ДЕКОМПОЗИЦІЯ ЛІНІЙНИХ ОПЕРАТОРНИХ РІВНЯНЬ ЗА ДОПОМОГОЮ МЕТОДІВ ІТЕРАТИВНОГО АГРЕГУВАННЯ

Богдан ШУВАР[1], *Анатолій ОБШТА*[1], *Михайло КОПАЧ*[2]

[1] Національний університет "Львівська політехніка",
вул. С. Бандери 12, Львів 79013

[2] Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника,
вул. Шевченка 57, Івано-Франківськ 76018

e-mail: *kopachm2009@gmail.com*

Редакція отримала статтю 3 травня 2011 р.

Встановлено достатні умови збіжності агрегаційно-ітеративних методів, які охоплюють однопараметричні і багатопараметричні методи ітеративного агрегування для лінійних операторних рівнянь. Ці умови не містять вимог про знакосталість відповідного оператора і можуть справджуватися за обставин, коли його спектральний радіус більший від одиниці.

1 Вступ

Способи розв'язання задач високої розмірності зведенням їх до задач меншої розмірності, які відомі як методи декомпозиції, здебільшого грунтуються на методиках агрегування змінних (див. напр. [1, 2]). Декомпозицію на основі агрегаційно-ітеративного підходу вигідно використовувати у прикладних задачах, зокрема, для організації паралельних обчислень у багатопроцесорному режимі.

УДК: 517.988.8; MSC 2010: 47J25

Ключові слова і фрази: декомпозиція, агрегаційно-ітеративні алгоритми, проекційно-ітеративні методи

Розглянемо рівняння

$$x = Ax + b \quad (b \in E) \tag{1}$$

з лінійним оператором A, де E — банахів простір. Однопараметричний метод, який є найпростішим з-поміж методів ітеративного агрегування для цього рівняння, досліджений в [3, с. 155–159]. Його можна описати за допомогою формули

$$x_{n+1} = \frac{(\varphi,\, b)}{(\varphi,\, x_n - Ax_n)} Ax_n + b, \tag{2}$$

де $(\varphi,\, z)$ — значення лінійного функціоналу $\varphi \in E^*$ на елементі $z \in E$ (E^* — спряжений з E простір). Встановлені в [3, с. 155–159] достатні умови збіжності цього методу передбачають, що E є напівупорядкованим банаховим простором, у якому напівупорядкованість узгоджена з нормою таким чином, що співвідношення $\theta \leqslant x \leqslant y$ (θ — нульовий елемент в E) призводить до нерівності $\|x\| \leqslant \|y\|$. При цьому фігурують припущення про додатність A та b і про виконання нерівності $\rho(A) < 1$ для спектрального радіуса $\rho(A)$ оператора A, а також про те, що оператор A є фокусуючим (див. [3, с. 77–83]) і що функціонал φ має вигляд $\varphi = A^*g$, де g є додатнім лінійним функціоналом, який задовольняє нерівність $(g,\, x) > (A^*g,\, x)$ для додатніх x із E зі спряженим з A оператором A^*.

В цій замітці для дослідження одного класу агрегаційно-ітеративних методів, який охоплює однопараметричні та багатопараметричні методи ітеративного агрегування, застосовуємо методику, запропоновану в [4]–[7]. Встановлені достатні умови збіжності як в однопараметричних так і в багатопараметричних випадках не містять вимог про знакосталість оператора A і вільного члена b і можуть справджуватись як при $\rho(A) < 1$ так і при $\rho(A) > 1$. Отримані результати дозволяють конкретизувати задекларовану в [3, с. 158] спорідненість однопараметричного методу (2) з методом Ю.Д. Соколова осереднення функціональних поправок і, отже, з проекційно-ітеративними методами (див. [8]–[10]). Досліджені, наприклад, в [11] агрегаційно-ітеративні алгоритми є водночас окремими випадками методів ітеративного агрегування, які можна ототожнити з деякими проекційно-ітеративними методами із [8, 9]. Актуалізація теоретичних і прикладних досліджень методів ітеративного агрегування (див., напр., [12]–[15]) спричинена, зокрема, тим, що як зазначено в [3, с. 155–158], ці методи часто дозволяють отримувати прийнятні для практики числові результати за обставин, коли умови збіжності методу невідомі.

2 Опис алгоритму

Лінійне рівняння (1) розглядатимемо за припущення, що $A : E \to E$, $b \in E$, де E — банахів простір. Нехай E' — банахів простір, який, взагалі кажучи, не ідентичний з E. Вважатимемо заданими лінійні оператори $S : E \to E'$ та $\Lambda : E' \to E'$ і розглянемо систему рівнянь, складену з (1) та рівняння

$$y = \Lambda y - SAx + \Lambda Sx, \tag{3}$$

яке містить додатковий невідомий елемент $y \in E'$. Розгляд системи (1), (3) означає, що простір E "зануримо" у "ширший" простір $E \times E'$, який можна вважати банаховим, запровадивши у той чи інший спосіб норму пари елементів $(x,\, y)$ $(x \in E,\ y \in E')$, наприклад, як норму вектора $(\|x\|_E,\, \|y\|_{E'})$, де $\|\cdot\|_E$ і $\|\cdot\|_{E'}$ — відповідні норми в E і E'. В просторі $E \times E'$ виокремимо підпростір ε_0 пар $(x,\, y)$ $(x \in E,\ y \in E')$, які задовольняють співвідношення

$$Sx + y = \theta', \tag{4}$$

де θ' — нульовий елемент в E'.

Для побудови ітераційного процесу використовуватимемо лінійні неперервні оператори $a_n : E' \to E$, $\alpha_n : E' \to E'$ вважаючи їх, взагалі кажучи, залежними від параметра n, який надалі будемо ототожнювати з номером ітерації у формулах

$$x_{n+1} = Ax_n + b + a_n(y_n - y_{n+1}), \tag{5}$$

$$y_{n+1} = \Lambda y_{n+1} - SAx_n - Sb + \alpha_n(y_n - y_{n+1}) + \Lambda Sx_n. \tag{6}$$

Будемо вважати, що справджуються рівності

$$Sa_n + \alpha_n = \Lambda \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{7}$$

Вибір початкового наближення $(x_0,\, y_0)$ підпорядковуємо вимозі, щоб виконувалась умова $(x_0,\, y_0) \in \varepsilon_0$. Очевидно, що довільний вибір $x_0 \in E$ спричиняє при цьому вибір $y_0 = -Sx_0 \in E'$ на підставі рівності (4).

3 Допоміжні твердження

Вважатимемо, що існує оператор $(I' - \Lambda)^{-1}$, обернений до оператора $I' - \Lambda$, де I' — одиничний оператор в E'.

Лема 1. *Якщо рівняння* (1) *має розв'язок* x^*, *то існує* $y^* \in E'$ *таке, що* $(x^*,\, y^*)$ *є розв'язком в* $E \times E'$ *системи* (1), (3) *і має місце співвідношення* $(x^*,\, y^*) \in \varepsilon_0$.

Доведення. З (1) і (3) випливає при $x = x^*$, $y = y^*$, що

$$Sx^* + y^* = SAx^* + Sb + \Lambda y^* - Sb + \Lambda SAx^* = \Lambda(Sx^* + y^*).$$

Звідси, зважаючи на існування оберненого оператора $(I' - \Lambda)^{-1}$ і на очевидність факту про існування y^* при існуванні x^*, отримуємо потрібне твердження. □

Лема 2. *Нехай при кожному* $n = 0, 1, \ldots$ *справджується співвідношення* (7) *і* $(x_0,\, y_0) \in \varepsilon_0$. *Тоді для кожного* $n = 0, 1, \ldots$ *будемо мати* $(x_n,\, y_n) \in \varepsilon_0$.

Доведення. Співвідношення

$$Sx_{n+1} + y_{n+1} = SAx_n + Sb + Sa_n y_n - Sa_n y_{n+1} + \Lambda y_{n+1} - SAx_n - Sb +$$

$$+\alpha_n y_n - \alpha_n y_{n+1} + \Lambda Sx_n =$$

$$= (\Lambda - Sa_n\alpha_n) y_{n+1} + \Lambda Sx_n + (Sa_n + \alpha_n) y_n = \Lambda(Sx_n + y_n)$$

дають підставу для того, щоб вважати лему доведеною завдяки принципу індукції. □

Співвідношення

$$S(x_n - x^*) + y_n - y^* = \theta' \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{8}$$

які є очевидними наслідками наведених лем, використаємо при дослідженні збіжності ітераційного процесу (5), (6).

Умова (7) є одним з основних припущень, на основі яких побудовано методику дослідження агрегаційно-ітеративних алгоритмів в [4]–[7]. Для описаних в [3, с. 158] формул агрегаційно-ітеративних методів виконання умови (7) забезпечене структурою цих формул як в однопараметричному так і в багатопараметричному випадках. Зазначимо, що реалізація названих методів із [3] з довільними $x_0 \in E$, $y_0 \in E'$ призводить до співвідношення $(x_n, y_n) \in \varepsilon_0$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Виконання рівностей (7) дозволяє застосовувати пропоновану методику дослідження збіжності й до деяких інших методів, зокрема, до окремих проекційно-ітеративних методів, досліджених в [8, 9], причому ця методика не ототожнюється з методикою з [8, 9]. Якщо, наприклад, співвідношення (7) мають вигляд $Sa = \Lambda$ і оператор a не залежить від ітераційного номера n, ітераційний процес (5), (6) можна ототожнювати з одним із досліджених в [8, 9] (див. також [10]) стаціонарних проекційно-ітеративних методів. Зауважимо, що зазначені алгоритми ітеративного агрегування із [3] відрізняються від проекційно-ітеративних методів із [8, 9] щонайменше тим, що вони задають на кожному кроці ітераційного процесу спосіб вибору оператора проектування.

4 Умови збіжності ітерацій

З рівностей (1), (3), (5), (6) та припущення, що для кожного $n = 0, 1, \ldots$ існують обернені оператори $(I' - \Lambda + \alpha_n)^{-1}$ і що (x^*, y^*) $(x^* \in E, y^* \in E')$ є розв'язком системи (1), (3), отримуємо

$$y_{n+1} - y^* = (I' - \Lambda + \alpha_n)^{-1}(\Lambda S - SA)(x_n - x^*) - (I' - \Lambda + \alpha_n)^{-1}\alpha_n S(x_n - x^*), \tag{9}$$

$$\begin{gathered} x_{n+1} - x^* = A(x_n - x^*) - a_n S(x_n - x^*) - a_n(y_{n+1} - y^*) = \\ = A(x_n - x^*) - a_n S(x_n - x^*) - a_n(I' - \Lambda + \alpha_n)^{-1}(\Lambda S - SA)(x_n - x^*) + \\ + a_n(I' - \Lambda + \alpha_n)^{-1}\alpha_n S(x_n - x^*) = \\ = A(x_n - x^*) - a_n(I' - \Lambda + \alpha_n)^{-1}(\Lambda S - SA)(x_n - x^*). \end{gathered} \tag{10}$$

Позначивши

$$H_n w = [A - a_n(I' - \Lambda + \alpha_n)^{-1}(S - SA)]w, \tag{11}$$

запишемо рівність (10) у вигляді

$$x_{n+1} - x^* = H_n(x_n - x^*). \tag{12}$$

Наведені міркування означають, що доведено таке твердження.

Теорема 1. *Нехай справджуються умови лем* 1 *і* 2 *та існують обернені оператори* $(I' - \Lambda + \alpha_n)^{-1}$ *для кожного* $n = 0, 1, \ldots$ *Тоді послідовність* $\{x_n\}$, *побудована за допомогою алгоритму* (5), (6) *при* $(x_0,\, y_0) \in \varepsilon_0$, *збігається до розв'язку* $x^* \in E$ *рівняння* (1) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q, *якщо*

$$\|H_n\| = q < 1 \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{13}$$

Розглянемо частковий випадок, коли рівності (7) мають вигляд

$$SA = \Lambda S. \tag{14}$$

Тоді замість рівняння (3) та (6) матимемо відповідно $y = \Lambda y - Sb$, та $y_{n+1} = \Lambda y_{n+1} - Sb + \alpha_n(y_n - y_{n+1})$. Нехай, крім того, маємо

$$Sa_n = \Lambda S \quad (n = 0, 1, \ldots). \tag{15}$$

Це означає, що α_n є нульовими операторами. Припустимо також, що при цьому оператори a_n не залежать від n, тобто $a_n = a$ $(n = 0, 1, \ldots)$. Тоді алгоритм (5), (6) можна подати так

$$x_{n+1} = Ax_n + b + a(y_n - y_{n+1}), \tag{16}$$

$$y_{n+1} = \Lambda y_{n+1} - Sb. \tag{17}$$

Оскільки з (17) випливає, що для кожного $n = 0, 1, \ldots$

$$y_n = -(I' - \Lambda)^{-1} Sb, \tag{18}$$

то ітераційний процес (16), (17) є не чим іншим, як звичайним методом послідовних наближень

$$x_{n+1} = Ax_n + b, \tag{19}$$

для якого початкове наближення вибране таким способом, що

$$Sx_0 = (I' - \Lambda)^{-1} Sb. \tag{20}$$

Зазначене можна розглядати як конкретизацію відміченого в [10, с. 31–32] факту щодо впливу початкового наближення x_0 на збіжність ітераційного процесу (19).

Теорема 2. *Нехай існує обернений оператор* $(I' - \Lambda)^{-1}$, *справджуються умови* (14) *та* (15), *причому* $a_n = a$ *не залежить від* n. *Тоді для збіжності ітераційного процесу* (19) *з початковим наближенням* x_0, *яке задовольняє рівність* (20), *достатньо, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус* $\rho(A - aS)$ *оператора* $A - aS$.

Доведення. Оскільки має місце (18) для $n = 0, 1, \ldots$, то співвідношення (1) і (19) та леми 1 і 2 дають підставу для того, щоб рівність (12) подати у вигляді

$$x_{n+1} - x^* = (A - aS)(x_n - x^*) \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Звідси і випливає потрібне твердження. □

5 Однопараметричний випадок

Нехай E' є множиною дійсних чисел, а оператор S означений за допомогою формули $Sx = (\varphi,\, x)$, де $(\varphi,\, x)$ — значення лінійного функціоналу φ на елементі $x \in E$. Нехай, як і раніше, A^* — спряжений з A оператор, E^* — спряжений з E банахів простір. Задамо, взагалі кажучи, довільне дійсне число $\lambda \neq 1$. У цьому випадку (3) є скалярним рівнянням вигляду

$$y = \lambda y - (\varphi,\, Ax) - (\varphi,\, b) + \lambda(\varphi,\, x). \tag{21}$$

Для множини ε_0 маємо рівність $(\varphi,\, x) + y = 0$. Вважаючи, що вираз $a_n y$ означає дію множення елемента $a_n \in E$ на дійсне число y і що α_n є дійсними числами, розглянемо ітераційний процес, який описується (5) та формулою

$$y_{n+1} = \lambda y_{n+1} - (\varphi,\, Ax_n) - (\varphi,\, b) + \alpha_n(y_n - y_{n+1}) + \lambda(\varphi,\, x_n). \tag{22}$$

Співвідношення (22) в однопараметричному випадку фігурує замість (6). Рівність (7) має вигляд

$$(\varphi,\, a_n) + \alpha_n = \lambda. \tag{23}$$

Для означеного згідно (11) оператора H_n будемо мати

$$H_n w = Aw - \frac{a_n}{1-\lambda+\alpha_n}(\varphi,\, w - Aw). \tag{24}$$

Додаткова вимога про те, що оператори

$$a_n = \frac{Ax_n}{(\varphi,\, x_n)}, \tag{25}$$

призводить до рівностей

$$\alpha_n = \lambda - \frac{(A^*\varphi,\, x_n)}{(\varphi,\, x_n)}. \tag{26}$$

Оскільки наслідком з (25), (26) є (22), то формулам (2) можна надати вигляду

$$x_{n+1} = \frac{(\varphi,\, x_{n+1})}{(\varphi,\, x_n)}Ax_n + b. \tag{27}$$

Це випливає з рівності

$$(\varphi,\, x_{n+1}) = \frac{(\varphi,\, b)}{(\varphi,\, x_n) - (\varphi,\, Ax_n)}(\varphi,\, Ax_n) + (\varphi,\, b),$$

яку отримуємо з (2). Її також можна записати так

$$\frac{(\varphi,\, b)}{(\varphi,\, x_n - Ax_n)} = \frac{(\varphi,\, x_{n+1})}{(\varphi,\, x_n)}.$$

Зазначимо, що теорема 1, як і наведений приклад однопараметричного методу (2), не містить, взагалі кажучи, жодних обмежень щодо знакосталості A та b, а також не містить вимоги про виконання нерівності $\rho(A) < 1$ для спектрального радіуса оператора A. У винятковій ситуації, коли $\varphi = \varphi_1$ є власним елементом оператора A^* з відповідним до φ_1 власним числом $\lambda = \lambda_1 \neq 1$ цього оператора, формула (24) має вигляд

$$H_n w = Aw - \frac{Ax_n}{(\varphi_1,\, x_n)}(\varphi_1,\, w). \tag{28}$$

Оскільки при цьому $\alpha_n = 0$ при кожному $n = 0, 1, \ldots$, то ітераційний процес (27) є звичайним методом послідовних наближень (19) зі спеціально підібраним початковим наближенням x_0, для якого

$$(\varphi_1,\, x_0) = \frac{(\varphi_1,\, b)}{1 - \lambda_1}.$$

6 Діагональний багатопараметричний алгоритм

Розглянемо ситуацію, коли структура оператора A описується співвідношенням

$$A = A_1 + A_2, \tag{29}$$

де $A_1 x = \sum_{i=1}^{N_0} \lambda_i \psi_i(\varphi_i,\, x)$ $(N_0 < \infty)$.

Тут λ_i є власним числами оператора A, яким відповідають власні елементи ψ_i оператора A та власні елементи φ_i оператора A^*. Вважаючи, що $\lambda_i \neq 1$ та

$$(\varphi_i,\, \psi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

означимо множину $\widetilde{\varepsilon}_0$ наступним чином

$$\widetilde{\varepsilon}_0 = \left\{ x \,|\, x \in E,\ (\varphi_i,\, x) = \frac{(\varphi_i,\, b)}{1 - \lambda_i},\ i = \overline{1, N_0} \right\}.$$

Теорема 3. *Нехай* $x_0 \in \widetilde{\varepsilon}_0$ *і* $(\varphi_i,\, A_2 x) = 0$ $(x \in E,\ i = \overline{1, N_0})$, $\rho(A_2) < 1$. *Тоді метод послідовних наближень* (19) *збігається до єдиного в* E *розв'язку* x^* *рівняння* (1) *не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником* q. *При цьому* $x^* \in \widetilde{\varepsilon}_0$ *і для кожного* $n = 0, 1, \ldots$ *маємо* $x_n \in \widetilde{\varepsilon}_0$.

Доведення. Очевидно, що справджуються умови теореми 2. Це забезпечує достовірність твердження теореми 3. □

7 Узагальнений агрегаційно-ітеративний алгоритм

Означимо лінійний неперервний оператор A_0 за допомогою рівності

$$S(A + A_0) = \Lambda S \tag{30}$$

і розглянемо систему, що складена з рівняння (1) та з рівняння

$$y = \Lambda y + SA_0 x - Sb. \tag{31}$$

Заміна (3) на (31) призводить до заміни в ітераційному процесі (5), (6) формули (6) співвідношенням

$$y_{n+1} = \Lambda y_{n+1} = SA_0 x_n - Sb + \alpha_n(y_n - y_{n+1}). \qquad (32).$$

Вважатимемо, що $(x_0,\, y_0) \in \varepsilon_0$ для означеної згідно (4) множини ε_0. Зберігаються твердження леми 1 для розв'язку $(x^*,\, y^*)$ системи (1), (31) та леми 2 для отриманих за допомогою алгоритму (5), (32) ітерацій $(x_n,\, y_n)$. Обгрунтування цих тверджень отримується за тою ж схемою, яку використано для доведення лем 1 та 2. Конкретизація a_n, α_n, S, Λ, A_0 дозволяє отримувати відомі алгоритми для наближеного розв'язання рівняння (1), зокрема, різні варіанти методів ітеративного агрегування, релаксійні методи, проекційно-ітеративні методи, а також будувати нові ітераційні алгоритми поєднанням тим чи іншим способом їх ітераційних формул та досліджувати їх збіжність. Більш-менш загальний критерій збіжності алгоритму (5), (32) при початковому наближенні $(x_0,\, y_0) \in \varepsilon_{0_+}$ отримаємо, якщо припустимо, що $\|H_n\|_0 \leqslant q < 1$, де $\|H_n\|_0$ — яка-небудь норма оператора H_n в $E \times E'$, означеного за допомогою формули

$$H_n = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Тут

$$h_{11} = A - a_n(I' - \Lambda + \alpha_n)^{-1} SA_0 - g_n S, \quad h_{12} = a_n(I' - \Lambda + \alpha_n)^{-1}(J' - \Lambda) - g_n,$$

$$h_{21} = (I' - \Lambda + \alpha_n)^{-1} SA_0 - g_n^{(0)} S, \quad h_{22} = (I' - \Lambda + \alpha_n)^{-1} - g_n^{(0)},$$

де оператори $g_n : E' \to E$, $g_n^{(0)} : E' \to E'$ $(n = 0, 1, \ldots)$ вибрані, взагалі кажучи, довільним способом.

8 Приклади

Приклад 1. *Система*

$$x_1 = 2x_1 + 3x_2 - 130,$$
$$x_2 = 1,92x_1 + 2x_2 - 202,$$

має розв'язок $x_1^* = 100,\ x_2^* = 10$. *Матриця* A, *складена з коефіцієнтів цієї сисетми має власні числа* $\lambda_1 = 4,4,\ \lambda_2 = -0,4$. *Власний вектор* $\varphi_1 = \left(\frac{4}{\sqrt{41}},\ \frac{5}{\sqrt{41}}\right)$ *відповідає власному числу* $\lambda_1 = 4,4$. *Виберемо* $x_0 = \begin{pmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \end{pmatrix} = \left(\frac{130}{1-4,4},\ \frac{202}{1-4,4}\right)$. *Має місце співвідношення* $(\varphi_1,\ x_0) = \frac{(\varphi_1,\, b)}{1-\lambda_1}$, *тобто* $4x_1^{(0)} + 5x_2^{(0)} = \frac{-4\cdot 130 - 5\cdot 202}{1-4,4} = 450$.

Підрахунок ітерацій за формулами

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= 2x_1^{(n)} + 3x_2^{(n)} - 130, \\ x_2^{(n+1)} &= 1,92x_1^{(n)} + 2x_2^{(n)} - 202 \end{aligned} \tag{33}$$

дає, зокрема, такі результати

$$\begin{aligned} x_1^{(8)} &= 99,78585, \quad x_2^{(8)} = 9,89320 \\ x_1^{(9)} &= 99,25070, \quad x_2^{(9)} = 9,37430. \end{aligned}$$

Отже, до 8-ої ітерації маємо покращення наближень, неминуче нагромадження похибок заокруглення при $\rho(A) = |\lambda_1| = 4,4$, *призводить до того, що* $x^{(9)} = (x_1^{(9)},\ x_2^{(9)})$ *є гіршим наближенням від* $x^{(8)}$. *Підправимо* $x^{(7)}$ *таким способом, щоб* $4x_1^{(7)} + 5x_2^{(7)} = 450$. *Тоді, зокрема, матимемо* $x^{(10)} = (99,99583,\ 10,00299)$. *Отже, використання співвідношення* $4x_1^{(n)} + 5x_2^{(n)} = 450$ *сприяє перетворенню нестійкого обчислювального процесу у стійкий.*

До цієї ж системи застосуємо однопараметричний метод ітеративного агрегування у вигляді

$$\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= 2x_1^{(n)} + 3x_2^{(n)} + 0,5(y_n - y_{n+1}) - 130, \\ x_2^{(n+1)} &= 1,92x_1^{(n)} + 2x_2^{(n)} - 0,4(y_n - y_{n+1}) - 202, \\ y_{n+1} &= -\tfrac{1}{3,14}\left(0,708x_1^{(n)} + 0,2x_2^{(n)} + 0,36y_n\right), \end{aligned}$$

маючи на увазі формули (25), (26). *Взявши, наприклад,* $x_1^{(0)} = 10$, $x_2^{(0)} = 100$, *знаходимо* y_0 *з рівності* $(\varphi_1,\ x_0) + y_0 = \frac{(\varphi_1,\, b)}{1-\lambda_1}$. *Маємо* $y_0 = 101,65715$. *При обчисленні наступних наближень будемо використовувати також співвідношення*

$$(\varphi_1,\ x_n) + y_n = \frac{(\varphi_1,\ b)}{1-\lambda_1},$$

тобто $4,5x_1^{(n)} + 5,1x_2^{(n)} + y_n = 450,34285$. *Отримаємо, зокрема,*

$$\begin{aligned}
&x_1^{(1)} = 136,85487, \quad x_2^{(1)} = -25,31210, \quad y_1 = 4,6231127,\\
&x_1^{(5)} = 100,94896, \quad x_2^{(5)} = 9,101566, \quad y_5 = -20,057538,\\
&x_1^{(10)} = 99,99326, \quad x_2^{(10)} = 10,01161, \quad y_{10} = -20,641697.
\end{aligned}$$

Приклад 2. *Система*

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2,1x_1 + 2,2x_2 + 0,3x_3 + 0,5x_4 - 257,\\
x_2 &= 0,9x_1 + 0,8x_2 + 0,2x_3 + 0,0x_4 + 7,\\
x_3 &= 0,1x_1 + 0,2x_2 + 2,5x_3 + 2,8x_4 - 163,\\
x_4 &= 0,4x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 + 0,2x_4 - 12
\end{aligned}$$

має точний розв'язок $x^* = (10;\ 100;\ 20;\ 40)$. *Спектральний радіус* $\rho(A) = 3,5$ *більший від одиниці. Виберемо початкове наближення* $x^{(0)}$ *так, щоб справджувались рівності* $x_1^{(0)} + x_2^{(0)} = 110$, $x_3^{(0)} + x_4^{(0)} = 60$. *Приймемо* $x^{(0)} = (90;\ 20;\ 0;\ 60)$. *Метод послідовних наближень* (19) *збігається, як випливає з теореми* 2, *не повільніше від геометричної зі знаменником* $q = 0,5$. *Обчислення за формулами* (19) *дають такі результати*

$$x^{(1)} = (6;\ 104;\ 18;\ 42), \quad x^{(2)} = (10,8;\ 99,2;\ 21;\ 39),$$

$$x^{(3)} = (9,72;\ 100,28;\ 19,62;\ 39,38),$$

$$x^{(4)} = (10,104;\ 99,896;\ 20,142;\ 39,858).$$

Можна переконатися, що $x_1^{(n)} + x_2^{(n)} = 110$, $x_3^{(n)} + x_4^{(n)} = 60$. *Якщо наступні ітерації через вплив похибок заокруглень призводять до погіршення наближень* $x^{(n)}$, *то використання двопараметричного методу при виконанні цих рівностей дозволяє позбутися цієї вади.*

[1] *Цурков В.И.* Декомпозиция в задачах большой размерности. — М.: Наука, 1981. — 351 с.

[2] *Первозванский А.А., Гайцгорн В.Г.* Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация. — М.: Наука, 1979. — 268 с.

[3] *Красносельский М.А., Лифшиц Е.А., Соболев А.В.* Позитивные линейные системы. — М.: Наука, 1985. — 255 с.

[4] *Шувар Б.А.* О сходимости однопараметрического метода итеративного агрегирования для систем линейных алгебраических уравнений // Львовский политехн. инс-т. — Львов. Дсп. в УкрНИИНТИ 10.08.88, №1471. — Ук 88. — Рус. — 1988. — 11 с. — 2001. — **53**, № 2. — С. 274–278.

[5] *Шувар Б.А.* О сходимости многопараметрических вариантов метода итеративного агрегирования // Вестник Львовского политехн. ин-та. — 1989. — **232**. — С. 140–142.

[6] *Копач М.І., Обшта А.Ф., Шувар Б.А.* Дослідження збіжності ітеративного агрегування // Прикарпатський вісник НТШ. Число. — 2010. — **9**, №1. — С. 99–106.

[7] *Шувар Б.А., Копач М.І., Ментинський С.М., Обшта А.Ф.* Двосторонні наближені методи. — Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ, 2007. — 515 с.

[8] *Лучка А.Ю.* Проекционно-итеративные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений. — К.: Наукова Думка, 1980. — 264 с.

[9] *Курпель Н.С.* Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. — К.: Наукова думка, 1968. — 243 с.

[10] *Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П., Рутицкий Я.Б., Стеценко В.Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969. — 455 с.

[11] *Костишин Л.П., Шувар Б.А.* Агрегаційно-ітеративні способи апроксимації розв'язків крайових задач // Укр. мат. ж. — 2003. — №10. — С. 1425–1430.

[12] *Marec I., Mayer P., Pultarova I.* Conference issue on the theory and practice of iterative aggregation/disaggregation methods // Economic Transactions of Numerical Analysis. — 2009. — №35. — P. 185–200.

[13] *He G., Feng H., Li C., Chen H.* Parallel Sim Rank Computation on Large Graphs with Aggregation // IDD'10 (Washington, DC, USA, Juli 25–28). — Washington, 2010. — P. 543–552.

[14] *Marec I., Mayer P.* Aggregation/disaggregation iterative methods applied to Leont'ev systems and Markov chains // Appl. of Math. — 2002. — **47**, №2. — P. 139–156.

[15] *Стеценко В.Я.* Исследование сходимости метода многопараметрического итеративного агрегирования при решении линейных алгебраических систем и интегральных уравнений // Теория и практика использования методов агрегирования в планировании и управлении. Материалы совешания. — 1984. — С 74–81.

DECOMPOSITION OF LINEAR OPERATOR EQUATIONS BY ITERATIVE AGGREGATION METHODS

Bohdan SHUVAR[1], *Anatoliy OBSHTA*[1], *Mykhailo KOPACH*[2]

[1] Lviv Polytechnic National University,
12 Bandera Str., Lviv 79013, Ukraine
[2] Vasyl Stefanyk Precarpathian National University,
57 Shevchenka Str., Ivano-Frankivsk 76018, Ukraine

e-mail: *kopachm2009@gmail.com*

There are established sufficient convergence conditions of aggregative iterative methods, which conclude one parametric and many parametric iterative aggregation methods for linear operator equations. These conditions do not contain the requirements of the respective operator sign-constance and may be rebutted when its spectra radius is grater then unity.