ОПЕРАТОРИ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ СИМЕТРИЧНИХ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

©2012 р. *Олег ГОЛУБЧАК*

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3б, Львів 79060

e-mail: *oleggol@ukr.net*

Редакція отримала статтю 26 травня 2012 р.

Досліджено гільбертів простір аналітичних функцій, визначених в області ℓ_1. Описано мультиплікативні функціонали у цьому просторі та деякі оператори композиції. Знайдено відтворююче ядро цього простору.

1 Мультиплікативні функціонали на гільбертових просторах симетричних аналітичних функцій

Нехай σ — деяке бієктивне відображення множини натуральних чисел у себе. Для довільного $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_1$ визначимо $\sigma(x) = (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \ldots)$. Нагадаємо, що функція f на ℓ_1 називається симетричною, якщо $f(\sigma(x)) = f(x)$ для кожного $x \in \ell_1$ і бієктивного відображення σ на множині натуральних чисел. Розглянемо простір симетричних поліномів на ℓ_1, який позначимо $P_s(\ell_1)$. Алгебри

УДК: 517.98; MSC 2010: 46G20, 46G25
Ключові слова і фрази: симетрична аналітична функція, оператор композиції, гільбертів простір, відтворююче ядро

симетричних поліномів та аналітичних функцій досліджувались багатьма авторами (див. [1, 2, 3] та бібліографію у цих роботах). Відомо, що поліноми

$$P_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k$$

утворюють алгебраїчний базис в $P_s(\ell_1)$. Також відомо, що поліноми вигляду $P_\lambda = P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \cdots P_{\lambda_m}$ утворюють лінійний базис в $P_s(\ell_1)$, де $P_{\lambda_k}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^{\lambda_k}$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ — деяке розбиття натурального числа n, тобто $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m = n$. Якщо ввести на $P_s(\ell_1)$ скалярний добуток $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle = b_{\lambda\mu} \delta_{\lambda\mu}$, де $\delta_{\lambda\mu}$ — символ Кронекера, $b_{\lambda\lambda} = b_\lambda > 0$, то даний скалярний добуток породжує норму $\|P_\lambda\| = \sqrt{\langle P_\lambda, P_\lambda \rangle} = \sqrt{b_\lambda}$. Поповнення простору $P_s(\ell_1)$ відносно даної норми для випадку $b_\lambda = 1$ будемо позначати $H_s(\ell_1)$.

У роботі [4] розглядаються гільбертові простори, породжені симетричними поліномами на ℓ_1 і встановлюються умови, при яких елементи цих просторів будуть аналітичними функціями у деякій області $\Omega \in \ell_1$.

Означення 1. *Лінійний функціонал $\varphi : H_s \to \mathbb{C}$ називають мультиплікативним, якщо $\varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q)$ для всіх поліномів $P, Q \in H_s$.*

Оскільки ортонормований базис простору H_s утворюють скінченні добутки поліномів P_k, то кожен мультиплікативний функціонал φ на H_s повністю визначається своїми значеннями на $P_k, k = 1, 2, \ldots$.

Навпаки, поклавши $\varphi(P_k) = a_k$ для деякої послідовності чисел a_k, ми можемо однозначно продовжити за лінійністю і мультиплікативністю φ до лінійного мультиплікативного функціонала на щільний підпростір $P_s(\ell_1) \subset H_s$. Якщо при цьому функціонал φ буде обмеженим, а отже, неперервним, то його можна продовжити за неперервністю на H_s. Таким чином, задача опису множини $M(H_s)$ лінійних мультиплікативних функціоналів на H_s зводиться до опису множини послідовностей a_k, для яких функціонал $\varphi(P_k) = a_k$ буде обмеженим на $P_s(\ell_1)$.

Лема 1. *Лінійний мультиплікативний функціонал φ на $P_s(\ell_1)$ буде обмеженим тоді і тільки тоді, коли для послідовності значень $a_k = \varphi(P_k)$ множина $\{a_\lambda = a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n} \mid |\lambda| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \in \mathbb{N}\}$ є абсолютно сумовною в квадраті.*

Доведення. Нехай f — довільний елемент з H_s. За означенням простору H_s, f можна подати у вигляді

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda, \quad \text{де} \quad \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} |c_\lambda|^2 < \infty.$$

Припустимо, що $\varphi \in M(H_s)$. Тоді $\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda \varphi(P_\lambda) < \infty$. З довільності f випливає, що

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} |\varphi(P_\lambda)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} |\varphi(P_{\lambda_1} \cdots P_{\lambda_n})|^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} |a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2 < \infty.$$

Навпаки, якщо $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} |a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2 < \infty$, то функціонал $\varphi(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} c_\lambda \varphi(P_\lambda)$ визначений для кожної $f \in H_s$ і

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} |a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2.$$

□

Позначимо $\mathbb{D}_2 = \{a \in \ell_2 \mid |a_k| < 1\}$. Легко бачити, що $\mathbb{D}_2$ — відкрита необмежена множина, яку називають полідиском в ℓ_2.

Теорема 1. *Лінійний мультиплікативний функціонал φ на $P_s(\ell_1)$ буде неперервним тоді і тільки тоді, коли послідовність $a = \{a_k = \varphi(P_k)\}$ належить $\mathbb{D}_2$.*

Доведення. З комбінаторики відомо, що для $|a_k| < 1$ формальний ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sum\limits_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} |a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2$ можна подати у вигляді формального добутку $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-|a_k|^2}$. Цей добуток збігається, якщо $a = \{a_k\} \in \ell_2$, оскільки

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big| -\log \frac{1}{1-|a_k|^2} \Big| \le \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 = c\|a\|^2$$

для деякої константи c. Таким чином, якщо $a \in \ell_2$, то за лемою 1

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} |a_{\lambda_1} \cdots a_{\lambda_n}|^2 = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-|a_k|^2} \le e^{c\|a\|^2}$$

і, отже, φ — обмежений функціонал.

Навпаки, якщо φ — обмежений функціонал, то

$$\sum |a_k|^2 \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\lambda_1+\cdots+\lambda_n=n} |a_{\lambda_1}\cdots a_{\lambda_n}|^2 = \|\varphi\|^2.$$

Тому $a \in \ell_2$.

Припустимо, що для деякого k, $|a_k| \geq 1$. Розглянемо елемент $f \in H_s$ вигляду $f = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} P_k^m$. Очевидно, що $\|f\|^2 = |\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2}| < \infty$. Тоді $\varphi(f) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_k^m}{m} = \infty$, тобто в цьому випадку φ не визначений на H_s. Отже, $|a_k| < 1$ для кожного k, тобто $a \in \mathbb{D}_2$. $\square$

Зауважимо, що у статті [4] показано, що функціонал значення в точці $R_x(f) = f(x)$, $f \in H_s$, буде неперервним мультиплікативним функціоналом тоді і тільки тоді, коли $x \in \Omega = \{x \in \ell_1 \mid |P_k(x)| < 1, k \in \mathbb{N}\}$. Таким чином, якщо $\varphi = R_x$ для деякого $x \in \ell_1$ і $|a_k| = |\varphi(P_k)| = |P_k(x)| < 1$, то $a = \{a_k\}$ автоматично належить множині $\mathbb{D}_2 \subset \ell_2$.

Покажемо, що існують елементи з $M(H_s)$, які не є функціоналами значення в точці.

Приклад 1. *Розглянемо скінченну послідовність* $\{a_1, \ldots, a_m||a_i| < 1\}$, *для якої не всі* $a_i = 0$. *За теоремою 1, для будь-якої такої послідовності існує такий функціонал* $\varphi \in M(H_s)$, *що* $\varphi(P_k) = a_k, 1 \leq k \leq m$ *і* $\varphi(P_k) = 0, k > m$. *З роботи* [1] *відомо, що не існує елемента* $x \in \ell_1$, *для якого* $\varphi(P_k) = R_x(P_k)$ *для всіх* k.

Приклад 2. *Нехай* $z = \{z_n, |z_n| < 1, \forall n \in \mathbb{N}\}$ *— деяка обмежена послідовність така, що для деякого* $m \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^{m+1} < \infty$ *і ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$ *збігається умовно (але не абсолютно) для всіх* $k \leq m$. *Тоді* $P_k(z) := \sum_{n=1}^{\infty} z_n^k$ *є визначені для всіх* $k \in \mathbb{N}$ *і* $\{a_k\} = \{P_k(z)\} \in \ell_2$.

За теоремою 1 існує функціонал $\varphi \in M(H_s)$ *такий, що* $\varphi(P_k) = P_k(z)$. *Але* $z \notin \ell_1$, *тому* φ *не є функціоналом значення в точці.*

2 Оператори композиції на H_s

Розглянемо на просторі ℓ_1 таке відношення еквівалентності: $x \sim y$, якщо $P_k(x) = P_k(y), \forall k \in \mathbb{N}$. Позначимо $\ell_{1/\sim}$ множину класів еквівалентності і $[x]$ — клас, який містить елемент x. Відомо (див. [2]), що

$\ell_{1/\sim}$ не є лінійним простором. Проте легко бачити, що якщо $[x] = [y]$, то $\|x\| = \|y\|$. Тому ми будемо писати $\|[x]\| = \|x\|$.

Позначимо $\widetilde{B_1} = \{[x] \in \ell_{1/\sim} : \|x\| < 1\}$. Зауважимо, що $\widetilde{B_1}$ можна розглядати як підмножину у $M(H_s)$.

Під оператором композиції C_F будемо розуміти неперервний оператор $C_F : H_s \to H_s$, для якого існує відображення $F : \widetilde{B_1} \to M(H_s)$ таке, що $C_F(f) = \hat{f} \circ F$, де $\hat{f}(\varphi) = \varphi(f), \forall \varphi \in M(H_s)$.

Нехай $h(t)$ — деяка функція однієї комплексної змінної, аналітична у відкритому крузі $|t| < 1$ і має абсолютно збіжний ряд Тейлора. Розглянемо відображення $F_h : \widetilde{B_1} \to \ell_{1/\sim}$, визначене таким чином:

$$F_h([x]) = [(h(x_1), h(x_2), \ldots, h(x_n), \ldots)], x \in \widetilde{B_1}.$$

Очевидно, що значення F_h не залежить від вибору представника $x \in [x]$. Покажемо, що $F_h([x]) \in \ell_{1/\sim}$ для кожного $x \in \ell_1, \|x\| < 1$. Справді, нехай $h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k t^k$ — розклад функції h у ряд Тейлора. Тоді

$$\|F_h([x])\| = \sum_{n=0}^{\infty} |h(x_n)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |h_k||x_n|^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty.$$

Позначимо W алгебру всіх аналітичних в крузі функцій однієї змінної з абсолютно збіжним рядом Тейлора. Відомо, що W — банахова алгебра відносно норми $\|h\| = \sum_{k=0}^{\infty} |h_k|$.

Теорема 2. *Для кожної функції $h \in W$ такої, що $\|h\| = r < 1$ і $h(0) = 0$ оператор композиції $C_{F_h} : f \to f \circ F_h$ є неперервним оператором з H_s в H_s.*

Доведення. Зауважимо, що

$$C_{F_h}(P_m)(x) = P_m(F_h(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} h^m(x_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} h_k x_n^k \Big)^m =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{\infty} h_{k_1} \cdots h_{k_m} x_n^{k_1+\cdots+k_m} = \sum_{k_1,\ldots,k_m=1}^{\infty} h_{k_1} \cdots h_{k_m} P_{k_1+\cdots+k_m}(x).$$

Тому

$\|P_m \circ F_h\|^2 = \sum_{k_1,\ldots,k_m=0}^{\infty} |h_{k_1}|^2 \cdots |h_{k_m}|^2 = (\sum |h_k|^2)^m \le \|h\|^{2m} = r^{2m} \le 1.$

Аналогічно для $P_\lambda = P_{\lambda_1} P_{\lambda_2} \cdots P_{\lambda_n}$, маємо $\|P_\lambda \circ F_h\|^2 \le r^{2(\lambda_1+\cdots+\lambda_n)}$.

Нехай $f \in H_s$, $f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda$, $\sum |c_\lambda|^2 = \|f\|^2$. Тоді

$$\|C_{F_h}(f)\| = \|f \circ F_h\| \le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} |c_\lambda| \|P_\lambda \circ F_n\| \le$$

$$\le \|f\| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} |r^n = \|f\| \sum_{n=0} p(n) r^n,$$

де $p(n)$ — кількість розбиттів натурального n на натуральні доданки. З відомої асимптотичної формули Харді і Рамануджана

$$p(n) \sim \frac{\exp(\pi\sqrt{2n/3})}{4n\sqrt{3}} \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

випливає, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) r^n$ збігається для кожного r, $|r| < 1$. Тому оператор C_{F_h} — обмежений і $\|C_{F_h}\| \le \sum_{n=0}^{\infty} p(n) r^n$. □

На множині $\ell_{1/\sim}$ введемо наступні операції. Для довільних $x, y \in \ell_1$ позначимо: $[x] \bullet [y] = [(x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots)]$ — клас, який містить елемент з ℓ_1, що має всі координати вектора x та вектора y; $[x] \diamond [y] = [(x_1 y_1, x_2 y_1, \ldots, x_1 y_2, \ldots, x_i y_j, \ldots)]$ — клас, який містить елемент з ℓ_1, координати якого є всеможливі попарні добутки координат вектора x на координати вектора y. Очевидно, що вказані операції коректно визначені на всіх $[x], [y] \in \ell_1$ і $\|[x] \bullet [y]\| = \|x\| + \|y\|$, $\|[x] \diamond [y]\| = \|x\| \|y\|$.

Зауважимо, що $P_\lambda(x \diamond y) = P_\lambda(x) P_\lambda(y)$ і $P_m(x \bullet y) = P_m(x) + P_m(y)$.

Твердження 1. *Для довільного $y \in \Omega$ і $f \in H_s$, елемент $f(x \diamond y) \in H_s$ і оператор $M_y : f(x) \to f(x \diamond y)$ є неперервним на H_s.*

Доведення. Нехай $f = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda$. Тоді

$$\|M_y(f)\|^2 = \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda M_y(P_\lambda) \Big\|^2 = \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda(y) P_\lambda \Big\|^2 =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \big| c_\lambda P_\lambda(y) \big|^2 \le \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \big| c_\lambda \big|^2 = \|f\|^2.$$

Таким чином, M_y — обмежений оператор композиції і $\|M_y\| \le 1$. □

Зауважимо, що оператор $f(x) \to f(x \bullet y)$ є необмеженим, якщо $y \ne 0$.

3 Відтворююче ядро у просторі H_s

Ми будемо використовувати скорочені позначення: $\bullet_{n=1}^{m} x_n = x_1 \bullet \cdots \bullet x_m$ і $x^{\diamond m} = \underbrace{x \diamond \cdots \diamond x}_{m}$. За означенням приймемо $x^{\diamond 0} := (1, 0, \ldots, 0, \ldots)$.

Позначимо $K(x,y) = \bullet_{n=0}^{\infty} (x \diamond y)^{\diamond n}, x, y \in \ell_1$. Зауважимо, що для кожного $x, y \in \ell_1, \|x\| < 1, \|y\| < 1$,

$$\|K(x,y)\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|xy\|^n = \frac{1}{1 - \|x\|\|y\|}.$$

При цьому, для $x, y \in \Omega, m \in \mathbb{N}$ визначено

$$P_m(K(x,y)) = \lim_{k \to \infty} P_m(\bullet_{n=0}^{k} (x \diamond y)^{\diamond n}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (P_m(x) P_m(y))^n = \frac{1}{1 - P_m(x) P_m(y)}.$$

Позначимо нескінченний формальний добуток

$$C(x,y) = \prod_{m=1}^{\infty} P_m(K(x,y)).$$

Лема 2. *Для кожного фіксованого $x \in \Omega$, $C(x,y)$ є функцією з H_s відносно y.*

Доведення. Легко бачити, що

$$C(x,y) = \prod_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (P_m(x) P_m(y))^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} P_\lambda(x) P_\lambda(y).$$

Як було зауважено, $\{P_k(x)\} = \{a_k\} \in \mathbb{D}_2$. Повторюючи міркування теореми 1, отримуємо, що $\{P_\lambda(x)\} \in \ell_2$, тому за означенням простору H_s, $C(x,y) \in H_s$ для кожного фіксованого $x \in \Omega$. □

Теорема 3. *Для кожного фіксованого $x \in \Omega$ і $f \in H_s$ виконується рівність $f(x) = \langle C(x,\cdot), f \rangle_{H_s}$.*

Доведення. Нехай $f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda(y)$. Тоді

$$\langle C(x,\cdot), f \rangle_{H_s} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} \langle P_\lambda(x) P_\lambda, c_\lambda P_\lambda \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\lambda|=n} c_\lambda P_\lambda(x) = f(x).$$

□

З теореми, зокрема, випливає, що $C(x,y)$ є абстрактним відтворюючим ядром простору H_s і $\langle C(x,\cdot),\cdot\rangle = R_x$

[1] *R. Alencar, R. Aron, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk* Algebras of symmetric holomorphic functions on ℓ_p // Bull. Lond. Math. Soc. — 2003. — **35**, — C. 55–64.

[2] *I. Chernega, P. Galindo, and A. Zagorodnyuk* Some algebras of symmetric analytic functions and their spectra // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 2012. — **55**, — C. 125–142.

[3] *Gonzalez M., Gonzalo R. and Jaramillo J.* Symmetric polynomials on rearrangement invariant function spaces // Jour. London Math. Soc. — 1999. — **59.** — P. 681–697.

[4] *Голубчак О.М.* Гільбертові простори симетричних аналітичних функцій на ℓ_1 // Карпатські математичні публікації — 2010. — **53**, № 2. — C. 274–278.

OPERATORS ON HILBERT SPACES OF ANALYTIC FUNCTIONS

Oleh HOLUBCHAK

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences,
3b Naukova Str., L'viv 79060, Ukraine

e-mail: *oleggol@ukr.net*

A Hilbert space of analytic functions in a domain of ℓ_1 is investigated. Multiplicative functionals in this space and some composition operators are described. The reproducing kernel of this space is obtained.