МЕТОД ПРОЕКТУВАННЯ І ПЕРЕТВОРЕННЯ ДАРБУ-КРАМА-МАТВЄЄВА

©*2012 р. Юрій СИДОРЕНКО, Олександр ЧВАРТАЦЬКИЙ*

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська 1, Львів 79000

e-mail: *y_sydorenko@franko.lviv.ua*

Редакція отримала статтю 5 квітня 2012 р.

Проведено порівняння алгебризованих методів інтегрування нелінійних рівнянь, запропонованих В.О. Марченком та В.Б. Матвєєвим. Отримане в явній формі матричне пертворення Дарбу-Крама-Матвєєва методом проектування В.О. Марченка.

Вступ

В сучасній теорії нелінійних рівнянь математичної фізики прийнята умовна класифікація [1, 2] систем на: неінтегровні, C-інтегровні та S-інтегровні.

C-інтегровні — це системи, що допускають лінеаризацію при відповідній заміні змінних (“integrable through a change of variables”), S-інтегровні (“integrable by spectral transform method”) — це системи, що допускають дослідження одним із варіантів методу оберненої задачі. Неінтегровні — всі інші, які складають абсолютну більшість реальних фізичних систем. C-інтегровні системи цікаві не тільки самі по собі, але

УДК: 517.9; MSC 2010: 33Q58, 37K10, 37K15

Ключові слова і фрази: метод проектування, перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва, нелінійне рівняння

і тісним зв'язком з S-інтегровними моделями. Розглянемо цей зв'язок на прикладі C-інтегровної системи скалярних рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{c}\alpha_2 v_{t_2} - v_{xx} - 2vv_x = 0, \\ \alpha_3 v_{t_3} - v_{xxx} - 3vv_{xx} - 3v_x^2 - 3v^2 v_x = 0,\end{array}\right. \tag{1}$$

яка тісно пов'язана з S-інтегровним рівнянням Кадомцева-Петвіашвілі (КР):

$$\alpha_3 u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + \frac{3}{4}\alpha_2^2 D^{-1}\{u_{t_2t_2}\}. \tag{2}$$

В рівняннях (1)–(2) і надалі нижні індекси при функціях позначають диференціювання по відповідних змінних: $v_{t_2} := \frac{\partial v}{\partial t_2}$, $v_x := \frac{\partial v}{\partial x}$ і т.д., а α_2, α_3 — деякі, взагалі кажучи, комплексні сталі. Дія оператора L на функцію φ позначатиметься $L\{\varphi\}$. Наприклад, під виразом $D^{-1}\{u_{t_2t_2}\}$ в рівнянні (2) ми розуміємо "першу" первісну функції $\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2}$ стосовно змінної x. При $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ перше з рівнянь системи (1) є добре відомим рівнянням Бюргерса [3], а друге є його "вищою" симетрією. Обидва рівняння лінеаризуються підстановкою Хопфа-Коула [4, 5] до системи вигляду:

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_2 \varphi_{t_2} = \varphi_{xx}, \\ \alpha_3 \varphi_{t_3} = \varphi_{xxx},\end{array}\right. \qquad v = \frac{\varphi_x}{\varphi} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\varphi\right). \tag{3}$$

Розв'язки рівняння КР (2) виражаються через розв'язки системи (1) (а отже, і лінійної системи (3)) таким чином: $u = v_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln\varphi\right)$

Нехай L_0 — матричний лінійний диференціальний оператор зі сталими коефіцієнтами, а $(N \times N)$-матрична функція φ — розв'язок лінійного рівняння:

$$L_0\{\varphi\} = 0. \tag{4}$$

Тоді функції

$$\Phi = \varphi_x \varphi^{-1}, \tag{5}$$

та

$$\tilde{\Phi} = \varphi^{-1}\varphi_x \tag{6}$$

будуть розв'язками нелінійних рівнянь:

$$L\{\Phi\} = 0, \;\; \tilde{L}\{\tilde{\Phi}\} = 0, \tag{7}$$

де L та $\tilde{L}$ — деякі нелінійні диференціальні оператори. Надалі, рівняння вигляду (7), які допускають лінеаризацію (4) за допомогою матричних узагальнень (5)-(6) підстановки Хопфа-Коула (3), ми називатимемо рівняннями типу Бюргерса.

Приклад 1. *Розглянемо рівняння* (4) *з оператором* $L_0 = \alpha_2\partial_{t_2} - \Delta := \alpha_2\partial_{t_2} - \sum_{i=1}^{n} c_i I_N \partial_{x_i}^2$*:*

$$L_0\{\varphi\} := \alpha_2\varphi_{t_2} - \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_{x_i x_i} = 0, \tag{8}$$

де α_2*,* $c_i \in \mathbb{C}$*,* I_N *— одинична матриця розмірності* $N \times N$*.*

Покладемо $x := (x_1, \ldots, x_n)$*. Тоді функції* Φ (5), $\tilde{\Phi}$ (6) *вигляду:*

$$\begin{gathered}\Phi := \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \vdots \\ \Phi_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \varphi_{x_1}\varphi^{-1} \\ \vdots \\ \varphi_{x_n}\varphi^{-1} \end{pmatrix}, \\ \tilde{\Phi} := (\tilde{\Phi}_1, \ldots, \tilde{\Phi}_n) := (\varphi^{-1}\varphi_{x_1}, \ldots, \varphi^{-1}\varphi_{x_n}),\end{gathered} \tag{9}$$

задовольнятимуть, відповідно, рівняння типу Бюргерса вигляду:

$$\alpha_2\Phi_{t_2} = \Delta\Phi + 2(\nabla\Phi^\top)^\top\Phi, \tag{10}$$

$$\alpha_2\tilde{\Phi}_{t_2} = \Delta\tilde{\Phi} + 2\tilde{\Phi}\nabla\tilde{\Phi}, \tag{11}$$

де $\Delta = \sum_{i=1}^{n} c_i\partial_{x_i}^2$*,* $\nabla = (c_1\partial_{x_1}, \ldots, c_n\partial_{x_n})^\top$*.*

Зауваження 1. *Якщо функція* φ *є розв'язком системи:*

$$\begin{cases} L_0\{\varphi\} = 0, \\ M_0\{\varphi\} = 0, \end{cases} \tag{12}$$

то функція Φ *вигляду* (5) *буде розв'язком системи нелінійних рівнянь:*

$$\begin{cases} L\{\Phi\} = 0, \\ M\{\Phi\} = 0, \end{cases} \tag{13}$$

з нелінійними диференціальними операторами M *та* L*.*

Структура роботи є наступна. Перші три розділи в основному призначені для опису методів інтегрування нелінійних рівнянь, запропонованих В.О. Марченком [6] та В.Б. Матвєєвим [7]. Зокрема, твердження 1, 2, 5–7 із розділу 1 та твердження 8 із розділу 2 в дещо іншій формі були отримані в роботі [6]. Аналогічно, твердження 9–11 в іншому вигляді наведено в роботі [7].

В розділі 1 ми демонструємо зв'язок деяких матричних систем типу Бюргерса (C-інтегровних систем) і нелінійних інтегровних моделей теорії солітонів (S-інтегровних систем).

В розділі 2 описується метод побудови точних розв'язків скалярних версій цих нелінійних рівнянь, в основі якого лежить одна з ідей В.О. Марченка, використана ним при розробці алгебризованого методу інтегрування нелінійних моделей — методу операторних алгебр [6]. Суть її полягає в надзвичайно простому вигляді матричного аналога перетворення Хопфа-Коула (5)-(6) при виборі матриці Вронського в якості розв'язку лінійного рівняння (4) (див. Твердження 8). Зокрема, отримуються N-солітонні розв'язки для рівняння Кадомцева-Петвіашвілі (KP) та нелінійного рівняння Шредінгера (NSE). В наступному розділі демонструється підхід до побудови точних розв'язків нелінійних рівнянь за допомогою зображень Лакса та диференціальних перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва [7]. В результаті показано, що методи розділів 2 та 3 приводять до одних і тих самих класів розв'язків відповідних нелінійних рівнянь.

Метою нашого дослідження є прояснення цього результату. А саме, використовуючи ідею В.О. Марченка, в розділі 4 ми отримуємо загальне матричне диференціальне перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва для довільного матричного лінійного еволюційного рівняння як проекцію однократного перетворення Дарбу-Матвєєва більшої матричної розмірності. В додатках отримано явний вигляд матричних коефіцієнтів перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва в термінах функцій, що входять до ядра цього перетворення. Також в додатках наводиться явний вигляд інтегрального оператора, який є оберненим до матричного перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва.

1 Розділ 1

У цьому розділі ми розглянемо зв'язки між матричними узагальненнями рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі (MKP), модифікованого матричного Кадомцева-Петвіашвілі (mMKP), системою Деві-Стюартсона (DS) та матричними рівняннями типу Бюргерса.

Розглянемо пару операторів:

$$\begin{gathered} M_2 = \alpha_2 \partial_{t_2} - D^2 - 2u, \\ M_3 = \alpha_3 \partial_{t_3} - D^3 - 3uD - \tfrac{3}{2} u_x - \tfrac{3}{2} \alpha_2 D^{-1}\{u_{t_2}\}, \end{gathered} \tag{14}$$

де $D^{-1}\{u_{t_2}\}$ — первісна стосовно змінної $x \in \mathbb{R}$ для $(N \times N)$-матричної гладкої, взагалі кажучи, комплекснозначної функції $u_{t_2} := \frac{\partial}{\partial t_2} u(x, t_2, t_3)$; $\alpha_2,\ \alpha_3 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. Комутаторне рівняння $M_2 M_3 - M_3 M_2 =: [M_2, M_3] = 0$ еквівалентне матричному узагальненню рівняння KP:

$$\alpha_3 u_{t_3} = \frac{1}{4} u_{xxx} + \frac{3}{2} u u_x + \frac{3}{2} u_x u + \frac{3}{4} \alpha_2^2 D^{-1}\{u_{t_2 t_2}\} - \frac{3}{2} \alpha_2 \left[u, D^{-1}\{u_{t_2}\}\right] \tag{15}$$

Розглянемо нелокальну редукцію $u - \Phi_x = 0$. Тоді система рівнянь $M_j\{\Phi\} = 0,\ j = 2, 3$ складатиметься з двох рівнянь Бюргерса:

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_2 \Phi_{t_2} - \Phi_{xx} - 2\Phi_x \Phi = 0, \\ \alpha_3 \Phi_{t_3} - \Phi_{xxx} - 3\Phi_{xx}\Phi - 3\Phi_x^2 - 3\Phi_x \Phi^2 = 0. \end{array} \right. \tag{16}$$

Неважко перевірити, що якщо функція Φ є розв'язком системи (16), то $u = \Phi_x$ задовольнятиме матричне рівняння KP (15).

В свою чергу функція Φ задовольнятиме таке матричне узагальнення рівняння KP у потенціальній формі:

$$\alpha_3 \Phi_{t_3} - \frac{1}{4} \Phi_{xxx} - \frac{3}{2} \Phi_x^2 - \frac{3}{4} \alpha_2^2 D^{-1}\{\Phi_{t_2 t_2}\} + \frac{3}{2} \alpha_2 D^{-1}\{[\Phi_x, \Phi_{t_2}]\} = 0. \tag{17}$$

Диференціальний наслідок рівняння (17) виглядає так:

$$\left(\alpha_3 \Phi_{t_3} - \frac{1}{4} \Phi_{xxx} - \frac{3}{2} \Phi_x^2\right)_x - \frac{3}{4} \alpha_2^2 \Phi_{t_2 t_2} + \frac{3}{2} \alpha_2 \left[\Phi_x, \Phi_{t_2}\right] = 0 \tag{18}$$

і має такий самий вигляд, як матричне рівняння KP (15) після підстановки $u = \Phi_x$.

Тепер розглянемо побудову розв'язків матричних рівнянь Бюргерса (16). Для цього використовуються розв'язки рівнянь $M_j\{\varphi\}$, $j = 2, 3$, з операторами вигляду (14), в яких покладається $u = 0$. А саме, має місце таке твердження:

Твердження 1. *Нехай $(N \times N)$-матричні функції φ задовольняють систему:*

$$\begin{cases} \alpha_2\varphi_{t_2} - \varphi_{xx} = \varphi A, \\ \alpha_3\varphi_{t_3} - \varphi_{xxx} = 0 \end{cases} \tag{19}$$

де $\alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$; A — $(N \times N)$-стала матриця.

Тоді функція $\Phi := \varphi_x\varphi^{-1}$ (5) *задовольнятиме систему матричних рівнянь типу Бюргерса* (16).

Доведення. Доведення проводиться безпосередньою підстановкою функції $\Phi := \varphi_x\varphi^{-1}$ в систему (16). □

Зауважимо, що якщо функція Φ задовольняє систему (16), то $u = \Phi_x$ крім рівняння (15) задовольнятиме ще одне матричне узагальнення рівняння МКР [8]:

$$\alpha_3 u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3u_x u + \frac{3}{4}\alpha_2^2 D^{-1}\{u_{t_2t_2}\} - 3u[u, D^{-1}\{u\}], \tag{20}$$

а функція Φ буде розв'язком такого матричного узагальнення рівняння КР у потенціальній формі:

$$\alpha_3\Phi_{t_3} = \frac{1}{4}\Phi_{xxx} + 3\Phi_x^2 - 3D^{-1}\{\Phi_x\Phi_{xx}\} + \frac{3}{4}\alpha_2^2 D^{-1}\{\Phi_{t_2t_2}\} - 3D^{-1}\{\Phi_x[\Phi_x, \Phi]\}, \tag{21}$$

Отже, якщо $(N \times N)$-матрична функція Φ задовольняє систему двох рівнянь Бюргерса (16), то вона також задовольнятиме два матричні узагальнення рівняння Кадомцева-Петвіашвілі у потенціальній формі (17) та (21), а функція $u = \Phi_x$ задовольнятиме два матричні узагальнення рівняння Кадомцева-Петвіашвілі (15) та (20).

Наступне твердження показує, як матричні рівняння КР (15) та (20), а також диференціальний наслідок рівняння МКР у потенціальній формі (18), можна записати за допомогою виразів, що стоять у лівих частинах рівнянь Бюргерса (16).

Твердження 2. *Введемо позначення* $h_2 := \alpha_2\Phi_{t_2} - \Phi_{xx} - 2\Phi_x\Phi$, $h_3 := \alpha_3\Phi_{t_3} - \Phi_{xxx} - 3\Phi_{xx}\Phi - 3\Phi_x^2 - 3\Phi_x\Phi^2$. *Матричні рівняння* (15) *та* (18), *враховуючи, що* $u = \Phi_x$, *можна записати таким чином:*

$$-\frac{3}{4}\alpha_2\partial_{t_2}\{h_2\} - \frac{3}{4}D^2\{h_2\} + D\{h_3\} - \frac{3}{2}D\{h_2\Phi\} = 0, \qquad (22)$$

Для рівняння (20) *зображення в термінах* h_2 *та* h_3 *матиме такий вигляд:*

$$-\frac{3}{4}\alpha_2\partial_{t_2}\{h_2\} + D\{h_3\} - \frac{3}{4}D^2\{h_2\} - \frac{3}{2}D\{h_2\}\Phi - \frac{3}{2}\Phi_x h_2 = 0. \qquad (23)$$

Тепер дослідимо зв'язок рівнянь Бюргерса з матричним узагальненням модифікованого рівняння Кадомцева-Петвіашвілі (mMKP) та його зображенням Лакса.

Для цього введемо оператори mMKP:

$$\tilde{M}_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - D^2 - 2vD,$$
$$\tilde{M}_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - v_2D^2 - v_1D,$$

де $v = v(x, t_2, t_3)$, $v_1 = v_1(x, t_2, t_3)$, $v_2 = v_2(x, t_2, t_3)$ — $N \times N$-матричні функції. Комутаторне рівняння $[M_2, M_3] = 0$ еквівалентне системі:

$$\begin{cases} v_{2x} = 3v_x - [v, v_2], \\ \alpha_2 v_{2t_2} = v_{2xx} + 2v_{1x} - 6v_{xx} + 2vv_{2x} - 4v_2v_x + 2[v, v_1], \\ 2\alpha_3 v_{t_3} = \alpha_2 v_{1t_2} - v_{1xx} + 2v_{xxx} + 2v_2v_{xx} - 2(vv_{1x} - v_1v_x). \end{cases} \qquad (24)$$

У скалярному випадку ($N = 1$) система (24) набуде вигляду:

$$\frac{3}{4}\alpha_2^2 D^{-1}\{v_{t_2t_2}\} + \frac{3}{2}\alpha_2 v_x D^{-1}\{v_{t_2}\} = \alpha_3 v_{t_3} - \frac{1}{4}v_{xxx} + \frac{3}{2}v^2v_x \qquad (25)$$

Рівняння (25) є модифікованим рівнянням Кадомцева-Петвіашвілі (mKP), а система (24) є, відповідно, його матричним узагальненням.

У скалярному випадку ($N = 1$) між рівняннями mKP (25), Бюргерса та потенціальним KP (див. формулу (17), скалярний випадок) існує зв'язок, який описується наступним твердженням:

Твердження 3. *Нехай скалярна функція* v *задовольняє рівняння Бюргерса:*

$$\alpha_2 v_{t_2} - v_{xx} - 2vv_x = 0,$$

Тоді функція v задовольнятиме рівняння mKP (25) *тоді і лише тоді, коли вона буде розв'язком потенціального рівняння Кадомцева-Петвіашвілі:*

$$\frac{3}{4}\alpha_2^2 D^{-1}\{v_{t_2t_2}\} = \alpha_3 v_{t_3} - \frac{1}{4}v_{xxx} - \frac{3}{2}v_x^2. \tag{26}$$

В матричному випадку система рівнянь (24) допускає редукційні обмеження вигляду

$$v = \Phi,\ v_1 = 3(\Phi_x + \Phi^2),\ v_2 = 3\Phi, \tag{27}$$

де функція Φ є розв'язком системи рівнянь типу Бюргерса

$$\begin{cases} \alpha_2\Phi_{t_2} - \Phi_{xx} - 2\Phi\Phi_x = 0, \\ \alpha_3\Phi_{t_3} - \Phi_{xxx} - 3\Phi\Phi_{xx} - 3\Phi_x^2 - 3\Phi^2\Phi_x = 0, \end{cases} \tag{28}$$

що дозволяє будувати широкі класи точних розв'язків рівняння mMKP (24).

А саме, справедливе таке твердження:

Твердження 4. *Введемо позначення* $g_1 := 3v - v_2$, $g_2 := 3(v_x + v^2) - v_1$, $g_3 := \alpha_2 v_{t_2} - v_{xx} - 2vv_x$, $g_4 := \alpha_3 v_{t_3} - v_{xxx} - 3vv_{xx} - 3v_x^2 - 3v^2 v_x$. *Тоді систему* (24) *можна записати у такому вигляді:*

$$\begin{cases} D\{g_1\} + [v, g_1] = 0, \\ \alpha_2\partial_{t_2}\{g_2\} - 3D\{g_3\} - D^2\{g_2\} - 3\{g_3, v\} + 2g_4 - 2vD\{g_2\} + \\ \qquad\qquad + 2g_1 v_{xx} + 2g_2 v_x = 0, \\ \alpha_2\partial_{t_2}\{g_1\} - D^2\{g_1\} - 2D\{g_2\} - 2vD\{g_1\} + 4g_1 v_x - 3g_3 - \\ \qquad\qquad - 2[v, g_2] = 0. \end{cases} \tag{29}$$

Доведення. Доведення Твердження 4 здійснюється прямою підстановкою функцій g_i, $i = \overline{1,4}$, в систему (29). □

Зауважимо, що аналог лінеаризуючої підстановки Хопфа-Коула для системи (28), на відміну від Твердження 1, має вигляд $\Phi = \varphi^{-1}\varphi_x$ (6), де φ є розв'язком лінійної системи:

$$\begin{cases} \alpha_2\varphi_{t_2} - \varphi_{xx} = A\varphi, \\ \alpha_3\varphi_{t_3} - \varphi_{xxx} = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Отже, функції v, v_1, v_2 вигляду (27), де Φ задається формулами (6), (30), будуть розв'язками рівняння mМКР (24).

Тепер встановимо зв'язок між рівнянням МКР (15) та рівнянням mМКР (24). Для цього розглянемо пару Лакса M_2, M_3 (14) що відповідає рівнянню МКР (15), і функцію φ, яка є $(N \times N)$-матричним розв'язком системи:

$$\begin{cases} M_2\{\varphi\} = 0, \\ M_3\{\varphi\} = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Проведемо одягання операторів M_2, M_3 за допомогою функції φ:

$$\begin{gathered} \hat{M}_2 := \varphi^{-1} M_2 \varphi = \alpha_2 \partial_{t_2} - D^2 + 2vD, \\ \hat{M}_3 := \varphi^{-1} M_3 \varphi = \alpha_3 \partial_{t_3} - D^3 + v_2 D^2 + v_1 D, \end{gathered} \tag{32}$$

де функції v, v_1, v_2 виражаються через матричний потенціал u оператора M_2 (14) та розв'язок φ лінійної системи (31) таким чином:

$$3v = v_2 = -3\varphi^{-1}\varphi_x,$$

$$v_1 = 3(\varphi^{-1}u\varphi + \varphi^{-1}\varphi_{xx}). \tag{33}$$

Справедливе таке твердження:

Твердження 5. *Функція u задовольняє МКР* (15) *тоді і лише тоді, коли функції v, v_1, v_2 вигляду* (33) *будуть розв'язками mМКР* (24).

На закінчення розділу дослідимо зв'язок матричних рівнянь Бюргерса та системи Деві-Стюартсона (DS). Розглянемо таку лінійну систему рівнянь:

$$\begin{cases} \alpha_2\varphi_{t_2} + B\varphi_{xx} = 0, \\ \alpha_1\varphi_{t_1} + B\varphi_x = \varphi A, \end{cases} \tag{34}$$

де φ — $(2N \times 2N)$-матричні функції, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$; A, B — $(2N \times 2N)$-сталі матриці, $B^2 = I_{2N}$ (через I_{2N} ми позначатимемо одиничну $(2N \times 2N)$-матрицю).

Справедливе таке твердження:

Твердження 6. $(2N \times 2N)$*-матрична функція* $\Phi := \varphi_x \varphi^{-1}$, *де* φ — *розв'язок системи* (34), *задовольняє таку систему:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_2 \Phi_{t_2} + B(\Phi_{xx} + 2\Phi_x \Phi) + [B, \Phi](\Phi_x + \Phi^2) = 0, \\ \alpha_1 \Phi_{t_1} + B\Phi_x + [B, \Phi]\Phi = 0. \end{array} \right. \tag{35}$$

Система (35) складається з двох матричних узагальнень рівнянь Бюргерса. Зауважимо, що при $B = I_{2N}$ перше рівняння системи (35) співпадатиме з першим рівнянням системи (16). Наступне твердження показує зв'язок між рівняннями (35) та системою Деві-Стюартсона.

Твердження 7. *Введемо позначення:* $b_1(x) := \alpha_1 \Phi_{t_1} + B\Phi_x + [B, \Phi]\Phi$, $b_2(x) := \alpha_2 \Phi_{t_2} + B(\Phi_{xx} + 2\Phi_x \Phi) + [B, \Phi](\Phi_x + \Phi^2)$. *Тоді справедливі рівності:*

$$\begin{array}{c} 2\alpha_2 B u_{t_2} + \alpha_1^2 u_{t_1 t_1} + u_{xx} + 2u^3 - 2\alpha_1 \{v_{t_1}, u\} = [g(x), B], \\ \alpha_1 v_{t_1} + B v_x - u^2 = \{b_1(x), B\} \end{array}$$

де

$$g(x) = 2b_2 + \alpha_1 B b_{1t_1} + b_{1x} - B[B, b_{1x}]\Phi - B[B, \Phi]b_1 - \{b_{1t_1}, B\}B + 2B[B, \Phi]b_1,$$

$$u = [\Phi, B] = \Phi B - B\Phi, \ v := \{\Phi, B\} = \Phi B + B\Phi. \tag{36}$$

З попереднього твердження ми як наслідок отримуємо, що якщо матрична функція Φ задовольняє систему (35), то функції $u = [\Phi, B]$ та $v = \{\Phi, B\}$ задовольняють систему рівнянь:

$$\left\{ \begin{array}{c} 2\alpha_2 B u_{t_2} + \alpha_1^2 u_{t_1 t_1} + u_{xx} + 2u^3 - 2\alpha_1 \{v_{t_1}, u\} = 0, \\ \alpha_1 v_{t_1} + B v_x - u^2 = 0, \end{array} \right. \tag{37}$$

частковими випадками якої є системи DS-I, DS-II, DS-III та їх матричні узагальнення [9].

В наступних розділах ми покажемо як використовуються твердження даного розділу для побудови N-солітонних розв'язків скалярних аналогів нелінійних рівнянь, що зустрічалися в даному розділі.

2 Побудова розв'язків нелінійних рівнянь. Метод В.О. Марченка

У цьому розділі ми розглянемо побудову розв'язків деяких нелінійних моделей математичної фізики за допомогою матричних рівнянь типу Бюргерса, використовуючи ідеї, запропоновані В.О. Марченком [6]. А саме, ми розглянемо побудову розв'язків для рівняння Кадомцева-Петвіашвілі та нелінійного рівняння Шредінгера (NSE), яка є частковим випадком рівняння (37) при $\alpha_1 = 0$ та додатковій редукції ермітового спряження.

Спочатку ми дослідимо структуру та властивості матричної функції

$$\Phi = \hat{\varphi}_x \hat{\varphi}^{-1}, \tag{38}$$

де $\hat{\varphi}$ — $(Nk \times Nk)$-матриця Вронського, яка має вигляд

$$\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(N-1)} & \dots & \varphi_N^{(N-1)} \end{pmatrix}, \tag{39}$$

де $\varphi_l = \varphi_l(x) = (\varphi_{ij,l})_{i,j=1}^k$, $l = \overline{1, N}$, — $(k \times k)$-матричні функції. Справедливе таке твердження:

Твердження 8. *Матрична функція $\Phi = \hat{\varphi}_x \hat{\varphi}^{-1}$, де $\hat{\varphi}$ є матрицею Вронського вигляду* (39)*, має таку структуру:*

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & I_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_k \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_N \end{pmatrix}, \tag{40}$$

де I_k — одиничні матриці розмірності $(k \times k)$, Φ_j, $j = \overline{1, N}$, — $(k \times k)$-матричні функції. У випадку $k = 1$ функції Φ_1, Φ_N мають вигляд:

$$\Phi_1 = (-1)^{N-1} \frac{\det(\hat{\varphi}_x)}{\det \hat{\varphi}}, \quad \Phi_N = \frac{(\det \hat{\varphi})_x}{\det \hat{\varphi}} \tag{41}$$

Доведення. Структура матричної функції Φ та явний вигляд її елементів Φ_1, Φ_N у випадку $k = 1$ отримується безпосередньо з рівності:

$$\Phi\hat{\varphi} = \hat{\varphi}_x. \tag{42}$$

$\square$

Зауваження 2. 1. *Очевидно, що максимальний ранг довільної частинної похідної функції* Φ (40) *не перевищує* k.

2. *Явний вигляд всіх функцій* Φ_j, $j = \overline{1, N}$ *в загальному* $(k \times k)$*-випадку буде наведено в додатках (Твердження* 12*).*

2.1 Побудова розв'язків рівняння Кадомцева-Петвіашвілі

Розглянемо побудову N-солітонних розв'язків потенціального рівняння КР (18) у скалярному випадку. Нехай скалярні функції φ_l, $l = \overline{1, N}$, задовольняють систему (19). Тоді, побудована по функціях φ_l $(N \times N)$-матриця Вронського $\hat{\varphi}$ теж задовольняє систему (19). За твердженням 1 ми отримуємо, що функція $\Phi = \hat{\varphi}_x \hat{\varphi}^{-1}$ задовольнятиме матричні рівняння Бюргерса (16). Далі, використавши результати розділу 1 та твердження 2, отримуємо, що функція Φ задовольнятиме також диференціальний наслідок потенціального матричного рівняння КР:

$$3\alpha_2^2 \Phi_{t_2 t_2} + 6[\alpha_2 \Phi_{t_2}, \Phi_x] - (4\alpha_3 \Phi_{t_3} - \Phi_{xxx} - 6\Phi_x^2)_x = 0. \tag{43}$$

З вигляду функції Φ (40), слідує, що її елемент

$$\Phi_N = \frac{(\det \hat{\varphi})_x}{\det \hat{\varphi}} \tag{44}$$

(див. формулу (41)) задовольняє скалярний аналог потенціального рівняння КР (43):

$$3\alpha_2^2 \Phi_{N t_2 t_2} - (4\alpha_3 \Phi_{N t_3} - \Phi_{Nxxx} - 6(\Phi_{Nx})^2)_x = 0. \tag{45}$$

Зауважимо, що розв'язки Φ_N скалярного потенціального рівняння КР (45) можна також отримати за допомогою перетворень Дарбу-Крама, що побудовано за функціями φ_l, які задовольняють систему (19). Це буде показано у підрозділі 3.1.

Зауваження 3. *З результатів розділу 1 (див. формули* (15)-(18)*) слідує, що функція* $u := \Phi_{Nx} = \left(\frac{(\det\hat{\varphi})_x}{\det\hat{\varphi}}\right)_x$ *є розв'язком скалярного рівняння КР* (2).

2.2 Побудова розв'язків нелінійного рівняння Шредінгера

У цьому підрозділі наша ціль побудувати точні розв'язки для нелінійного рівняння Шредінгера (NSE):

$$2iq_t = q_{xx} + 2|q|^2 q, \tag{46}$$

за допомогою методу В.О. Марченка [6].

Нехай φ_l, $l = \overline{1,N}$ — (2×2)-матричні розв'язки системи (34) при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -i$:

$$i\varphi_{lt_2} - \sigma_3\varphi_{lxx} = 0, \;\; \varphi_{lx} = \sigma_3\varphi_l a_l, \tag{47}$$

де $\sigma_3 = diag(1,-1)$, $a_l \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Покладемо

$$\begin{gathered} B = diag(\sigma_3, \sigma_3, \ldots, \sigma_3) \in Mat_{2N\times 2N}(\mathbb{C}), \\ A = diag(a_1, \ldots, a_N) \in Mat_{2N\times 2N}(\mathbb{C}). \end{gathered} \tag{48}$$

Матрична функція

$$\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \ldots & \varphi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(N-1)} & \ldots & \varphi_N^{(N-1)} \end{pmatrix}, \tag{49}$$

задовольнятиме систему (див. (34), $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -i$):

$$\begin{cases} i\hat{\varphi}_{t_2} - B\hat{\varphi}_{xx} = 0, \\ B\hat{\varphi}_x = \hat{\varphi}A, \end{cases}$$

За твердженням 6 функція $\Phi = \hat{\varphi}_x\hat{\varphi}^{-1}$ задовольнятиме рівняння Бюргерса (35). Відповідно, за твердженням 7 функція $u = [\Phi, B]$ задовольнятиме абстрактну форму системи Деві-Стюартсона (37) при $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -i$:

$$-2iBu_{t_2} + u_{xx} + 2u^3 = 0. \tag{50}$$

Зі структури матриці Вронського Φ (40) та вигляду матриці B (48) ми отримуємо явний вигляд $(2N \times 2N)$-матриці $u = [\Phi, B]$:

$$u = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ [\Phi_1, \sigma_3] & [\Phi_2, \sigma_3] & \dots & [\Phi_N, \sigma_3] \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_1 & u_2 & \dots & u_N \end{pmatrix}, \tag{51}$$

З вигляду матриці u (51) випливає, що її компонента u_N задовольняє рівняння:

$$-2i\sigma_3 (u_N)_{t_2} + (u_N)_{xx} + 2u_N^3 = 0, \tag{52}$$

Покладемо $a_j = diag(\lambda_j, -\bar{\lambda}_j)$. Тоді один з допустимих розв'язків системи (47) матиме вигляд:

$$\varphi_l = \begin{pmatrix} \varphi_{11,l} & \varphi_{12,l} \\ \varphi_{21,l} & \varphi_{22,l} \end{pmatrix}, \; l = \overline{1, N}. \tag{53}$$

де $\varphi_{11,l} = e^{\lambda_l x - i\lambda_l^2 t + \theta_{1l}}$, $\varphi_{12,l} = e^{-\bar{\lambda}_l x - i\bar{\lambda}_l^2 t + \theta_{2l}}$, $\varphi_{21,l} = -\bar{\varphi}_{12,l}$, $\varphi_{22,l} = \bar{\varphi}_{11,l}$, $\theta_{1l}, \theta_{2l} \in \mathbb{C}$. При такому виборі розв'язків φ_l матриця $\hat{\varphi}$ (49) буде оборотньою при всіх $t_2, x \in \mathbb{R}$, а матриця u_N є ермітовою (див. [6]). Тобто

$$u_N = \begin{pmatrix} 0 & v \\ \bar{v} & 0 \end{pmatrix}, \tag{54}$$

де скалярна функція v у формулі (54) знаходиться із системи лінійних рівнянь (42) для елементів матричної функції Φ за допомогою правила Крамера і має вигляд:

$$v = -\frac{2\Delta_1}{\Delta}, \Delta = \det \hat{\varphi}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_{11,1} & \varphi_{12,1} & \cdots & \varphi_{11,N} & \varphi_{12,N} \\ \varphi_{21,1} & \varphi_{22,1} & \cdots & \varphi_{21,N} & \varphi_{22,N} \\ \vdots & \dots & \cdots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{N-2}\varphi_{11,1} & (-\bar{\lambda}_1)^{N-2}\varphi_{12,1} & \cdots & \lambda_N^{N-2}\varphi_{11,N} & (-\bar{\lambda}_N)^{N-2}\varphi_{12,N} \\ (-\lambda_1)^{N-2}\varphi_{21,1} & \bar{\lambda}_1^{N-2}\varphi_{22,1} & \cdots & (-\lambda_N)^{N-2}\varphi_{21,N} & \bar{\lambda}_N^{N-2}\varphi_{22,N} \\ \lambda_1^{N-1}\varphi_{11,1} & (-\bar{\lambda}_1)^{N-1}\varphi_{12,1} & \cdots & \lambda_N^{N-1}\varphi_{11,N} & (-\bar{\lambda}_N)^{N-1}\varphi_{12,N} \\ \lambda_1^{N}\varphi_{11,1} & (-\bar{\lambda}_1)^{N}\varphi_{12,1} & \cdots & \lambda_N^{N}\varphi_{11,N} & (-\bar{\lambda}_N)^{N}\varphi_{12,N} \end{vmatrix}. \tag{55}$$

Оскільки матриця u_N (54) задовольняє рівняння (52), то елемент v цієї матриці задовольнятиме NSE такого вигляду:

$$2iv_t = v_{xx} + 2|v|^2 v. \tag{56}$$

Розглянемо часткові випадки розв'язку v (55) NSE:

1. $N = 1$. У цьому випадку розв'язок v (55) матиме вигляд:

$$v = -\frac{2\begin{vmatrix} \varphi_{11,1} & \varphi_{12,1} \\ \lambda_1\varphi_{11,1} & -\bar{\lambda}_1\varphi_{12,1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \varphi_{11,1} & \varphi_{12,1} \\ -\bar{\varphi}_{12,1} & \bar{\varphi}_{11,1} \end{vmatrix}} = 2\lambda_{11}\frac{e^{2i(\lambda_{12}x+(\lambda_{12}^2-\lambda_{11}^2)t+\mathrm{Im}(\theta_{11}))}}{\mathrm{ch}(2\lambda_{11}x + 4\lambda_{11}\lambda_{12}t + 2\mathrm{Re}(\theta_{11}))}, \tag{57}$$

де $\lambda_{11} = \mathrm{Re}\lambda_1$, $\lambda_{12} = \mathrm{Im}\lambda_1$; $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, $\theta_{11} \in \mathbb{C}$. Односолітонний розв'язок v (57) після заміни $\lambda_1 \to \frac{\lambda_1}{2}$, $t \to 2t$ повністю збігається з відповідним односолітонним розв'язком NSE, отриманим в роботі [10] методом інтегральних перетворень.

2. $N = 2$. Двосолітонний розв'язок v вигляду (55) будується по функціях $\varphi_{11,l} = e^{\lambda_l x - i\lambda_l^2 t + \theta_{1l}}$, $\varphi_{12,l} = e^{-\bar{\lambda}_l x - i\bar{\lambda}_l^2 t + \theta_{2l}}$, $\varphi_{21,l} = -\bar{\varphi}_{12,l}$, $\varphi_{22,l} = \bar{\varphi}_{11,l}$, $\theta_{1l}, \theta_{2l} \in \mathbb{C}$, де $l = \overline{1,2}$. Після замін $\lambda_l \to \frac{\lambda_l}{2}$, $l = \overline{1,2}$; $t \to 2t$, а також додаткової редукції $\theta_{2l} = -\bar{\theta}_{1l}$ розв'язок v повністю збігатиметься з розв'язком, отриманим в роботі [10] методом інтегральних перетворень.

3 Знаходження розв'язків нелінійних рівнянь методом перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва

3.1 Рівняння Кадомцева-Петвіашвілі

Розглянемо скалярне рівняння KP (2), яке співпадає з рівнянням (15) при $N = 1$.

Позначимо через M_{20} та M_{30} відповідні оператори пари Лакса M_2, M_3 вигляду (14) при $N = 1$, в яких $u = 0$, і розглянемо лінійну систему:

$$\begin{cases} M_{20}\{f\} = \alpha_2 f_{t_2} - f_{xx} = 0, \\ M_{30}\{f\} = \alpha_3 f_{t_3} - f_{xxx} = 0. \end{cases} \tag{58}$$

Нехай φ_l, $l = \overline{1, N}$, — фіксовані скалярні розв'язки системи (58). Подіємо перетворенням Дарбу-Крама-Матвєєва [7] на довільний скалярний розв'язок f системи (58):

$$F := \frac{\mathcal{W}[\varphi_1, \ldots, \varphi_N, f]}{\mathcal{W}[\varphi_1, \ldots, \varphi_N]}, \tag{59}$$

де $\mathcal{W}[\varphi_1, \ldots, \varphi_N, f]$, $\mathcal{W}[\varphi_1, \ldots, \varphi_N] = \det \hat{\varphi}$ — визначники Вронського побудовані по функціях, що вказані у квадратних дужках. Перетворена функція F задовольнятиме систему:

$$\begin{cases} M_2\{F\} = \alpha_2 F_{t_2} - F_{xx} - 2uF = 0, \\ M_3\{F\} = \alpha_3 F_{t_3} - F_{xxx} - 3uF_x - \frac{3}{2}u_x F - \frac{3}{2}\alpha_2 D^{-1}\{u_{t_2}\}F = 0, \end{cases} \tag{60}$$

де

$$u = \left(\frac{(\det \hat{\varphi})_x}{\det \hat{\varphi}}\right)_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\ln \det \hat{\varphi}\right). \tag{61}$$

Умова сумісності системи (60) еквівалентна операторному рівнянню $[M_2, M_3] = 0$ і, відповідно, рівнянню КР (2) для функції u (61). В свою чергу функція

$$\Phi_N := D^{-1}\{u\} = \frac{(\det \hat{\varphi})_x}{\det \hat{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln \det \hat{\varphi}\right) \tag{62}$$

задовольнятиме диференціальний наслідок потенціального КР (45). Порівнюючи формули (61) та (62) для функцій u та Φ_N з виразом для розв'язку u в зауваженні 3 та формулою для функції Φ_N (44) у розділі 2, ми отримуємо, що для рівняння КР та диференціального наслідку потенціального рівняння КР розв'язки, отримані методом В.О. Марченка у розділі 2 такі ж як і розв'язки, побудовані методом перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва.

3.2 Перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва для лінійної системи, асоційованої з NSE

Розглянемо оператори:

$$M = \alpha_2 \partial_{t_2} - 2\sigma_3 D^2 + 2\sigma_3 U D + \sigma_3 U_x + \sigma_3 U^2, \ \alpha_2 \in i\mathbb{R} \cup \mathbb{R}, \tag{63}$$

$$L = -i\sigma_3(D - U), \tag{64}$$

де $\sigma_3 = diag(1, -1)$,

$$U = \begin{pmatrix} 0 & iq \\ ir & 0 \end{pmatrix}, \tag{65}$$

q та r — скалярні функції.

Розглянемо лінійну систему з операторами M (63) та L (64):

$$\begin{cases} M\{f\} = 0, \\ L\{f\} = f\Lambda, \end{cases} \tag{66}$$

де f — (2×2)-матрична функція, $\Lambda \in Mat_{2\times 2}(C)$. Умовою сумісності $f_{xt_2} = f_{t_2x}$ системи (66) є система AKNS (Абловіц-Кауп-Ньюел-Сігур, [11]):

$$\begin{cases} \alpha_2 q_{t_2} = q_{xx} + 2q^2 r, \\ \alpha_2 r_{t_2} = r_{xx} + 2r^2 q. \end{cases} \tag{67}$$

Нехай φ_1 і $\Lambda = \Lambda_1$ — (2×2)-матричний фіксований розв'язок системи (66) та відповідна йому власна матриця розмірності (2×2). Введемо перепозначення для операторів M (63) і L (64) та матричної функції U у формулі (65):$M[1] := M$, $L[1] := L$, $U[1] := U$. Справедливе таке твердження:

Твердження 9. *Нехай f і Λ — довільний (2×2)-матричний розв'язок системи (66) та відповідна йому (2×2)-власна матриця. Тоді побудована за допомогою диференціального оператора перетворення Дарбу-Матвєєва $W_{11} := \varphi_1 D \varphi_1^{-1}$ [7] функція*

$$F := W_{11}\{f\} = \varphi_1 D\{\varphi_1^{-1} f\} = f_x - \varphi_{1x}\varphi_1^{-1} f \tag{68}$$

задовольняє систему:

$$\begin{cases} M[2]\{F\} = \alpha_2 F_{t_2} - 2\sigma_3 F_{xx} + 2\sigma_3 U[2] F_x + \sigma_3 (U[2])_x F + \\ +\sigma_3 (U[2])^2 F = 0, \\ L[2]\{F\} = -i\sigma_3 (F_x - U[2]F) = F\Lambda, \end{cases} \tag{69}$$

де $U[2] = U[1] + i[\varphi_{1x}\varphi_1^{-1}, \sigma_3]$.

Доведення. Нехай $L[2] = V_1(x, t_2)D + V_0(x, t_2)$ — (2×2)-матричний диференціальний оператор. Накладемо на оператор додаткову умову. А саме, нехай $L[2]$ задовольняє операторне рівняння вигляду:

$$L[2]W_{11} - W_{11}L[1] = 0. \tag{70}$$

Тобто, оператор перетворення W_{11} є сплітаючим оператором для пари $L[1], L[2]$. Рівняння (70) еквівалентне рівності нулю коефіцієнтів при похідних D^j, $j = \overline{0,2}$. Неважко переконатись, що дані рівності справджуються тоді і лише тоді, коли $V_1(x,t_2) = -i\sigma_3, V_2(x,t_2) = U[1]+$ $+i[\varphi_{1x}\varphi_1^{-1}, \sigma_3] =: U[2]$. Бехпосередньо з рівності (70) ми отримуємо, що $L[2]\{F\} = L[2]W_{11}\{f\} = W_{11}L[1]\{f\} = 0$. Аналогічним чином розглядаємо оператор $M[2] = \alpha_2\partial_{t_2} + \tilde{V}_2(x,t_2)D^2 + \tilde{V}_1(x,t_2)D + \tilde{V}_0(x,t_2)$ та рівняння $M[2]W_{11} = W_{11}M[1]$. □

Тепер узагальнимо попереднє твердження. А саме, нехай $\varphi_1[1] := \varphi_1, \ldots, \varphi_N[1] := \varphi_N$, $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_N$ — фіксовані невироджені (2×2)-матричні розв'язки рівняння (66) та відповідні їм $(2{\times}2)$ власні матриці. Визначимо за допомогою оператора $W_{11} = \varphi_1[1]D\varphi_1[1]^{-1}$ функції:

$$\varphi_l[2] := W_{11}\{\varphi_l[1]\}, l = \overline{1,N}. \tag{71}$$

Очевидно, що $\varphi_1[2] \equiv 0$. На другому кроці будуємо оператор W_{22} і оператор перетворення W_2:

$$W_{22} := \varphi_2[2]D\varphi_2[2]^{-1}, \ W_2 := W_{22} \circ W_{11}, \tag{72}$$

та визначаємо функції

$$\varphi_l[3] := W_2\{\varphi_l[1]\} = W_{22} \circ W_{11}\{\varphi_l[1]\} = W_{22}\{\varphi_l[2]\}, \ l = \overline{1,N}. \tag{73}$$

На s-тому кроці отримаємо оператори W_{ss} і W_s:

$$W_{ss} = \varphi_s[s]D\varphi_s^{-1}[s], \ W_s := W_{ss} \circ W_{s-1\, s-1} \circ \ldots W_{11}, \tag{74}$$

та визначаємо функції $\varphi_l[s+1]$:

$$\varphi_l[s+1] := W_s\{\varphi_l[1]\} = W_{ss}\{\varphi_l[s]\}, \ l = \overline{1,N}. \tag{75}$$

Зауваження 4. 1. *Згідно побудови оператора* W_s (74) *і функцій* $\varphi_l[s+1]$ (75)*, очевидно, що* $\varphi_l[s+1] \equiv 0$*, при* $l \le s$.

2. *Оператор* W_s *є* (2×2)*-матричним диференціальним оператором порядку* s*, який прийнято називати оператором перетворення Дарбу-Крама-Матвеєва. При* $s = N$ *ми отримуємо диференціальний оператор перетворення Дарбу-Крама-Матвеєва:*

$$W_N := W_{NN} \circ W_{N-1\, N-1} \circ \ldots \circ W_{11}, \tag{76}$$

ядро якого породжене функціями $\varphi_1, \ldots, \varphi_N$.

3. *Зауважимо, що в операторі W_N (76) коефіцієнт при старшій похідній D^N є одиничною матрицею $I_2 = diag(1,1)$. Таким чином, W_N можна зобразити у вигляді:*

$$W_N = D^N + \sum_{s=0}^{N-1} w_s D^s, \tag{77}$$

де w_s є (2×2)-матричними функціями.

В загальному $(k\times k)$-матричному випадку оператор W_N (77) розглядається в додатку 5.1., де наведений явний вигляд його коефіцієнтів w_s, $s = \overline{0, N-1}$, в термінах функцій, що породжують його ядро.

Справедливе твердження:

Твердження 10. *Нехай (2×2)-матрична функція f — розв'язок рівняння (66) з матрицею Λ. Тоді функція*

$$F := W_N\{f\} \tag{78}$$

є розв'язком системи:

$$\left\{\begin{array}{l} M[N+1]\{F\} = \alpha_2 F_{t_2} - 2\sigma_3 F_{xx} + 2\sigma_3 U[N+1]F_x + \\ +\sigma_3 (U[N+1])_x F + \sigma_3 (U[N+1])^2 F = 0, \\ L[N+1]\{F\} = -i\sigma_3(F_x - U[N+1]F) = F\Lambda. \end{array}\right. \tag{79}$$

Причому

$$U[N+1] = U[1] + i[w_{N-1}, \sigma_3] = U[1] + i\begin{pmatrix} 0 & q[N+1] \\ r[N+1] & 0 \end{pmatrix}, \tag{80}$$

де

$$q[N+1] = 2\frac{\Delta_1}{\Delta},\ r[N+1] = 2\frac{\tilde{\Delta}_1}{\Delta},\ \Delta = \det\hat{\varphi} = \mathcal{W}[\varphi_1, \ldots, \varphi_N],$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_{11,1} & \varphi_{12,1} & \cdots & \varphi_{11,N} & \varphi_{12,N} \\ \varphi_{21,1} & \varphi_{22,1} & \cdots & \varphi_{21,N} & \varphi_{22,N} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \vdots \\ \varphi_{11,1}^{(N-2)} & \varphi_{12,1}^{(N-2)} & \cdots & \varphi_{11,N}^{(N-2)} & \varphi_{12,N}^{(N-2)} \\ \varphi_{21,1}^{(N-2)} & \varphi_{22,1}^{(N-2)} & \cdots & \varphi_{21,N}^{(N-2)} & \varphi_{22,N}^{(N-2)} \\ \varphi_{11,1}^{(N-1)} & \varphi_{12,1}^{(N-1)} & \cdots & \varphi_{11,N}^{(N-1)} & \varphi_{12,N}^{(N-2)} \\ \varphi_{11,1}^{(N)} & \varphi_{12,1}^{(N)} & \cdots & \varphi_{11,N}^{(N)} & \varphi_{12,N}^{(N)} \end{vmatrix},$$

$$\tilde{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} \varphi_{11,1} & \varphi_{12,1} & \cdots & \varphi_{11,N} & \varphi_{12,N} \\ \varphi_{21,1} & \varphi_{22,1} & \cdots & \varphi_{21,N} & \varphi_{22,N} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ \varphi_{11,1}^{(N-2)} & \varphi_{12,1}^{(N-2)} & \cdots & \varphi_{11N,}^{(N-2)} & \varphi_{12,N}^{(N-2)} \\ \varphi_{21,1}^{(N-2)} & \varphi_{22,1}^{(N-2)} & \cdots & \varphi_{21,N}^{(N-2)} & \varphi_{22,N}^{(N-2)} \\ \varphi_{21,1}^{(N-1)} & \varphi_{22,1}^{(N-1)} & \cdots & \varphi_{21,N}^{(N-1)} & \varphi_{22,N}^{(N-2)} \\ \varphi_{21,1}^{(N)} & \varphi_{22,1}^{(N)} & \cdots & \varphi_{21,N}^{(N)} & \varphi_{22,N}^{(N)} \end{vmatrix}. \qquad (81)$$

Доведення. Застосовуючи N разів твердження 9, ми отримуємо явний вигляд операторів $L[N+1]$, $M[N+1]$ та рівняння (79). Оператори $L[N+1]$ та $M[N+1]$ задовольняють рівняння: $L[N+1]W_N = W_N L[1]$, $M[N+1]W_N = W_N M[1]$. З рівності $L[N+1]W_N - W_N L[1] = 0$, використавши формулу (77) та прирівнявши до нуля коефіцієнт при похідній D^{N-1}, ми отримуємо формулу для матричної функції $U[N+1]$: $U[N+1] = U[1] + i[w_{N-1}, \sigma_3]$. Явний вигляд коефіцієнта w_{N-1} (а також решти w_s, $s = \overline{0, N-2}$) в загальному ($k \times k$)-матричному випадку в термінах функцій $\varphi_l[1]$, $l = \overline{1, N}$, що входять до ядра оператора W_N (77), наведено в додатку 5.1. Звідки як частковий наслідок отримаємо вирази для $q[N+1]$, $r[N+1]$ в формулі (80).

□

Для побудови розв'язків системи AKNS (67) та NSE (46) покладемо в системі (66) $\alpha_2 = 2i$ та $U = 0$:

$$\begin{cases} if_{t_2} - \sigma_3 f_{xx} = 0 \\ -i\sigma_3 f_x = f\Lambda. \end{cases} \qquad (82)$$

Зауважимо, що система (82) співпадає з системою (47) при $\Lambda = -ia_l$, $l = \overline{1, N}$.

Нехай

$$\varphi_l = \begin{pmatrix} \varphi_{11,l} & \varphi_{12,l} \\ \varphi_{21,l} & \varphi_{22,l} \end{pmatrix}, \Lambda = \Lambda_l = diag(-i\lambda_l, -i\tilde{\lambda}_l),\ l = \overline{1, N}, \qquad (83)$$

є фіксованими розв'язками системи (82) та відповідними їм власними матрицями. Допустимими розв'язками системи будуть матричні функції φ_l (83) з елементами

$$\begin{gathered} \varphi_{11,l} = e^{\lambda_l x - i\lambda_l^2 t_2 + \theta_{1l}}, \varphi_{12,l} = e^{\tilde{\lambda}_l x - i\tilde{\lambda}_l^2 t_2 + \theta_{2l}}, \\ \varphi_{21,l} = e^{-\lambda_l x + i\lambda_l^2 t_2 + \gamma_{1l}}, \varphi_{22,l} = e^{-\tilde{\lambda}_l x + i\tilde{\lambda}_l^2 t_2 + \gamma_{2l}}, \end{gathered} \qquad (84)$$

де $\theta_{jl}, \gamma_{jl}, \lambda_l, \tilde{\lambda}_l \in \mathbb{C}, x, t_2 \in \mathbb{R}$. Застосувавши до системи (82) N-кратне перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва, побудоване за фунціями φ_l, та використавши той факт, що комутаторне рівняння $[M[N+1], L[N+1]] = 0$ з операторами $M[N+1]$, $L[N+1]$ вигляду (79) еквівалентне системі AKNS (67), отримаємо явні формули для розв'язків q, r ([7]):

$$q := q[N+1] = 2\frac{\Delta_1}{\Delta},\ r := r[N+1] = 2\frac{\tilde{\Delta}_1}{\Delta},\ \Delta = \det\hat{\varphi}, \tag{85}$$

де

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \varphi_{11,1} & \varphi_{12,1} & \dots & \varphi_{11,N} & \varphi_{12,N} \\ \varphi_{21,1} & \varphi_{22,1} & \dots & \varphi_{21,N} & \varphi_{22,N} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{N-2}\varphi_{11,1} & \tilde{\lambda}_1^{N-2}\varphi_{12,1} & \dots & \lambda_N^{N-2}\varphi_{11,N} & \tilde{\lambda}_N^{N-2}\varphi_{12,N} \\ (-\lambda_1)^{N-2}\varphi_{21,1} & (-\tilde{\lambda}_1)^{N-2}\varphi_{22,1} & \dots & (-\lambda_N)^{N-2}\varphi_{21,N} & (-\tilde{\lambda}_N)^{N-2}\varphi_{22,N} \\ \lambda_1^{N-1}\varphi_{11,1} & \tilde{\lambda}_1^{N-1}\varphi_{12,1} & \dots & \lambda_N^{N-1}\varphi_{11,N} & \tilde{\lambda}_N^{N-1}\varphi_{12,N} \\ \lambda_1^{N}\varphi_{11,1} & \tilde{\lambda}_1^{N}\varphi_{12,1} & \dots & \lambda_N^{N}\varphi_{11,N} & \tilde{\lambda}_N^{N}\varphi_{12,N} \end{vmatrix},$$

$$\tilde{\Delta}_1 = \begin{vmatrix} \varphi_{11,1} & \varphi_{12,1} & \dots & \varphi_{11,N} & \varphi_{12,N} \\ \varphi_{21,1} & \varphi_{22,1} & \dots & \varphi_{21,N} & \varphi_{22,N} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \lambda_1^{N-2}\varphi_{11,1} & \tilde{\lambda}_1^{N-2}\varphi_{12,1} & \dots & \lambda_N^{N-2}\varphi_{11,N} & \tilde{\lambda}_N^{N-2}\varphi_{12,N} \\ (-\lambda_1)^{N-2}\varphi_{21,1} & (-\tilde{\lambda}_1)^{N-2}\varphi_{22,1} & \dots & (-\lambda_N)^{N-2}\varphi_{21,N} & (-\tilde{\lambda}_N)^{N-2}\varphi_{22,N} \\ (-\lambda_1)^{N-1}\varphi_{21,1} & (-\tilde{\lambda}_1)^{N-1}\varphi_{22,1} & \dots & (-\lambda_N)^{N-1}\varphi_{21,N} & (-\tilde{\lambda}_N)^{N-1}\varphi_{22,N} \\ (-\lambda_1)^{N}\varphi_{21,1} & (-\tilde{\lambda}_1)^{N}\varphi_{22,1} & \dots & (-\lambda_N)^{N}\varphi_{21,N} & (-\tilde{\lambda}_N)^{N}\varphi_{22,N} \end{vmatrix}. \tag{86}$$

Розглянемо деякі редукції на функції φ_l та числа λ_l, $\tilde{\lambda}_l$ (83)–(84):

1. $\tilde{\lambda}_l = -\bar{\lambda}_l$, $\varphi_{22,l} = \bar{\varphi}_{11,l}$, $\varphi_{21,l} = -\bar{\varphi}_{12,l}$, $l = \overline{1,N}$.
2. $\tilde{\lambda}_l = -\bar{\lambda}_l$, $\varphi_{22,l} = -\bar{\varphi}_{11,l}$, $\varphi_{21,l} = \bar{\varphi}_{12,l}$, $l = \overline{1,N}$.

У кожному з випадків 1-2 як наслідок додаткових обмежень на функції φ_l та числа λ_l, $\tilde{\lambda}_l$ (83)–(84) виконуватиметься рівність: $r = \bar{q}$.

Використавши те, що функції q та r задовольняють систему AKNS (67) та рівність $r = \bar{q}$, ми отримаємо, що за кожної з умов 1-2 функція q задовольнятиме NSE:

$$2iq_{t_2} = q_{xx} + 2|q|^2 q. \tag{87}$$

Зауважимо, що розв'язок q (85) у випадках 1-2 збігатиметься з точністю до знаку із розв'язком v (55), отриманим за допомогою методу проектування В.О. Марченка.

Зауваження 5. *При допустимих редукціях вигляду:*

1'. $\tilde{\lambda}_l = -\bar{\lambda}_l$, $\varphi_{22,l} = -\bar{\varphi}_{11,l}$, $\varphi_{21,l} = -\bar{\varphi}_{12,l}$, $l = \overline{1, N}$.

2'. $\tilde{\lambda}_l = -\bar{\lambda}_l$, $\varphi_{22,l} = \bar{\varphi}_{11,l}$, $\varphi_{21,l} = \bar{\varphi}_{12,l}$, $l = \overline{1, N}$.

виконуватиметься рівність $r = -\bar{q}$ *і функція* q *буде задовольняти NSE такого вигляду:*

$$2iq_{t_2} = q_{xx} - 2|q|^2 q. \tag{88}$$

і формули (85), (86) *задають сингулярний* N*-солітонний розв'язок рівняння* (88).

Зауважимо також, що регулярні та сингулярні N-солітонні розв'язки рівнянь NSE (87) та (88) відповідно, отримані в роботі [10] методом інтегральних перетворень.

4 Розділ 4

У цьому розділі ми отримаємо перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва (76) за допомогою однократного перетворення Дарбу-Матвєєва більшої матричної розмірності та операції проектування.

Твердження 11. *Нехай* φ *— фіксований* $(K \times K)$*-матричний розв'язок рівняння*

$$L\{\varphi\} := \left(\alpha\partial_t - AD^n - \sum_{i=0}^{n-1} U_i D^i\right)\{\varphi\} = \varphi\Lambda_1, \tag{89}$$

де U_i *—* $(K \times K)$*-матричні функції;* Λ_1, A *—* $(K \times K)$*-сталі матриці,* f *— довільний* $(K \times M)$*-матричний розв'язок рівняння:*

$$L\{f\} = f\Lambda,$$

де Λ *—* $(M \times M)$*-стала матриця. Тоді функція*

$$F := W\{f\} = \varphi D\{\varphi^{-1} f\} = f_x - \varphi_x \varphi^{-1} f \tag{90}$$

задовольняє матричне рівняння:

$$\hat{L}\{F\} := \left(\alpha\partial_t - AD^n - \sum_{i=0}^{n-1}\hat{U}_i D^i\right)\{F\} = F\Lambda, \tag{91}$$

де

$$\hat{U}_{n-1} = U_{n-1} + [A, \varphi_x\varphi^{-1}],$$

$$\hat{U}_{n-2} = U_{n-2} + U'_{n-1} + [U_{n-1}, \varphi_x\varphi^{-1}] - \varphi_x\varphi^{-1}A\varphi_x\varphi^{-1} +$$
$$+A\sum_{j=n-2}^{n-1} C_n^{j+1}C_j^{n-2}\varphi^{(n-j)}(\varphi^{-1})^{(j-n+2)},$$

$$\hat{U}_i = U_i + U'_{i+1} - \varphi_x\varphi^{-1}U_{i+1} +$$
$$+\sum_{l=i+2}^{n-1}\sum_{s=0}^{l-i-2} C_{l-1}^s C_{l-s-2}^i (U'_l - \varphi_x\varphi^{-1}U_l)\varphi^{(s+1)}(\varphi^{-1})^{(l-s-i-2)} +$$
$$\sum_{l=i+1}^{n-1}\sum_{s=0}^{l-i-1} C_{l-s-1}^i C_l^s U_l \varphi^{(s+1)}(\varphi^{-1})^{(l-s-i-1)} +$$
$$+A\sum_{j=i}^{n-1} C_n^{j+1}C_j^i\varphi^{(n-j)}(\varphi^{-1})^{(j-i)} - \varphi_x\varphi^{-1}A\sum_{j=i}^{n-2} C_{n-1}^{j+1}C_j^i\varphi^{(n-j-1)}(\varphi^{-1})^{(j-i)}.$$

Таким чином, попереднє тверження показує, що матричне перетворення Дарбу W, визначене формулою (90) переводить розв'язки лінійного еволюційного рівняння, визначеного оператором L (89) в розв'язки лінійного рівняння з оператором $\hat{L}$ (91). Тепер використаємо дане твердження для побудови перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва за допомогою проектування. А саме, нехай φ_l, $l = \overline{1, N}$, — $(k\times k)$-матричні функції, що є фіксованими розв'язками рівнянь:

$$L\{\varphi_l\} = \left(\alpha\partial_t - AD^n - \sum_{i=0}^{n-1} u_i D^i\right)\{\varphi_l\} = \varphi_l\Lambda_l,\ l = \overline{1, N}, \tag{92}$$

де коефіцієнти u_i є $(k \times k)$-матричними функціями, Λ_l — $(k \times k)$-сталі матриці, f — довільний $(k \times m)$-матричний розв'язок рівняння з сталою $(m \times m)$-матрицею Λ:

$$L\{f\} = \left(\alpha\partial_t - AD^n - \sum_{i=0}^{n-1} u_i D^i\right)\{f\} = f\Lambda. \tag{93}$$

Продиференціюємо кожне рівняння системи (92) $N-1$ разів. Відповідно, для кожного рівняння отримаємо ще $N-1$ диференціальних наслідків. Всього отримаємо $(N \times N)$ рівнянь:

$$\begin{gathered} \alpha(\varphi_{lt})^{(s)} - A\varphi_l^{(s+n)} - \sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{s} C_s^j u_i^{(j)} \varphi_l^{(i+s-j)}\right) = \varphi_l^{(s)}\Lambda_l, \\ l = \overline{1,N},\ s = \overline{0,N-1}. \end{gathered} \tag{94}$$

Рівняння (94) можна записати у такій формі:

$$\tilde{L}\{\hat{\varphi}\} := \left(\alpha\partial_t - \hat{A}D^n - \sum_{i=0}^{n-1} U_i D^i\right)\{\hat{\varphi}\} = \hat{\varphi}\hat{\Lambda},$$

де $\hat{\varphi}$ та U_i — матричні $(Nk \times Nk)$-функції такого вигляду:

$$\hat{\varphi} = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_N \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(N-1)} & \dots & \varphi_N^{(N-1)} \end{pmatrix},$$

$$U_i = \begin{pmatrix} u_i & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_i' & u_i & 0 & \dots & 0 \\ u_i'' & 2u_i' & u_i & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_i^{(N-1)} & C_{N-1}^1 u_i^{(N-2)} & C_{N-1}^2 u_i^{(N-3)} & \dots & u_i \end{pmatrix}, \tag{95}$$

$\hat{A} = diag(A, \dots, A)$ — блочно-діагональна $(Nk \times Nk)$- матриця, на діагоналі якої N разів дублюється матриця A; $\hat{\Lambda} = diag(\Lambda_1, \dots, \Lambda_N)$.

В аналогічній формі можна записати рівняння (93) та його $N-1$ диференціальних наслідків:

$$\tilde{L}\{\hat{f}\} := \left(\alpha\partial_t - \hat{A}D^n - \sum_{i=0}^{n-1} U_i D^i\right)\{\hat{f}\} = \hat{f}\Lambda,$$

де $\hat{f} := \begin{pmatrix} f \\ f' \\ \vdots \\ f^{(N-1)} \end{pmatrix}$.

Тепер застосуємо твердження 13 і отримаємо, що функція

$$F = W\{\hat{f}\} = \hat{\varphi} D\{\hat{\varphi}^{-1}\hat{f}\} = \hat{f}_x - \hat{\varphi}_x \hat{\varphi}^{-1}\hat{f} \tag{96}$$

задовольняє рівняння:

$$\tilde{L}\{F\} := \alpha F_t - \hat{A}F^{(n)} - \sum_{i=0}^{n-1} \hat{U}_i F^{(i)} = F\Lambda. \tag{97}$$

Використавши твердження 8 для матричної функції $\hat{\varphi}_x\hat{\varphi}^{-1}$ в формулі (96), отримаємо, що

$$\hat{\varphi}_x\hat{\varphi}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & I_k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & I_k \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \dots & \Phi_N \end{pmatrix}, \tag{98}$$

де I_k — одинична матриця розмірності $(k \times k)$; Φ_l — $(k \times k)$-матричні функції, а $(Nk \times m)$-матрична функція F матиме такий вигляд:

$$F = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ F_N \end{pmatrix}, \; F_N = f^{(N)} - \sum_{s=0}^{N-1} \Phi_{s+1} f^{(s)} =: W_N\{f\}. \tag{99}$$

Виходячи з вигляду функції F (99), ми отримуємо, що рівняння (97) зведеться до такого:

$$\alpha(F_N)_t - AF_N^{(n)} - \sum_{i=0}^{n-1} (\hat{U}_i)_{NN} F_N^{(i)} = F_N\Lambda,$$

де $(\hat{U}_i)_{NN}$ — $(k \times k)$-блоки матриць $\hat{U}_i$, розташовані у правому нижньому куті.

Зауваження 6. *Оператор* W_N*, що визначається з формули* (99)*, має в своєму ядрі функції* φ_j, $j=\overline{1,N}$*, (це випливає з формул* (96) *та* (98)*) і, таким чином, є оператором перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва (див. формулу* (77) *зауваження* 4*):*

$$f^{(N)}-\sum_{s=0}^{N-1}\Phi_{s+1}f^{(s)}=W_N\{f\}=f^{(N)}+\sum_{s=0}^{N-1}w_sf^{(s)}. \tag{100}$$

Отже, ми отримали явний вигляд коефіцієнтів перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва в термінах матричних функцій Φ_{j+1}, $j=\overline{0,N-1}$, що входять до матричного узагальнення перетворення Хопфа-Коула (98), за допомогою однократного перетворення Дарбу-Матвєєва більшої розмірності.

5 Додатки

5.1 Явний вигляд коефіцієнтів для оператора перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва

Розглянемо лінійний диференціальний оператор N-ого порядку:

$$W=D^N+\sum_{s=0}^{N-1}w_sD^s \tag{101}$$

з $(k\times k)$-матричними коефіцієнтами

$$w_s=w_s(x)=\begin{pmatrix} w_{11,s} & \dots & w_{1k,s}\\ \vdots & \dots & \vdots\\ w_{k1,s} & \dots & w_{kk,s}\end{pmatrix},\ s=\overline{0,N-1}. \tag{102}$$

Нехай $(k\times k)$-матричні функції $\varphi_l=\varphi_l(x)=(\varphi_{ij,l})_{i,j=1}^k$, $l=\overline{1,N}$ є в ядрі оператора W. Тобто, $W\{\varphi_l\}=0$, $l=\overline{1,N}$. Позначимо через $\hat{\varphi}$ матрицю Вронського, побудовану по функціях φ_1, …, φ_N:

$$\hat{\varphi}=\begin{pmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_N\\ \vdots & \dots & \vdots\\ \varphi_1^{(N-1)} & \dots & \varphi_N^{(N-1)}\end{pmatrix} \tag{103}$$

Припустимо, що визначник $\det\hat{\varphi}$ не є тотожно рівний нулеві. Справедливе таке твердження:

Твердження 12. *Коефіцієнти* w_s, $s = \overline{0, N-1}$ (102) *оператора* W (101) *виражаються через функції* φ_l, $l = \overline{1, N}$ *таким чином:*

$$w_{ij,s} = -\frac{\Delta_{i\,j,s}}{\det \hat{\varphi}}, \tag{104}$$

де

$$\Delta_{i\,j,s} = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_{N-1} & \varphi_N \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(s-1)} & \varphi_2^{(s-1)} & \dots & \varphi_{N-1}^{(s-1)} & \varphi_N^{(s-1)} \\ \varphi_{1,(i\,j,s)} & \varphi_{2,(i\,j,s)} & \dots & \varphi_{N-1,(i\,j,s)} & \varphi_{N,(i\,j,s)} \\ \varphi_1^{(s+1)} & \varphi_2^{(s+1)} & \dots & \varphi_{N-1}^{(s+1)} & \varphi_N^{(s+1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \varphi_1^{(N-1)} & \varphi_2^{(N-1)} & \dots & \varphi_{N-1}^{(N-1)} & \varphi_N^{(N-1)} \end{vmatrix},$$

$$\varphi_{l,(i\,j,s)} = \begin{pmatrix} \varphi_{11,l}^{(s)} & \varphi_{12,l}^{(s)} & \dots & \varphi_{1\,k-1,l}^{(s)} & \varphi_{1k,l}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{j-1\,1,l}^{(s)} & \varphi_{j-1\ ,2,l}^{(s)} & \dots & \varphi_{j-1\,k-1,l}^{(s)} & \varphi_{j-1\,k,l}^{(s)} \\ \varphi_{i\,1,l}^{(N)} & \varphi_{i\,2,l}^{(N)} & \dots & \varphi_{i\,k-1,l}^{(N)} & \varphi_{i\,k,l}^{(N)} \\ \varphi_{j+1\,1,l}^{(s)} & \varphi_{j+1\,2,l}^{(s)} & \dots & \varphi_{j+1\,k-1,l}^{(s)} & \varphi_{j+1\,k,l}^{(s)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ \varphi_{k1,l}^{(s)} & \varphi_{k2,l}^{(s)} & \dots & \varphi_{k\,k-1,l}^{(s)} & \varphi_{kk,l}^{(s)} \end{pmatrix} \tag{105}$$

Тобто, визначник $\Delta_{i\,j,s}$ *утворений із визначника Вронського* $\det \hat{\varphi}$ *шляхом заміни блоку* $(\varphi_1^{(s)}, \varphi_2^{(s)}, \dots, \varphi_N^{(s)})$ *складеного з* $(k \times k)$*-матричних функцій* $\varphi_l^{(s)}$ *на блок* $(\varphi_{1,(i\,j,s)}, \dots, \varphi_{N,(i\,j,s)})$, *що складається з* $(k \times k)$*-матричних функцій* $\varphi_{l,(i\,j,s)}$, $l = \overline{1, N}$. *В свою чергу кожна* $(k \times k)$*-матрична функція* $\varphi_{l,(ij,s)}$ *утворена з* $(k \times k)$*-матричної функції* $\varphi_l^{(s)}$ *заміною* j*-тої стрічки* $(\varphi_{j1,l}^{(s)} \dots \varphi_{jk,l}^{(s)})$ *на стрічку* $(\varphi_{i1,l}^{(N)} \dots \varphi_{ik,l}^{(N)})$.

Доведення. Доведення полягає у знаходженні елементів $(k \times k)$-матричних функцій w_s, $s = \overline{0, N-1}$ з системи

$$\varphi_l^{(N)} + \sum_{s=0}^{N-1} w_s \varphi_l^{(s)} = 0, \ l = \overline{1, N} \tag{106}$$

за допомогою правила Крамера. □

5.2 Обернений оператор до оператора перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва (101)

У цьому підрозділі ми дослідимо явний вигляд оберненого оператора до диференціального оператора N-ого порядку (101). Зафіксуємо довільну точку $x_0 \in \mathbb{R}$ і розглянемо рівняння для $(k\times k)$-матричної функції f з початковими умовами:

$$\begin{cases} W\{f\} := f^{(N)}(x) + \sum\limits_{s=0}^{N-1} w_s(x) f^{(s)}(x) = g(x), \\ f^{(s)}(x_0) = b_s,\ s = \overline{0, N-1}. \end{cases} \tag{107}$$

де $g(x)$ — фіксована $(k\times k)$-матрична функція, b_s, $s = \overline{0, N-1}$ — сталі $(k\times k)$-матриці. Як і в попередньому підрозділі, через φ_l, $l = \overline{1, N}$ ми позначатимемо $(k\times k)$-матричні розв'язки рівнянь $W\{\varphi_l\} = 0$, $l = \overline{1, N}$, а через $\hat{\varphi}$ — матрицю Вронського, побудовану по функціях φ_l. Вважатимемо, що визначник $\det \hat{\varphi}$ є відмінний від нуля в деякому околі точки x_0. Введемо позначення:

$$\tilde{\varphi}(x) := (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_N(x)),\ b := (b_1^\top, \ldots, b_N^\top)^\top. \tag{108}$$

Справедливе таке твердження:

Твердження 13. *Розв'язок f рівняння* (107) *виражається таким чином через функцію g та сталі $(k\times k)$-матриці b_s:*

$$f(x) = \sum_{l=1}^{N} \left(\varphi_l(x) \int_{x_0}^{x} h_l(\tau) g(\tau) d\tau \right) + \tilde{\varphi}(x) \varphi^{-1}(x_0) b, \tag{109}$$

де

$$h_{ij,l} = \frac{\begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \ldots & \varphi_{l-1} & \varphi_{l(i,j,1)} & \varphi_{l+1} & \ldots & \varphi_N \\ \varphi_1' & \varphi_2' & \ldots & \varphi_{l-1}' & \varphi_{l(i,j,2)} & \varphi_{l+1}' & \ldots & \varphi_N' \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(N-2)} & \varphi_2^{(N-2)} & \ldots & \varphi_{l-1}^{(N-2)} & \varphi_{l(i,j,N-2)} & \varphi_{l+1}^{(N-2)} & \ldots & \varphi_N^{(N-2)} \\ \varphi_1^{(N-1)} & \varphi_2^{(N-1)} & \ldots & \varphi_{l-1}^{(N-1)} & \varphi_{l(i,j,N-1)} & \varphi_{l+1}^{(N-1)} & \ldots & \varphi_N^{(N-1)} \end{vmatrix}}{\det \hat{\varphi}}, \tag{110}$$

$$\varphi_{l(i,j,s)}=\begin{pmatrix} \varphi^{(s)}_{11,l} & \varphi^{(s)}_{12,l} & \dots & \varphi^{(s)}_{1\,i-1,l} & e_{1j,s} & \varphi^{(s)}_{1\,i+1,l} & \dots & \varphi^{(s)}_{1k,l} \\ \varphi^{(s)}_{21,l} & \varphi^{(s)}_{22,l} & \dots & \varphi^{(s)}_{2\,i-1,l} & e_{2j,s} & \varphi^{(s)}_{2\,i+1,l} & \dots & \varphi^{(s)}_{2k,l} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \varphi^{(s)}_{k-1\,1,l} & \varphi^{(s)}_{k-1\,2,l} & \dots & \varphi^{(s)}_{k-1\,i-1,l} & e_{k-1j,s} & \varphi^{(s)}_{k-1\,i+1,l} & \dots & \varphi^{(s)}_{i-1\,k,l} \\ \varphi^{(s)}_{k1,l} & \varphi^{(s)}_{k2,l} & \dots & \varphi^{(s)}_{k\,i-1,l} & e_{kj,s} & \varphi^{(s)}_{k\,i+1,l} & \dots & \varphi^{(s)}_{kk,l} \end{pmatrix},$$

$$e_{mj,s}=\begin{cases} 0;\ m,j=\overline{1,k},\ s=\overline{0,N-2}, \\ 0;\ m\neq j,\ s=N-1, \\ 1;\ m=j,\ s=N-1. \end{cases} \tag{111}$$

Доведення. Введемо позначення $f_0 := f$ і запишемо диференціальне рівняння (107) у вигляді системи:

$$\begin{cases} f_1 = f_0', \\ f_2 = f_1', \\ \vdots \\ f_{N-1} = f_{N-2}', \\ f_{N-1}' + \sum\limits_{s=0}^{N-1} w_s f_s = g, \\ f_0(x_0)=b_0,\ f_1(x_0)=b_1,\ \dots,f_{N-1}(x_0)=b_{N-1}. \end{cases} \tag{112}$$

В позначеннях $\hat{f} := (f_0^\top,\dots,f_{N-1}^\top)^\top$, $\hat{g} := (O_{k,(N-1)k}, g^\top)^\top$, де $O_{k,(N-1)k}$ — нульова матриця розмірності $(k\times(N-1)k)$, система (112) набуде вигляду:

$$\begin{cases} \frac{\partial\hat{f}}{\partial x} + V(x)\hat{f} = \hat{g}, \\ \hat{f}(x_0) = b, \end{cases} \tag{113}$$

де $V(x)$ — $(Nk\times Nk)$-матриця, яку за допомогою $(k\times k)$-матричних блоків можна записати у вигляді:

$$V(x)=\begin{pmatrix} O_k & -I_k & O_k & \dots & O_k \\ O_k & O_k & -I_k & \dots & O_k \\ O_k & O_k & O_k & \dots & O_k \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ O_k & O_k & O_k & \dots & -I_k \\ w_0 & w_1 & w_2 & \dots & w_{N-1} \end{pmatrix} \tag{114}$$

Використовуючи те, що матриця Вронського $\hat{\varphi}$ є озв'язком однорідного рівняння $\frac{\partial\hat{\varphi}(x)}{\partial x} + V(x)\hat{\varphi}(x) = 0$ та метод варіації сталої, ми отримуємо розв'язок рівняння з початковими умовами (113):

$$\hat{f}(x) = \hat{\varphi}(x)\left(\int_{x_0}^{x} \hat{\varphi}^{-1}(\tau)\hat{g}(\tau)d\tau + \hat{\varphi}^{-1}(x_0)b\right). \tag{115}$$

Залишається з формули (115) для $(Nk \times k)$-матричної функції $\hat{f}$ знайти вираз для першого $(k \times k)$-блоку $f_0 = f$, який і буде розв'язком рівняння з початковими умовами (107). □

6 Заключні зауваження

1. В цій роботі ми провели порівняння методів побудови точних розв'язків нелінійних інтегровних моделей, запропонованих В.О. Марченком та В.Б. Матвєєвим. А саме, на прикладі одних із найбільш відомих моделей — рівняння Кадомцева-Петвіашвілі та нелінійного рівняння Шредінгера було показано, що обидва підходи приводять до однакових результатів. Виявляється, що це спостереження має загальний характер. Це пояснюється тим, що в підході В.О. Марченка "неявно присутнє" перетворення Крама (Дарбу-Крама-Матвєєва). Питанню як отримати загальне перетворення Дарбу-Крама-Матвєєва в рамках методу В.О. Марченка, а також його зв'язку з матричним узагальненням перетворення Хопфа-Коула присвячено розділ 4 нашої роботи, що і є одним з її основних результатів. В зв'язку з тим що явні формули для коефіцієнтів оператора перетворення Крама та його оберненого в загальному матричному випадку не зустрічались авторам (хоча його структура добре вивчена, див., наприклад, [12, 13]), вони наведені в додатках. Можливим є їх використання для інтегрування інших матричних диференціальних лаксових зображень, наприклад, задачі нелінійної взаємодії N хвиль [11].

2. Можна показати, що нелінійні рівняння типу Бюргерса (7) є частковим випадком більш загальних C-інтегровних систем, які отримуються з лінійного рівняння (4) за допомогою бінарних перетворень [14]-[16]. При цьому розв'язки відповідних нелінійних S-інтегровних систем виражаються в термінах визначників Грама. Замість диференціального оператора Дарбу-Крама-Матвєєва в цьому випадку вини-

кають інтегральні одягаючі оператори, які відіграють важливу роль в методі оберненої задачі розсіяння (див., наприклад [17]-[21]). Цьому питанню ми плануємо присвятити окрему публікацію.

[1] *Mikhailov A.V., Shabat A.B., Sokolov V.V.* The symmetry approach to classification of integrable equations // What is Integrability? (V.E. Zakharov, ed.) — New York: Springer Verlag, 1990. — P. 115–184.

[2] *Santini P.M.* Integrable nonlinear evolution equations with constraints: I. // Inverse Problem. — 1992. — **8**. — P. 285–301.

[3] *Burgers J.M.* Mathematical examples illustrating relations ocurring in the theory of turbulent fluid motion // Trans. Roy. Neth. Acad. Sci. Amsterdam. — 1939. — **17**. — P. 1–53.

[4] *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = u_{xx}$ // Comm. Pure Appl. Math. — 1950. — **3**. — P.201–230.

[5] *Cole J.D.* On a quasilinear parabolic equation ocurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. — 1951. — **9**. — P. 225–236.

[6] *Марченко В.А.* Нелинейные уравнения и операторные алгебры. — Киев: Наукова Думка, 1986. — 155 с.

[7] *Matveev V. B., Salle M.A.* Darboux transformations and solitons. — Berlin Heidelberg: Springer-Verlag. — 1991. — 120 p.

[8] *Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* Ієрархія матричних рівнянь Бюргерса і інтегровні редукції в системі Деві-Стюардсона // Укр. мат. ж. — 1998. — **50**, №2. — С. 252–264.

[9] *Athorne C., Fordy A.P.* Integrable equations in (2+1)-dimensions associated with symmetric and homogeneous spaces // J. Math. Phys. — 1987. — **28**. — P. 2018–2024

[10] *Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І.* Інтегрування скалярної ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі методом інтегральних перетворень

типу Дарбу // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. — 2011. — **75**. — С. 10–54.

[11] Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. — М.: Мир, 1983. — 408 с.

[12] *Sydorenko Yu.M.* The Dressing Method and Darboux Transformations // Differential Equations. — 2001. — **V.37**, №6. – С. 898–899

[13] *Sidorenko Yu.M.* Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations // Математичні студії. — 2003. — **19**, №2. — С.181–192.

[14] *Сидоренко Ю.М., Гвоздева Е.В.* Бинарные преобразования общих уравнений Лакса–Захарова– Шабата //Нелинейные краев. задачи мат. физики и их прилож. — Киев: Ин-т математики НАН Украины. — 1999. — С. 220–224.

[15] *Samoilenko V.H., Sidorenko Yu.M., Buonanno L., Matarazzo G.* Explicit solutions of nonlinear evolution equations via nonlocal reductions approach // Proceedings of Institute of Math. of NAS of Ukraine. — 2000. — **30**, Part II. — P. 406–410.

[16] *Сидоренко Ю.М.* Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи // Укр. мат. ж. — 2002. — **54**, №11. — С. 1531–1550.

[17] *Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М.* Інтегрування деяких $(2+1)$–вимірних інтегровних систем методами оберненої задачі розсіяння та бінарних перетворень Дарбу // Математичні студії. — 2003. — **20**, №2. — С. 119–132.

[18] *Починайко М.Д.,Сидоренко Ю.М.* Побудова операторів розсіяння методом бінарних перетворень Дарбу // Укр. мат. ж. — 2006. — **58**, №8. — С. 1238–1260.

[19] *Сидоренко Ю.М., Починайко М.Д., Чвартацький О.І.* Обернена задача розсіяння для просторово-двовимірної системи Дірака і метод бінарних перетворень // Вісник НУ "Львівська політехніка". — 2010. — №287: Серія фізико-математичні науки. — С. 28–59.

[20] *Сидоренко Ю., Чвартацький О.* Оператори перетворень для гіперболічної системи двох рівнянь // Математичний вісник НТШ. — 2010. — **7**. — С. 289–317.

[21] *Сидоренко Ю.* Конструктивний метод побудови оператора розсіяння для нестаціонарної гіперболічної системи рівнянь // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат.. — 2010. — **72**. — С. 263–274.

PROJECTION METHOD AND DARBOUX-CRUM-MATVEEV TRANSFORMATIONS

Yuriy SYDORENKO, Oleksandr CHVARTATSKYI

Ivan Franko National University,
1 Universytetska Str., Lviv 79000, Ukraine

e-mail: *y_sydorenko@franko.lviv.ua*

Two algebrized methods of integration of nonlinear equations, which are proposed by V.O. Marchenko and V.B. Matveev, are compared. Matrix Darboux-Crum-Matveev transformation is obtained by the projection method proposed by V.O. Marchenko.