НАБЛИЖЕННЯ (ψ,β)–ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ ІНТЕГРАЛАМИ ВЕЙЄРШТРАССА В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МЕТРИЦІ

©2012 р. Юрій ХАРКЕВИЧ, Інна КАЛЬЧУК

Волинський національний університет імені Лесі Українки,
пр. Волі 13, Луцьк

e-mail: *kalchuk_i@ukr.net*

Редакція отримала статтю 28 березня 2012 р.

Знайдено асимптотичні рівності для точних верхніх меж відхилень інтегралів Вейєрштрасса від функцій з класу $L^{\psi}_{\beta,1}$ в інтегральній метриці

1 Основні означення

Нехай L — простір сумовних на $(0,2\pi)$ 2π-періодичних функцій $f(t)$ з нормою $\|f\|_L = \|f\|_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,dt$.

Розглянемо крайову задачу в одиничному крузі $|z| < 1$ $(z = \rho e^{ix})$ для рівняння

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0. \tag{1}$$

Розв'язок рівняння (1), що задовольняє крайову умову

$$u\,(\rho, x)\,\Big|_{\rho=1} = f(x), \quad -\pi \le x \le \pi, \tag{2}$$

УДК: 517.5; MSC 2010: 41A35, 41A45
Ключові слова і фрази: задача Колмогорова–Нікольського, інтеграл Вейєрштрасса, асимптотична рівність

де $f(x)$ — сумовна 2π-періодична функція, надалі позначатимемо $W(\rho;f;x)=u(\rho,x)$. Тоді розв'язок крайової задачі (1)–(2) можемо записати у вигляді

$$W(\rho;f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\Big\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\rho^{k^2}\cos kt\Big\}dt,\quad 0\le\rho<1. \qquad (3)$$

Величину (3) називають інтегралом Вейєрштрасса функції f (див., наприклад, [1, с. 150]). Поклавши $\rho=e^{-\frac{1}{\delta}}$, інтеграл Вейєрштрасса запишемо у вигляді

$$W_\delta(f;x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\Big\{\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\frac{k^2}{\delta}}\cos kt\Big\}dt,\quad \delta>0.$$

Через $L^\psi_\beta, L^\psi_{\beta,1}$ позначимо введені О.І. Степанцем [2, 3] множини сумовних 2π-періодичних функцій $f(x)$, які визначаються в такий спосіб. Нехай $f\in L$, а a_k і b_k — її коефіцієнти Фур'є. Якщо послідовність дійсних чисел $\psi(k)$, $k\in\mathbb{N}$, і число $\beta\in\mathbb{R}$ такі, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\psi(k)}\bigg(a_k\cos\Big(kx+\frac{\beta\pi}{2}\Big)+b_k\sin\Big(kx+\frac{\beta\pi}{2}\Big)\bigg)$$

є рядом Фур'є деякої функції $\varphi\in L$, то $\varphi(\cdot)$ називають (ψ,β)–похідною функції $f(\cdot)$ і позначають через $f^\psi_\beta(\cdot)$. При цьому кажуть, що функція $f(\cdot)$ належить множині L^ψ_β. Коли $f\in L^\psi_\beta$ і $f^\psi_\beta\in\mathfrak{N}\subset L$, то вважають, що $f\in L^\psi_\beta\mathfrak{N}$. Якщо в якості $\mathfrak{N}$ виступає множина

$$S^0_1=\{\varphi\in L:\|\varphi\|_1\le 1,\ \varphi\perp 1\},$$

то множину $L^\psi_\beta S^0_1$ позначають через $L^\psi_{\beta,1}$.

Послідовності $\psi(k)$, $k\in\mathbb{N}$, що визначають класи L^ψ_β, зручно розглядати як звуження на множині натуральних чисел $\mathbb{N}$ деяких неперервних функцій $\psi(t)$ неперервного аргументу t, що належать множині $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M}=\Big\{\psi(t),\ t\ge 1:\ \psi(t)>0,\ \psi(t_1)-2\psi\Big(\frac{t_1+t_2}{2}\Big)+\psi(t_2)\ge 0$$

$$\forall t_1,\ t_2\in[1;\infty),\ \lim_{t\to\infty}\psi(t)=0\Big\}.$$

Наслідуючи О.І. Степанця (див., наприклад, [3, с. 160]), з множини $\mathfrak{M}$ виділимо підмножину

$$\mathfrak{M}_0 = \{\psi \in \mathfrak{M} : \ 0 < \mu(t) \leq K < \infty \quad \forall t \geq 1\},$$

де $\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t)-t}$, $\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}(\psi(t)/2)$, $\psi^{-1}(\cdot)$ — обернена до $\psi(\cdot)$ функція, а константа K, взагалі кажучи, може залежати від функції ψ. Через $\mathfrak{M}'$ будемо позначати підмножину функцій $\psi(\cdot)$ з $\mathfrak{M}$, що задовольняють умову $\int\limits_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt < \infty$. Покладемо також $\mathfrak{M}'_0 = \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'$.

Згідно з [2, с. 30], якщо $\psi \in \mathfrak{M}'$ і $\beta \in \mathbb{R}$ або $\psi \in \mathfrak{M}$ і $\beta = 2l$, $l \in \mathbb{Z}$, то множина $L^\psi_{\beta,1}$ складається з функцій, які майже в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ можуть бути представлені рівністю

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f^\psi_\beta(x+t)\Psi_\beta(t)\,dt,$$

де $\Psi_\beta(t)$ — сумовна на $(0, 2\pi)$ функція, ряд Фур'є якої має вигляд

$$\sum_{k=1}^\infty \psi(k)\cos\Big(kt + \frac{\beta\pi}{2}\Big).$$

Основною метою роботи є вивчення асимптотичної поведінки величини

$$\mathcal{E}(L^\psi_{\beta,1}; W_\delta)_L = \sup_{f \in L^\psi_{\beta,1}} \|f(\cdot) - W_\delta(f;\cdot)\|_1, \quad \delta \to \infty.$$

Якщо в явному вигляді знайдена функція $\varphi(\delta) = \varphi(L^\psi_{\beta,1}; \delta)$ така, що при $\delta \to \infty$ $\quad \mathcal{E}(L^\psi_{\beta,1}; W_\delta)_L = \varphi(\delta) + o(\varphi(\delta))$, то, наслідуючи О.І. Степанця [3, с. 198], будемо казати, що розв'язана задача Колмогорова–Нікольського для класу $L^\psi_{\beta,1}$ та інтеграла Вейєрштрасса в метриці простору L.

Відмітимо, що в рівномірній метриці апроксимативні властивості інтегралів Вейєрштрасса на класах W^r_β, W^r, класах Зигмунда Z_α та інших вивчались в роботах П. П. Коровкіна [4], Л. І. Баусова [5, 6], Я. С. Бугрова [7], В. А. Баскакова [8], Л. П. Фалалеєва [9].

2 Асимптотичні оцінки для верхніх меж відхилень інтегралів Вейєрштрасса від функцій з класів $L^{\psi}_{\beta,1}$

Для інтеграла Вейєрштрасса введемо функцію

$$\tau(u)=\tau_\delta(u,\psi)=\begin{cases}\left(1-e^{-u^2}\right)\frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})},\ 0\le u\le\frac{1}{\sqrt{\delta}},\\ \left(1-e^{-u^2}\right)\frac{\psi\left(\sqrt{\delta}u\right)}{\psi\left(\sqrt{\delta}\right)},\ u\ge\frac{1}{\sqrt{\delta}},\end{cases}\tag{4}$$

де $\psi(u)$ — функція, визначена і неперервна при всіх $u\ge 1$. Не зменшуючи загальності, будемо вважати, що функція $\psi(u)$ має неперервну другу похідну на $[1,\infty)$.

Домовимося на протязі усієї роботи через K, K_i позначати сталі, взагалі кажучи, різні.

Надалі нам буде потрібне наступне твердження, що є аналогом леми 2 роботи [10].

Лема 2.1. *Якщо для функції $\tau(u)$, що задана за допомогою співвідношення (4), її перетворення $\hat{\tau}_\beta(t)$ вигляду*

$$\hat{\tau}_\beta(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\tag{5}$$

є сумовним на всій числовій осі, то справедлива рівність

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1};W_\delta)_L=\psi(\sqrt{\delta})A(\tau)+O\left(\psi\left(\sqrt{\delta}\right)\int\limits_{|t|\ge\frac{\sqrt{\delta}\,\pi}{2}}|\hat{\tau}_\beta(t)|\,dt\right),\tag{6}$$

де величина $A(\tau)$ означаєтьcя формулою

$$A(\tau)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left|\int\limits_0^\infty\tau(v)\cos\left(vt+\frac{\beta\pi}{2}\right)dv\right|dt.\tag{7}$$

Основним результатом роботи є наступна теорема.

Теорема 2.1. *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}_0'$, функція $g(u)=u^2\psi(u)$ опукла вгору або донизу на $[b,\infty)$, $b\ge 1$. Тоді при $\delta\to\infty$ має місце рівність*

$$\mathcal{E}(L^{\psi}_{\beta,1};W_\delta)_L=\psi(\sqrt{\delta})A(\tau)+O\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\psi(\sqrt{\delta})}{\sqrt{\delta}}\right),\tag{8}$$

де величина $A(\tau)$ *означається за допомогою рівності* (7) *і для неї справедлива оцінка*

$$A(\tau) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_1^{\sqrt{\delta}} u\psi(u)du + \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du\right) +$$

$$+O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \qquad (9)$$

Доведення. Перевіримо виконання умови леми 2.1. Для цього покажемо сумовність перетворення функції $\tau(u)$ виду (5), тобто збіжність інтеграла (7). Згідно з теоремою 1 роботи Л. І. Баусова [6, с. 24] для збіжності інтеграла (7) необхідно і достатньо, щоб збігалися інтеграли

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u\,|d\tau'(u)|\,, \qquad \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty} |u-1|\,|d\tau'(u)|\,, \qquad (10)$$

$$\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_0^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u}du, \qquad \int\limits_0^1\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du. \qquad (11)$$

Для оцінки першого інтеграла з (10) розіб'ємо проміжок $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ на дві частини: $\left[0,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ і $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},\frac{1}{2}\right]$.

Враховуючи, що $\tau''(u)\geq 0$ на $\left[0,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, а також нерівність

$$e^{-u^2}\leq 1, \quad u\in\mathbb{R}, \qquad (12)$$

одержимо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} u\,|d\tau'(u)| = \frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}\left(\frac{2}{\delta}e^{-\frac{1}{\delta}} - 1 + e^{-\frac{1}{\delta}}\right) = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \qquad (13)$$

Нехай тепер $u\in\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},\frac{1}{2}\right]$. Покладемо

$$\tau_1(u) = \left(1-e^{-u^2}-u^2\right)\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, \quad \tau_2(u) = u^2\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, \qquad (14)$$

тоді

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u\,|d\tau'(u)| \leq \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u\,|d\tau_1'(u)| + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u\,|d\tau_2'(u)|\,. \tag{15}$$

Знайдемо оцінку першого інтеграла в правій частині нерівності (15). Оскільки

$$\tau_1''(u) = \left(1 - e^{-u^2} - u^2\right) \frac{\delta\psi''(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} + 4u\left(e^{-u^2} - 1\right) \frac{\sqrt{\delta}\psi'(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} +$$

$$+2\left(e^{-u^2} - 2u^2 e^{-u^2} - 1\right) \frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, \tag{16}$$

то, враховуючи нерівності

$$e^{-u^2} + u^2 - 1 \leq \frac{u^4}{2}, \quad 1 - e^{-u^2} \leq u^2, \quad 2u^2 e^{-u^2} - e^{-u^2} + 1 \leq 3u^2, \quad u \in \mathbb{R}, \tag{17}$$

матимемо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| \leq \frac{\delta}{2\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^5 \psi''(\sqrt{\delta}u)du + \frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^4 |\psi'(\sqrt{\delta}u)|du +$$

$$+\frac{6}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^3 \psi(\sqrt{\delta}u)du.$$

Проінтегруємо перший інтеграл в правій частині останньої нерівності частинами та скористаємося теоремами 3.12.1 [3, с. 161] та 3.16.1 [3, с. 175], при $\delta > 4b^2$ отримаємо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_1'(u)| \leq \frac{\sqrt{\delta}|\psi'(\frac{\sqrt{\delta}}{2})|}{2^6\psi(\sqrt{\delta})} + \frac{|\psi'(1)|}{2\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} + \frac{13\sqrt{\delta}}{2\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^4 |\psi'(\sqrt{\delta}u)|du +$$

$$+\frac{6}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u^3 \psi(\sqrt{\delta}u)du \leq K_1 + \frac{K_2}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})} +$$

$$+\frac{K_3}{\psi(\sqrt{\delta})}\left(\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}+\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}}\right)u^3\psi(\sqrt{\delta}u)du, \tag{18}$$

де тут і надалі будемо вважати, що $\psi'(1)=\psi'(1+0)$.

Оскільки функція $g(u)=u^2\psi(u)$ обмежена на $[1,b]$ то

$$\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}u^3\psi(\sqrt{\delta}u)du=\frac{1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{b}u^3\psi(u)\,du=O\left(\frac{1}{\delta^2\psi(\sqrt{\delta})}\right). \tag{19}$$

Враховуючи опуклість вгору або донизу функції $g(u)=u^2\psi(u)$ при $u\geq b$ матимемо

$$\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}}u^3\psi(\sqrt{\delta}u)du\leq\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{1}u^3\psi(\sqrt{\delta}u)du\leq\frac{1}{\delta\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{b}^{\sqrt{\delta}}u^2\psi(u)du\leq K_1+\frac{K_2}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}. \tag{20}$$

Врахувавши (19) та (20) із (18), дістанемо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}}u|d\tau_1'(u)|=O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \tag{21}$$

Оцінимо другий інтеграл у правій частині нерівності (15). Враховуючи, що при $u\geq\frac{1}{\sqrt{\delta}}$

$$\tau_2''(u)=2\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}+4u\frac{\sqrt{\delta}\psi'\left(\sqrt{\delta}u\right)}{\psi(\sqrt{\delta})}+u^2\frac{\delta\psi''(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})},$$

та розбивши проміжок інтегрування $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},\frac{1}{2}\right]$ на дві частини $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},\frac{b}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{b}{\sqrt{\delta}},\frac{1}{2}\right]$, при $\delta>4b^2$ матимемо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}u\,|d\tau_2'(u)|\leq\frac{\delta}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}u^3\psi''(\sqrt{\delta}u)\,du+\frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}u^2\left|\psi'(\sqrt{\delta}u)\right|\,du+$$

$$+\frac{2}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u\psi(\sqrt{\delta}u)\,du.$$

Проінтегрувавши частинами перший інтеграл в правій частині останньої нерівності двічі, а другий — один раз і врахувавши, що функція $\psi(u)$ спадна на $[1,\infty)$, одержимо

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u\,|d\tau_2'(u)| \le \frac{\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})}u^3\psi'(\sqrt{\delta}u)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} - \frac{7}{\psi(\sqrt{\delta})}u^2\psi(\sqrt{\delta}u)\Bigg|_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}+$$

$$+\frac{16}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u\psi(\sqrt{\delta}u)du \le \frac{K}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}. \tag{22}$$

Оскільки функція $g(u)=u^2\psi(u)$ опукла на $[b,\infty)$, то

$$\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} u|d\tau_2'(u)| = \left|\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}} ud\tau_2'(u)\right| = \left|(u\tau_2'(u)-\tau_2(u))\Bigg|_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{1}{2}}\right| = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \tag{23}$$

Таким чином, із співвідношень (13), (15), (21)–(23), випливає, що

$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} u\,|d\tau'(u)| = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \tag{24}$$

Оцінимо другий інтеграл з (10). Враховуючи, що згідно з (4) при $u \ge \frac{1}{\sqrt{\delta}}$

$$\tau''(u) = \left(1-e^{-u^2}\right)\frac{\delta\psi''(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} + 4ue^{-u^2}\frac{\sqrt{\delta}\psi'(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})} + 2\left(e^{-u^2}-2u^2e^{-u^2}\right)\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{\psi(\sqrt{\delta})}, \tag{25}$$

а також те, що $|u-1|\le u$, $u\in\left[\frac{1}{2},\infty\right)$ та нерівності

$$1-e^{-u^2}\le 1, \qquad u^2e^{-u^2}\le 1, \qquad \left|u-2u^3\right|e^{-u^2} \le \frac{2}{u^2}, \quad u\in\mathbb{R}, \tag{26}$$

отримаємо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1||d\tau'(u)|\leq\frac{\delta}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}u\psi''(\sqrt{\delta}u)du+$$

$$+\frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\left|\psi'(\sqrt{\delta}u)\right|du+\frac{4}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{u^2}du. \qquad (27)$$

Проінтегрувавши частинами перший інтеграл в правій частині нерівності (27), а також застосувавши теореми 3.12.1 [3, с. 161] та 3.16.1 [3, с. 175], матимемо

$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1|\,|d\tau'(u)|=O\left(1\right). \qquad (28)$$

Для оцінки першого інтеграла із (11) розіб'ємо проміжок $[0,\infty)$ на три частини: $\left[0,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$, $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},1\right]$, $[1,\infty)$.

Нехай $u\in\left[0,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$. Враховуючи (4) та друге співвідношення із (17), матимемо

$$\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\frac{|\tau(u)|}{u}du=\frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}(1-e^{-u^2})\frac{du}{u}\leq\frac{\psi(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{0}^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}udu\leq\frac{K}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}. \qquad (29)$$

Згідно з (4), у випадку $u\in\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}},1\right]$ дістанемо

$$\left|\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{|\tau(u)|}{u}du-\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}u\psi(\sqrt{\delta}u)du\right|\leq\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{|1-e^{-u^2}-u^2|}{u}\psi(\sqrt{\delta}u)du.$$

Оскільки має місце перша нерівність з (17) та оцінки (19), (20), то

$$\left|\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}\frac{|\tau(u)|}{u}du-\frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}u\psi(\sqrt{\delta}u)du\right|\leq\frac{1}{2\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1}u^3\psi(\sqrt{\delta}u)du=$$

$$= \frac{1}{2\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{\frac{b}{\sqrt{\delta}}} u^3\psi(\sqrt{\delta}u)du + \frac{1}{2\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\frac{b}{\sqrt{\delta}}}^{1} u^3\psi(\sqrt{\delta}u)du = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right).$$

Із останніх співвідношень випливає, що

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} \frac{|\tau(u)|}{u}du = \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}} u\psi(u)du + O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \tag{30}$$

Нехай, нарешті $u\in[1,\infty)$. Оскільки

$$\left|\int\limits_{1}^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u}du - \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{u}du\right| \le \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\infty}\frac{e^{-u^2}}{u}\psi(\sqrt{\delta}u)du \le K,$$

то

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u}du = \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du + O\left(1\right). \tag{31}$$

Об'єднавши формули (29)–(31), одержимо

$$\int\limits_{0}^{\infty}\frac{|\tau(u)|}{u}du = \frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}} u\psi(u)du + \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du + O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \tag{32}$$

Оцінимо другий інтеграл з (11). Для функції $\tau(u)$, заданої за допомогою співвідношення (4) згідно з лемою 1 роботи [11] для всіх $\psi\in\mathfrak{M}_0$ має місце рівність

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du = \int\limits_{0}^{1}\frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u}du + O\left(H(\tau)\right), \tag{33}$$

де $H(\tau)=|\tau(0)|+|\tau(1)|+\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}} u\,|d\tau'(u)| + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\infty}|u-1|\,|d\tau'(u)|$, а $\lambda(u)=e^{-u^2}$.

Використовуючи те, що

$$\int\limits_{0}^{1}\frac{|\lambda(1-u)-\lambda(1+u)|}{u}du = \int\limits_{0}^{1}\frac{e^{-(1-u)^2}-e^{-(1+u)^2}}{u}du = O(1),$$

а також співвідношення (24) та (28) із (33), матимемо

$$\int\limits_0^1 \frac{|\tau(1-u)-\tau(1+u)|}{u}du = O\left(1+\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\right). \tag{34}$$

Отже, враховуючи формули (24), (28), (32) і (34), згідно з теоремою 1 роботи Л. І. Баусова [6, с. 24], переконуємося в тому, що перетворення функції $\tau(u)$ вигляду (5) є сумовним на всій числовій осі. Тому згідно з лемою 2.1 справедлива рівність (6). Із нерівностей (2.14) і (2.15) роботи [6, с. 24] з урахуванням формул (24), (28), (32) і (34) отримаємо співвідношення (9).

Оцінимо залишковий член в правій частині рівності (6). Представимо $\widehat{\tau}_\beta(t)$ у вигляді

$$\widehat{\tau}_\beta(t)=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=\frac{1}{\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty\right)\tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du. \tag{35}$$

Проінтегрувавши двічі частинами інтеграли в правій частині рівності (35), одержимо

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du=-\frac{1}{\pi t^2}\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}\tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du-$$

$$-\frac{1}{\pi t^2}\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^\infty \tau''(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du-\frac{1}{\pi t^2}\left(1-e^{-\frac{1}{\delta}}\right)\frac{\sqrt{\delta}\psi'(1)}{\psi(\sqrt{\delta})}\cos\left(\frac{t}{\sqrt{\delta}}+\frac{\beta\pi}{2}\right),$$

звідки

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \tau(u)\cos\left(ut+\frac{\beta\pi}{2}\right)du\right|\le\frac{1}{\pi t^2}\left(\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}+\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^1+\int\limits_1^\infty\right)|\tau''(u)|du+\frac{1}{t^2}\frac{K}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}. \tag{36}$$

Враховуючи, що $\tau''(u) \geq 0$ на $\left[0, \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right]$ і нерівність (12), дістанемо

$$\int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} |\tau''(u)| du = \int\limits_0^{\frac{1}{\sqrt{\delta}}} \tau''(u) du = \frac{2\psi(1)}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})} e^{-\frac{1}{\delta}} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}\right). \tag{37}$$

Нехай $u \in \left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, 1\right]$. Міркуючи аналогічно як і при оцінюванні першого інтеграла з (10) на проміжку $\left[\frac{1}{\sqrt{\delta}}, \frac{1}{2}\right]$ (див. (14)–(23)), можна показати справедливість оцінки

$$\int\limits_{\frac{1}{\sqrt{\delta}}}^{1} |\tau''(u)| du = O\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}\right). \tag{38}$$

Нехай тепер $u \in [1, \infty)$. Використовуючи рівність (25), першу нерівність з (26), нерівності

$$ue^{-u^2} \leq 1, \quad (2u^2 - 1)e^{-u^2} \leq \frac{1}{u^2}, \quad u \in \mathbb{R},$$

а також теорему 3.16.1 [3, с. 175], матимемо

$$\int\limits_1^{\infty} |\tau''(u)| du \leq \frac{\delta}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^{\infty} \psi''(\sqrt{\delta}u) du + \frac{4\sqrt{\delta}}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^{\infty} \left|\psi'(\sqrt{\delta}u)\right| du +$$

$$+ \frac{1}{\psi(\sqrt{\delta})} \int\limits_1^{\infty} \frac{\psi(\sqrt{\delta}u)}{u^2} du = O(1). \tag{39}$$

Об'єднавши формули (37)–(39), із (36) отримаємо

$$\left| \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \tau(u) \cos\left(ut + \frac{\beta\pi}{2}\right) du \right| = O\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\delta}\psi(\sqrt{\delta})}\right) \frac{1}{t^2}.$$

Звідси

$$\int\limits_{|t| \geq \frac{\sqrt{\delta}\pi}{2}} \left|\widehat{\tau}_{\beta}(t)\right| dt = O\left(\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})} + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\right). \tag{40}$$

Із співвідношень (40) та (6) випливає рівність (8). □

Наслідок 2.1. *Нехай виконуються умови теореми* 2.1, $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$ *і* $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)=\infty$, *де* $\alpha(t)=\frac{\psi(t)}{t|\psi'(t)|}$. *Тоді при* $\delta\to\infty$ *має місце асимптотична рівність*

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1};W_\delta\right)_L=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du+O\left(\psi(\sqrt{\delta})\right). \qquad (41)$$

Доведення. Якщо $\psi\in\mathfrak{M}'_0$ і $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)=\infty$, то для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться таке $u_0\geq 1$, що при $u>u_0$ $(u^\varepsilon\psi(u))'>0$, тобто функція $u^\varepsilon\psi(u)$ зростає, починаючи з деякого числа u_0 і $\lim\limits_{u\to\infty}u^\varepsilon\psi(u)=$ $=\infty$. Отже, при достатньо великих δ і $0<\varepsilon<2$

$$\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}}u\psi(u)du\leq\frac{(\sqrt{\delta})^\varepsilon\psi(\sqrt{\delta})}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_{1}^{\sqrt{\delta}}\frac{du}{u^{\varepsilon-1}}=O(1). \qquad (42)$$

Використовуючи правило Лопіталя і те, що $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)=\infty$, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_x^\infty\frac{\psi(u)}{u}du}{\psi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x|\psi'(x)|}=\infty. \qquad (43)$$

Врахувавши, що

$$\frac{1}{\delta}+\frac{\psi(\sqrt{\delta})}{\sqrt{\delta}}=o\left(\psi(\sqrt{\delta})\right), \qquad (44)$$

а також співвідношення (42) та (43), із (8), (9) отримаємо (41). □

Прикладом функцій, які задовольняють умови наслідку 2.1 є функції вигляду $\psi(u)=\frac{1}{\ln^\alpha(u+K)}$, $u\geq 1$, де $\alpha>1$, $K>0$.

Наслідок 2.2. *Нехай* $\psi\in\mathfrak{M}_0$, $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$, *функція* $u^2\psi(u)$ *опукла вгору або донизу на* $[b,\infty), b\geq 1$, *і*

$$\lim_{u\to\infty}u^2\psi(u)=\infty, \qquad (45)$$

$$\lim_{\delta\to\infty}\frac{1}{\delta\psi(\sqrt{\delta})}\int\limits_1^{\sqrt{\delta}}u\psi(u)du=\infty. \qquad (46)$$

Тоді при $\delta\to\infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1};W_\delta\right)_L=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\delta}\int\limits_1^{\sqrt{\delta}}u\psi(u)du+O\left(\psi(\sqrt{\delta})\right). \tag{47}$$

Доведення. Якщо функція ψ задовольняє умови (45) і (46), то використовуючи правило Лопіталя, маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\int\limits_1^x u\psi(u)}{x^2\psi(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\psi(x)}{2x\psi(x)+x^2\psi'(x)}=\frac{1}{2+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\psi'(x)}{\psi(x)}}=\infty.$$

Звідси,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\psi'(x)}{\psi(x)}=-2. \tag{48}$$

Враховуючи (43) та (48) одержимо $\displaystyle\int_{\sqrt{\delta}}^{\infty}\frac{\psi(u)}{u}du=O\left(\psi(\sqrt{\delta})\right)$.

Використовуючи останню оцінку та співвідношення (8), (9), (44)–(46), одержимо (47). □

Зазначимо, що умови наслідку 2.2 задовольняють, наприклад, функції вигляду $\psi(u)=\frac{1}{u^2}\ln^{\alpha}(u+K), u\geq 1,\ K>0,\ \alpha>0$.

Наслідок 2.3. *Нехай $\psi\in\mathfrak{M}_0$, $\sin\frac{\beta\pi}{2}\neq 0$, функція $u^2\psi(u)$ опукла донизу на $[b,\infty), b\geq 1$, і*

$$\lim_{u\to\infty}u^2\psi(u)=K<\infty, \tag{49}$$

$$\lim_{\delta\to\infty}\int\limits_1^{\sqrt{\delta}}u\psi(u)du=\infty. \tag{50}$$

Тоді при $\delta\to\infty$ має місце асимптотична рівність

$$\mathcal{E}\left(L^{\psi}_{\beta,1};W_\delta\right)_L=\frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{\beta\pi}{2}\right|\frac{1}{\delta}\int\limits_1^{\sqrt{\delta}}u\psi(u)du+O\left(\frac{1}{\delta}\right). \tag{51}$$

Доведення. Оскільки функція $u^2\psi(u)$ опукла донизу на $[b,\infty)\,, b \geq 1$, та задовольняє умову (49), то робимо висновок, що вона монотонно спадає при $u \geq b$. Отже, при $\delta > b^2$ матимемо

$$\int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} \frac{\psi(u)}{u} du = \int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} \frac{u^2\psi(u)}{u^3} du \leq \delta\psi(\sqrt{\delta}) \int\limits_{\sqrt{\delta}}^{\infty} \frac{1}{u^3} du = K\psi(\sqrt{\delta}),$$

$$\psi(\sqrt{\delta}) = O\left(\frac{1}{\delta}\right).$$

Використовуючи останні оцінки та співвідношення (8), (9), (49) та (50), отримаємо (51). □

Прикладом функцій ψ, для яких має місце наслідок 2.3, є функції виду $\psi(u) = \frac{1}{u^2}(K + e^{-u})$, $\psi(u) = \frac{1}{u^2 \ln^{\alpha}(u+K)}$, $u \geq 1, K > 0$, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Зауважимо, що при виконанні умов наслідків 1–3 рівності (41), (47) і (51) дають розв'язок задачі Колмогорова–Нікольського для інтегралів Вейєрштрасса W_δ на класах $L^{\psi}_{\beta,1}$ в інтегральній метриці.

[1] *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. — М.: Наука, 1965. — 407 с.

[2] *Степанец А.И.* Классификация и приближение периодических функций. — Киев: Наукова Думка, 1987. — 268 с.

[3] *Степанец А.И.* Методы теории приближения, Ч.I. — Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. — 427 с.

[4] *Коровкин П. П.* О наилучшем приближении функций класса Z_2 некоторыми линейными операторами //Докл. АН СССР. — 1959. — **127**, № 3. — С. 143–149.

[5] *Баусов Л. И.* О приближении функций класса Z_α положительными методами суммирования рядов Фурье //Успехи мат. наук. — 1961. — **16**, № 3. — С. 513–515.

[6] *Баусов Л. И.* Линейные методы сумирования рядов Фурье с задаными прямоугольными матрицами. I // Изв. вузов. Математика. — 1965. — **46**, № 3. — С. 15–31.

[7] *Бугров Я. С.* Неравенства типа неравенств Бернштейна и их применение к исследованию дифференциальных свойств решений дифференциальных уравнений высшего порядка//Math. Cluj. — 1963. — **5**, № 1. — P. 5–25.

[8] *Баскаков В. А.* О некоторых свойствах операторов типа операторов Абеля-Пуассона // Матем. заметки. — 1975. — **17**, №2. — С. 169–180.

[9] *Фалалеев Л. П.* О приближении функций обобщенными операторами Абеля–Пуассона // Сибир. мат. ж. — 2001. — **1**, № 4 — С. 926–936.

[10] *Новикова А.К.* О приближении функций в пространствах C и L // Вопросы сумирования рядов Фурье. — Киев, 1985. — С. 14–51. — (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 85.61).

[11] *Жигалло К.М., Харкевич Ю.І.* Наближення бігармонійними інтегралами Пуассона класів (ψ, β)– диференційовних функцій в інтегральній метриці // Проблеми теорії наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. — 2004. — **1**, № 1. — С. 144–170.

APPROXIMATION OF (ψ, β)–DIFFERENTIABLE FUNCTIONS OF THEIR WEIERSTRASS INTEGRALS IN THE INTEGRAL METRIC

Yuri KHARKEVYCH, Inna KAL'CHUK

Volyn National University of Lesya Ukrainka,
13 Voli Pr., Lutsk, Ukraine
e-mail: *kalchuk_i@ukr.net*

Asymptotic equalities are obtained for least upper bounds of deviations Weierstrass integrals of functions from the class $L^{\psi}_{\beta,1}$ in the integral metric.