НАПІВСКАЛЯРНА ЕКВІВАЛЕНТНІСТЬ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ МАТРИЦЬ ТА РОЗВ'ЯЗУВАННЯ МАТРИЧНИХ ПОЛІНОМІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ СИЛЬВЕСТРА

©*2012 р.*

Наталія ДЖАЛЮК, Василь ПЕТРИЧКОВИЧ

Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я.С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова 3б, Львів 79060

e-mail: *nataliya.dzhalyuk@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com*

Редакція отримала статтю 20 квітня 2012 р.

На основі трикутних форм з інваріантними множниками на головних діагоналях набору поліноміальних матриць щодо напівскалярної еквівалентності запропоновано метод побудови розв'язків матричних лінійних поліноміальних рівнянь $X(\lambda)A(\lambda)+B(\lambda)Y(\lambda)=C(\lambda)$. Вказано розв'язки мінімальних степенів цих рівнянь та критерій однозначності таких розв'язків.

1 Вступ

Нехай $P[\lambda]$ — кільце поліномів над полем P,

$$X(\lambda)A(\lambda)+B(\lambda)Y(\lambda)=C(\lambda) \tag{1}$$

— матричне лінійне поліноміальне рівняння Сильвестра, де $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ відомі, $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ — невідомі $n\times n$ матриці над $P[\lambda]$.

УДК: 512.643; MSC 2010: 15A21, 15A24

Ключові слова і фрази: матричне лінійне поліноміальне рівняння, розв'язок мінімального степеня, напіскалярна еквівалентність поліноміальних матриць

Лінійні матричні поліноміальні рівняння, в тому числі матричні поліноміальні рівняння типу Сильвестра, знаходять застосування в багатьох задачах теорії керування, динамічних систем тощо [1, 2, 3, 4, 5, 6].

У випадку, коли матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ регулярні або хоча б одна з них регулярна чи регуляризується у працях [7, 8, 9, 10] вказано умови існування та однозначності так званих "мінімальних" розв'язків рівняння (1), тобто розв'язків $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ таких, що $\deg X(\lambda) < \deg B(\lambda)$ та $\deg Y(\lambda) < \deg A(\lambda)$. Якщо у рівнянні (1) обидві матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ нерегулярні і рівняння (1) розв'язне, то це рівняння може і не мати розв'язків $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ таких, що $\deg X(\lambda) < \deg B(\lambda)$ чи $\deg Y(\lambda) < \deg A(\lambda)$.

У цій статті запропоновано метод побудови розв'язків матричних поліноміальних рівнянь вигляду (1). У випадку, коли $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ — довільні неособливі поліноміальні матриці вказані розв'язки мінімальних степенів матричних поліноміальних рівнянь (1) та встановлені умови однозначності таких розв'язків. При цьому використані трикутні форми з інваріантними множниками на головних діагоналях до яких зводиться набір поліноміальних матриць напівскалярно еквівалентними перетвореннями [11].

2 Допоміжні твердження

Надалі будемо позначати через $M(n, P)$ та $M(n, P[\lambda])$ — кільця $n \times n$-матриць над полем P та кільцем поліномів $P[\lambda]$ відповідно, а через $D^B(\lambda)$ — канонічну діагональну форму матриці $B(\lambda)$, тобто

$$D^B(\lambda) = U(\lambda)B(\lambda)V(\lambda) = \mathrm{diag}(\mu_1^B(\lambda), \ldots, \mu_n^B(\lambda)), \quad \mu_i^B(\lambda) \mid \mu_{i+1}^B(\lambda),$$

$i = 1, \ldots, n-1$, для деяких матриць $U(\lambda), V(\lambda) \in GL(n, P[\lambda])$, $\mu_i^B(\lambda)$, $i = 1, \ldots, n$ — інваріантні множники матриці $B(\lambda)$.

Означення 2.1. [12] *Матриці $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ із $M(n, P[\lambda])$ називають напівскалярно еквівалентними, якщо існують такі матриці $Q \in GL(n, P)$ і $R^B(\lambda) \in GL(n, P[\lambda])$, що $A(\lambda) = QB(\lambda)R^B(\lambda)$.*

У праці [12] встановлено, що квадратна неособлива або прямокутна повного рангу поліноміальна матриця $A(\lambda)$ над алгебраїчно замкненим полем характеристики нуль напівскалярно еквівалентна до трикутної матриці $T^A(\lambda)$ з інваріантними множниками на головній діагоналі. Цей же результат узагальнено для скінченного набору поліноміальних матриць. У праці [11] доведено, що аналогічні результати справедливі для поліноміальних матриць над довільним полем P. Зокрема, у випадку, коли поле P скінченне, встановлено умови, за яких поліноміальна матриця та скінченний набір поліноміальних матриць напівскалярно еквівалентні до таких трикутних форм. Зауважимо, що аналогічна форма для поліноміальної матриці над нескінченним полем відносно напівскалярної еквівалентності набагато пізніше встановлена в [13].

У праці [2] наведено спосіб розв'язування діофантових поліноміальних рівнянь. На основі цих результатів можемо сформулювати наступне твердження.

Лема 2.1. *Нехай*

$$a(\lambda)x(\lambda) + b(\lambda)y(\lambda) = c(\lambda) \tag{2}$$

— діофантове поліноміальне рівняння, де $a(\lambda), b(\lambda), c(\lambda) \in P[\lambda]$, $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ *— невідомі поліноми з* $P[\lambda]$, P *— поле. Тоді*

1) *рівняння* (2) *розв'язне в тому і тільки тому випадку, коли* $(a(\lambda), b(\lambda)) \mid c(\lambda)$ *(ділить);*

2) *якщо рівняння* (2) *розв'язне, то воно має розв'язки* $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ *такі, що* $\deg x(\lambda) < \deg b(\lambda)$;

3) *розв'язок* $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ *рівняння* (2) *такий, що* $\deg x(\lambda) < \deg b(\lambda)$, *є єдиним тоді і тільки тоді, коли* $(a(\lambda), b(\lambda)) = 1$.

В. Рот [14] встановив критерій розв'язності матричного рівняння типу Сильвестра, коли коефіцієнти A, B і C цього рівняння є матрицями над полем P або над кільцем поліномів $P[\lambda]$.

Теорема 2.1. [14] *Матричне рівняння* (1), *в якому* $A(\lambda)$, $B(\lambda)$, $C(\lambda)$ *— відомі,* $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ *— невідомі матриці над кільцем* $P[\lambda]$, *розв'язне тоді і тільки тоді, коли матриці*

$$M(\lambda) = \begin{Vmatrix} A(\lambda) & 0 \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{Vmatrix} \quad i \quad N(\lambda) = \begin{Vmatrix} A(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{Vmatrix}$$

еквівалентні.

3 Розв'язки мінімальних степенів матричного поліноміального рівняння $X(\lambda)A(\lambda)+B(\lambda)Y(\lambda)=C(\lambda)$

Розглядатимемо далі матричне рівняння (1), в якому $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ — неособливі матриці із $M(n,P[\lambda])$.

Нехай $T^A(\lambda)$, $T^B(\lambda)$ — трикутні форми матриць $A(\lambda)$ і $B(\lambda)$ стосовно напівскалярної еквівалентності [11], тобто для деяких матриць $Q\in GL(n,P)$ та $R^A(\lambda)$, $R^B(\lambda)\in GL(n,P[\lambda])$

$$T^A(\lambda)=QA(\lambda)R^A(\lambda)=$$
$$=\left\|\begin{array}{cccc} \mu_1^A(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\ \widetilde{a}_{21}(\lambda)\mu_1^A(\lambda) & \mu_2^A(\lambda) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \widetilde{a}_{n1}(\lambda)\mu_1^A(\lambda) & \widetilde{a}_{n2}(\lambda)\mu_2^A(\lambda) & \cdots & \mu_n^A(\lambda)\end{array}\right\|, \tag{3}$$

де

1) $\widetilde{a}_{qj}(\lambda)\equiv 0$, *якщо* $\mu_q^A(\lambda)=\mu_j^A(\lambda)$;

2) $\deg\widetilde{a}_{qj} < \deg\mu_q^A-\deg\mu_j^A$, *якщо* $\mu_q^A(\lambda)\neq\mu_j^A(\lambda)$, *і* $\widetilde{a}_{qj}(\lambda)\not\equiv 0$, $q,j=1,2,\ldots,n$, $q>j$.

$$T^B(\lambda)=QB(\lambda)R^B(\lambda)=$$
$$=\left\|\begin{array}{cccc} \mu_1^B(\lambda) & 0 & \cdots & 0\\ \widetilde{b}_{21}(\lambda)\mu_1^B(\lambda) & \mu_2^B(\lambda) & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \widetilde{b}_{n1}(\lambda)\mu_1^B(\lambda) & \widetilde{b}_{n2}(\lambda)\mu_2^B(\lambda) & \cdots & \mu_n^B(\lambda)\end{array}\right\|, \tag{4}$$

де

1) $\widetilde{b}_{qj}(\lambda)\equiv 0$, *якщо* $\mu_q^B(\lambda)=\mu_j^B(\lambda)$;

2) $\deg\widetilde{b}_{qj} < \deg\mu_q^B-\deg\mu_j^B$, *якщо* $\mu_q^B(\lambda)\neq\mu_j^B(\lambda)$, *і* $\widetilde{b}_{qj}(\lambda)\not\equiv 0$, $q,j=1,2,\ldots,n$, $q>j$.

Тоді з рівняння (1) отримуємо матричне рівняння

$$\widetilde{X}(\lambda)T^A(\lambda)+T^B(\lambda)\widetilde{Y}(\lambda)=\widetilde{C}(\lambda), \tag{5}$$

де

$\widetilde{X}(\lambda)=QX(\lambda)Q^{-1}$, $\widetilde{Y}(\lambda)=(R^B(\lambda))^{-1}Y(\lambda)R^A(\lambda)$, $\widetilde{C}(\lambda)=QC(\lambda)R^A(\lambda)$.

Лема 3.1. *Матричні рівняння* (1) *і* (5) *еквівалентні, тобто рівняння* (1) *розв'язне тоді і тільки тоді, коли розв'язне рівняння* (5) *та кожному розв'язку рівняння* (5) *відповідає розв'язок рівняння* (1), *і навпаки.*

Доведення. На основі теореми 2.1 рівняння (1) розв'язне тоді і тільки тоді, коли матриці

$$M(\lambda) = \begin{Vmatrix} A(\lambda) & 0 \\ C(\lambda) & B(\lambda) \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad N(\lambda) = \begin{Vmatrix} A(\lambda) & 0 \\ 0 & B(\lambda) \end{Vmatrix}$$

еквівалентні, а рівняння (5) розв'язне тоді і тільки тоді, коли матриці

$$\widetilde{M}(\lambda) = \begin{Vmatrix} T^A(\lambda) & 0 \\ \widetilde{C}(\lambda) & T^B(\lambda) \end{Vmatrix} \quad \text{і} \quad \widetilde{N}(\lambda) = \begin{Vmatrix} T^A(\lambda) & 0 \\ 0 & T^B(\lambda) \end{Vmatrix}$$

еквівалентні. Враховуючи співвідношення (3) і (4) одержимо, що матриці $\widetilde{M}(\lambda)$ і $\widetilde{N}(\lambda)$ еквівалентні відповідно до матриць $M(\lambda)$ і $N(\lambda)$. Тому, якщо матриці $M(\lambda)$ та $N(\lambda)$ еквівалентні, то еквівалентними є і матриці $\widetilde{M}(\lambda)$ та $\widetilde{N}(\lambda)$, і навпаки. Отже, із розв'язності рівняння (1) випливає розв'язність рівняння (5), і навпаки.

Крім того, кожному розв'язку

$$\widetilde{X}(\lambda), \quad \widetilde{Y}(\lambda) \tag{6}$$

рівняння (5), відповідає розв'язок

$$X(\lambda) = Q^{-1}\widetilde{X}(\lambda)Q, \quad Y(\lambda) = R^B(\lambda)\widetilde{Y}(\lambda)(R^A(\lambda))^{-1} \tag{7}$$

рівняння (1), і навпаки. Лему доведено. □

Таким чином, опис розв'язків рівняння (1) зводиться до опису розв'язків рівняння (5).

Теорема 3.1. *Нехай матричне рівняння* (5) *розв'язне. Тоді це рівняння має розв'язки* $\widetilde{X}_0(\lambda) = \|\widetilde{x}_{ij}^{(0)}(\lambda)\|_1^n$, $\widetilde{Y}_0(\lambda) = \|\widetilde{y}_{ij}^{(0)}(\lambda)\|_1^n$ *такі, що* $\deg x_{ij}^{(0)}(\lambda) < \deg \mu_i^B(\lambda) - \deg(\mu_j^A(\lambda), \mu_i^B(\lambda))$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Доведення. З матричного рівняння (5) отримуємо систему лінійних поліноміальних рівнянь

$$\sum_{k=j}^{n} \mu_j^A(\lambda)\widetilde{a}_{kj}(\lambda)\widetilde{x}_{ik}(\lambda) + \sum_{l=1}^{i} \mu_l^B(\lambda)\widetilde{b}_{il}(\lambda)\widetilde{y}_{lj}(\lambda) = \widetilde{c}_{ij}(\lambda),\ i, j = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

де $a_{kj} = 1$, якщо $k = j$, $b_{il} = 1$, якщо $l = i$, $i, j = 1, \ldots, n$, і $\widetilde{C}(\lambda) = \|\widetilde{c}_{ij}(\lambda)\|_1^n$ — матриця із рівняння (5).

Зрозуміло, що матричне рівняння (5) має розв'язки тоді і тільки тоді, коли має розв'язки система поліноміальних рівнянь (8).

Розв'язування цієї системи зводиться до послідовного розв'язування діофантових лінійних поліноміальних рівнянь вигляду

$$\mu_j^A(\lambda)\widetilde{x}_{ij}(\lambda) + \mu_i^B(\lambda)\widetilde{y}_{ij}(\lambda) = \widetilde{c}_{ij}(\lambda), \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Далі доведення одержуємо, використавши лему 2.1. □

Наслідок 3.1. *Якщо рівняння* (5) *розв'язне, то воно має розв'язки* $\widetilde{X}(\lambda)$, $\widetilde{Y}(\lambda)$ *такі, що* $\deg \widetilde{X}(\lambda) < \deg D^B(\lambda) - \deg(D^A(\lambda), D^B(\lambda))$.

Теорема 3.2. *Матричне рівняння* (5) *має єдиний розв'язок* $\widetilde{X}_0(\lambda)$, $\widetilde{Y}_0(\lambda)$ *такий, що*

$$\deg \widetilde{x}_{ij}^{(0)}(\lambda) < \deg \mu_i^B(\lambda), \quad i, j = 1, \ldots, n, \tag{10}$$

тоді і тільки тоді, коли $(\det T^A(\lambda), \det T^B(\lambda)) = 1$.

Доведення. Зрозуміло, що рівняння (5) має єдиний розв'язок $\widetilde{X}_0(\lambda)$, $\widetilde{Y}_0(\lambda)$ з умовою (10) тоді і тільки тоді, коли кожне рівняння вигляду (9) має єдиний розв'язок $\widetilde{x}_{ij}^{(0)}(\lambda)$, $\widetilde{y}_{ij}^{(0)}(\lambda)$ з цією умовою. За лемою 2.1 такий розв'язок рівняння (9) єдиний тоді і тільки тоді, коли $(\mu_i^A(\lambda), \mu_j^B(\lambda)) = 1$, $i, j = 1, \ldots, n$. Ця умова справджується тоді і тільки тоді, коли $(\det T^A(\lambda), \det T^B(\lambda)) = 1$. Теорему доведено. □

Теорема 3.3. *Нехай матричне рівняння* (1) *розв'язне. Тоді рівняння* (1) *має розв'язки* $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ *такі, що*

$$\deg X(\lambda) < \deg D^B(\lambda) - \deg(D^A(\lambda), D^B(\lambda)).$$

Доведення. Твердження теореми випливає із наслідку 3.1 і співвідношень (6) та (7) між розв'язками рівнянь (5) та (1). □

Наслідок 3.2. *Матричне рівняння* (1)*, в якому визначники матриць* $A(\lambda)$ *і* $B(\lambda)$ *взаємно прості, має розв'язки* $X(\lambda)$, $Y(\lambda)$ *такі, що* $\deg X(\lambda) < \deg D^B(\lambda)$.

Зауважимо, що аналогічні результати можна одержати і для матричних поліноміальних рівнянь вигляду $A(\lambda)X(\lambda) + Y(\lambda)B(\lambda) = C(\lambda)$. Дійсно, таке матричне поліноміальне рівняння за допомогою транспонування матриць можна звести до рівняння (1).

[1] *Kaczorek T.* Polynomial and Rational Matrices. Applications in Dynamical Systems Theory. — Communications and Control Engineering Series. UK, London: Springer, 2007. — 503 p.

[2] *Kuĉera V.* Alqebraic theory of discrete optimal control for sinqle-variable systems. I. Preliminaries // Kybernetika. — 1973. — **9**, №2. — P. 94–107.

[3] *Kuĉera V.* Alqebraic theory of discrete optimal control for multivariable systems [I.] // Kybernetika. — 1974. — **10**, №1. — P. 3–56.

[4] *Wolovich W.A., Antsaklis P.J.* The canonical Diophantine equations with applications // SIAM J. Control and Optimization. — 1984. — **22**, №5. — P. 777–787.

[5] *Tzekis P.A.* A new algorithm for the solution of a polynomial matrix Diophantine equation // Appl. Math. and Comput. — 2007. — **193**. — P. 395–407.

[6] *Zhou B., Yan Z.B., Duan G.R.* Unified Parametrization for the Solutions to the Polynomial Diophantine Matrix Equation and the Generalized Sylvester Matrix Equation // Int. J. Control, Automation and Systems. — 2010. — **8**, №1. — P. 29–35.

[7] *Barnett S.* Regular polynomial matrices having relatively prime determinants // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1969. — **65**, №3. — P. 585–590.

[8] *Feinstein J. and Bar-Ness J.* On the uniqueness of the minimal solution the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda)+Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$ // J. Franklin Inst. — 1980. — **310**, №2. — P. 131–134.

[9] *Петричкович В.М.* Клеточно-треугольная и клеточно-диагональная факторизации клеточно-треугольных и клеточно-диагональных многочленных матриц // Мат. заметки. — 1985. — **37**, Вып.6. — С. 789–796.

[10] *Prokip V. M.* About the uniqueness solution of the matrix polynomial equation $A(\lambda)X(\lambda)-Y(\lambda)B(\lambda)=C(\lambda)$ // Lobachevskii J. Math. — 2008. — **29**, №3. — P. 186–191.

[11] *Петричкович В. М.* О полускалярной эквивалентности и нормальной форме Смита многочленных матриц // Мат. методы и физ.-мех. поля. — 1987. — **26**. — С. 13–16.

[12] *Казімірський П. С., Петричкович В. М.* Про еквівалентність поліноміальних матриць // Теорет. та прикл. питання алгебри і диференц. рівнянь. — К.: Наукова Думка, 1977. — С. 61–66.

[13] *Dias da Silva J.A., Laffey T.J.* On simultaneous similarity of matrices and related guestions // Linear Algebra and Appl. — 1999. — **291**. — P. 167–184.

[14] *Roth W.E.* The equations $AX - YB = C$ and $AX - XB = C$ in matrices // Proc. Amer. Math. Soc. — 1952. — №3. — P. 392–396.

THE SEMISCALAR EQUIVALENCE OF POLYNOMIAL MATRICES AND THE SOLUTION OF THE SYLVESTER MATRIX POLYNOMIAL EQUATIONS

Nataliia DZHALIUK, Vasyl' PETRYCHKOVYCH

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics, Ukrainian National Academy of Sciences, 3b Naukova Str., Lviv 79060, Ukraine

e-mail: *nataliya.dzhalyuk@gmail.com, vas_petrych@yahoo.com*

The method of solving matrix linear polynomial equations $X(\lambda)A(\lambda)+B(\lambda)Y(\lambda)=C(\lambda)$ is proposed. This method is based on the using of triangular form of finite collections of matrices with respect to semiscalar equivalence. The minimal degree solutions of these equations and the criterion of uniqueness of such solutions are established.