tag{13}$$

*Тоді для достатньо великих чисел* $N \in \mathbb{Z}_+$ *множини* $\tilde{\mathcal{M}}_N \subset \tilde{X}_N$ *є не пустими і має місце умова збіжності* (12).

***Доведення.*** Покладемо

$$k_f^{(N)} \; : \; = \sup_{\tilde{u}_N\in S_r(0)} \frac{1}{r}||P_N^{(y)} f(\tilde{u}_N)||_{\tilde{Y}_N}, \tag{14}$$

та

$$k_A^{(N),-1} \; := \sup_{\tilde{v}_N\in\tilde{Y}_N} \frac{1}{||\tilde{v}_N||_{\tilde{Y}_N}} \inf_{\tilde{u}_N\in P_N^{(x)}D(A)} \{||\tilde{u}_N||_{\tilde{X}_N} : P_N^{(y)} A\tilde{u}_N = \tilde{v}_N\} \tag{15}$$

і виберемо таке $N_0 \in \mathbb{Z}_+$, щоб $\dim ker(P_{N_0}^{(y)}A) \geq 1$, а також

$$k_f \leq k_f^{(N_0)} < k_A^{(N_0)} \leq k_A. \tag{16}$$

Тоді на основі виразів (14) і (15) з умови (16) отримуємо, що для всіх $N \geq N_0$ виконується умова

$$k_f \leq k_f^{(N)} < k_A^{(N)} \leq k_A.$$

А це означає, згідно узагальненого твердження типу Лере-Шаудера [4, 5], що послідовність рівнянь (12) має розв"язки для всіх $N \geq N_0$, тобто всі множини $\tilde{\mathcal{M}}_N \subset \tilde{X}_N, N \geq N_0$, є непустими, а сам проєкційний метод є реалізовним.

Візьмемо тепер деяке $\varepsilon \geq 0$ і розглянемо окіл

$$U_\varepsilon(\mathcal{M}) := \{u \in D(f) : \inf_{\bar{u}\in\mathcal{M}\subset D(f)} ||\bar{u} - u||_X < \varepsilon.$$

Є очевидним, що множина $D(f)\backslash U_\varepsilon(\mathcal{M})$ не містить розв'язків рівняння (10), і для деякого $\alpha_\varepsilon > 0$ величина

$$\inf_{\bar{u}\in D(f)\backslash U_\varepsilon(\mathcal{M})} ||Au - f(u)||_Y = \alpha_\varepsilon > 0.$$

Виберемо на основі (13) число $N_\varepsilon \in \mathbb{Z}_+$ так, щоб для всіх $N \geq N_\varepsilon$

$$\sup_{u \in D(f)} (||Au - P_N^{(y)} Au||_Y + ||f(u) - P_N^{(y)} f(u)||_Y) < \alpha_\varepsilon.$$

Тоді для всіх $u \in D(f) \backslash U_\varepsilon(\mathcal{M})$ виконується нерівність

$$||P_N^{(y)} Au - P_N^{(y)} f(u)||_Y \geq ||Au - f(u)||_Y - \\ -(||Au - P_N^{(y)} Au||_Y + ||f(u) - P_N^{(y)} f(u)||_Y) > \alpha_\varepsilon - \alpha_\varepsilon = 0,$$

тобто при $N \geq N_\varepsilon$ має місце включення $\tilde{\mathcal{M}}_N \subset U_\varepsilon(\mathcal{M})$. Оскільки $\varepsilon > 0$ є вибраним достатньо малим, умова $\tilde{\mathcal{M}}_N \subset U_\varepsilon(\mathcal{M})$ для всіх $N \geq N_\varepsilon$ є еквівалентною умові збіжності (12), що й доводить твердження. □

У випадку, коли послідовності просторів $\tilde{X}_N \subset \tilde{X}_{N+1} \subset X, N \in \mathbb{Z}_+$ та $\tilde{Y}_N \subset \tilde{Y}_{N+1} \subset Y, n \in \mathbb{Z}_+$ вибрані гільбертовими, причому

$$\cup_{N \in \mathbb{Z}_+} \tilde{X}_N = X, \qquad \cup_{N \in \mathbb{Z}_+} \tilde{Y}_N = Y,$$

а проєктори $P_N^{(x)} : X \to \tilde{X}_N, P_N^{(y)} : Y \to \tilde{Y}_N, N \in \mathbb{Z}_+$, є операторами ортогонального проєктування, то норми $||P_N^{(x)}|| = 1, ||P_N^{(x)}|| = 1, N \in \mathbb{Z}_+$, і для всіх $u \in X, v \in Y$

$$\lim_{N \to \infty} ||u - P_N^{(x)} u||_Y = 0, \qquad \lim_{N \to \infty} ||v - P_N^{(y)} v||_Y = 0. \tag{17}$$

Вважатимемо, також, що виконуються умови (12), (13), і $\dim kerA \geq 1$. Тоді має місце аналог Твердження 3.2 про реалізовність проєкційної схеми дискретних апроксимацій для рівняння (10), заданого в гільбертовому просторі.

**Твердження 3.3.** *Для достатньо великих $N \in \mathbb{Z}_+$ множини $\tilde{\mathcal{M}}_N \subset \tilde{X}_N$ є непустими і має місце умова збіжності* (11).

***Доведення.*** Зрозуміло, що нам необхідно тільки встановити справедливість умови (13). Припустивши протилежне, знайдеться така послідовність індексів $N_k \in \mathbb{Z}_+$ для $k \in \mathbb{Z}_+$, а також елементи $u_k \in D(f), k \in \mathbb{Z}_+$, для яких існує $\varepsilon > 0$, що

$$||P_{N_k}^{(y)} f(u_k) - f(u_k)||_Y > \varepsilon. \tag{18}$$

Оскільки для всіх $k \in \mathbb{Z}_+$ елементи $f(u_k) \in Range(A)$, то завдяки $A$-компактності відображення $f : D(f) \to Y$ існує границя $\lim\limits_{k\to\infty} f(u_k) = \overline{v} \in Y$. Використовуючи тепер існування границь (17), отримуємо:

$$\lim_{k\to\infty} ||P_{N_k}^{(y)} f(u_k) - f(u_k)||_Y \le \lim_{k\to\infty} ||P_{N_k}^{(y)} f(u_k) - P_{N_k}^{(y)} \overline{v}||_Y + \\ + \lim_{k\to\infty} ||P_{N_k}^{(y)} \overline{v} - \overline{v}||_Y + \lim_{k\to\infty} ||\overline{v} - f(u_k)||_Y = 0,$$

що суперечить вихідній нерівності (18). Твердження доведено. □

Як наслідок отриманих вище результатів для випадку, коли відображення $f : D(f) \subset X \to Y$ є сталим, а оператор $A : D(A) \subset X \to Y$ є замкненим і сюр'єктивним, можна встановити додаткові критерії збіжності проєкційно-алгебраїчного методу дискретних апроксимацій для рівняння (10), проаналізованого в попередніх розділах.


[1] *Luśtyk M., Bihun O.* Approximation properties of the Lie-algebraic scheme // Matematychni Studii. — 2003. — **20**. — P. 85–91.

[2] *Luśtyk M.* The Lie-Algebraic Discrete Approximation Scheme for Evolution Equations with Dirichlet/Neumann Data // Universitatis Iagellonicae Acta Mathematica. — 2002. — **40**. — P. 117–124.

[3] *Mitropolski Yu.A.*, *Prykarpatsky A.K.*, *Samoilenko V.H.* A Lie-algebraic scheme of discrete approximations of dynamical systems of mathematical physics // Ukrainian Math. J. — 1988. — **40**. — P. 453–458.

[4] *Prykarpatsky A.K.* A Borsuk-Ulam type generalization of the Leray-Schauder fixed point theorem. Preprint ICTP, IC/2007/028. — Italy: Trieste, 2007.

[5] *Prykarpatsky A.K.* An infinite-dimernsional Borsuk-Ulam type generalization of the Leray-Schauder fixed point proposition and some applications // Ukrainian Math. J. — 2008. — **60**, №1. — P. 114–120.

[6] *Kato T.* The theory of linear operators. — New York: Springer, 1962.

[7] *Бабенко К.* Основы численного анализа. — М.: Наука, 1986. — 744 с.

[8] *Красносельский М.А., Вайнико Г.М., Забрейко П.П.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.

## FUNCTIONAL-OPERATOR ANALYSIS OF THE CONVERGENCE PROBLEM FOR THE F. CALOGERO APPROXIMATION METHOD IN BANACH SPACES

*Miroslav LUSTYK*[1], *Anatoliy PRYKARPATSKY*[1,2], *Mykola PRYTULA*[3], *Myroslava VOVK*[4]

[1] AGH, University of Science and Technology, Cracow 30059, Poland

e-mail: *lustyk@wms.mat.agh.edu.pl*

[2] Ivan Franko State Pedagogical University,
24 Franko Str., Drohobych 82100, Ukraine

e-mail: *pryk.anat@ua.fm, prykanat@cybergal.com*

[3] Ivan Franko National University,
1 Universitets'ka Str., Lviv 79602, Ukraine

e-mail: *pmm@franko.lviv.ua*

[4] National University "Lviv Polytechnica",
12 Bandery Str., Lviv 79013, Ukraine

The projection-algebraic method of discrete approximations of linear differential equations in Banach spaces is developed, the convergence analysis of the corresponding finite-dimensional expressions, based on the functional-analytic approach to discrete approximations and methods of operator theory in Banach spaces, is presented. Application of the results obtained to the functional-interpolation scheme of the projection-algebraic method of discrete approximations is considered. Based on a generalized Leray-Schauder type theorem the projection-algebraic scheme of discrete approximations is proposed, its solvability and convergence for a special class of nonlinear operator equations is analyzed.