Математичний Вісник
Наукового товариства
імені Шевченка
2013. — Т.10

Mathematical Bulletin
of the Shevchenko
Scientific Society
2013. — V.10

КОМПАКТНІ ПІДПРОСТОРИ ДОБУТКІВ ЛІНІЙНО ВПОРЯДКОВАНИХ ПРОСТОРІВ І КОНАМІОКОВІ ПРОСТОРИ

Володимир Михайлюк

Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, Чернівці, Україна

В. Михайлюк. *Компактні підпростори добутків лінійно впорядкованих просторів і конаміокові простори* // Мат. вісник НТШ. — 2013. — Т.10. — С. 159–162.

Доведено, що для довільного берівського простору X, лінійно впорядкованих просторів $Y_1, \dots, Y_n$, компактного простору $Y \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_n$ такого, що для довільного паралелепіпеда $W \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_n$ множина $Y \cap W$ зв'язна, і нарізно неперервного відображення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ існує щільна в X G_δ-множина $A \subseteq X$ така, що функція f неперервна за сукупністю змінних в кожній точці множини $A \times Y$.

V. Mykhaylyuk, *Compact subspaces of products of linearly ordered spaces and co-Namioka spaces*, Math. Bull. Shevchenko Sci. Soc. **10** (2013), 159–162.

It is shown that for any Baire space X, linearly ordered compact spaces $Y_1, \dots, Y_n$, compact space $Y \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_n$ such that for every parallelepiped $W \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_n$ the set $Y \cap W$ is connected, and separately continuous mapping $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ there exists a dense in X G_δ-set $A \subseteq X$ such that f is jointly continuous at every point of $A \times Y$.

Вступ

Вивчення множини точок сукупної неперервності нарізно неперервних функцій беруть свій початок з класичної праці Р.Бера [1], який розглядав функції двох дійсних змінних. Новим поштовхом до інтенсифікації даних досліджень став результат І.Наміоки [7], який привів, зокрема, до виникнення наступних понять, які були введені в [5].

Нехай X, Y – топологічні простори. Кажуть, що нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ *має властивість Наміоки*, якщо існує щільна в X G_δ-множина $A \subseteq X$ така, що f неперервна за сукупністю змінних в кожній точці множини $A \times Y$. Компактний простір

2010 *Mathematics Subject Classification:* 54C08, 54C05, 54D30 *УДК:* 517.51
Ключові слова і фрази: нарізно неперервне відображення, компактний простір, лінійно впорядкований простір, конаміоковий простір
E-mail: vmykhaylyuk@ukr.net

Y називається *конаміоковим*, якщо для довільного берівського простору X кожне нарізно неперервне відображення $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ має властивість Наміоки.

Досить загальні результати у напрямку вивчення властивостей конаміокових просторів були одержані в [2, 3], де встановлено, що клас компактних конаміокових просторів замкнений відносно добутку і містить компакти Валдівіа. Крім того, в [2] показано, що лінійно впорядкований компакт $[0,1] \times \{0,1\}$ з лексикографічним порядком також є конаміоковим і передоведено результат з [6] про конаміоковість довільного цілком впорядкованого компакту. В [9] було узагальнено ці результати і показано, що довільний лінійно впорядкований компакт є конаміоковим простором.

Разом з тим, приклад М. Талаграна [8] компактного простору, який не є конаміоковим, вказує на те, що замкнений підпростір конаміокового компакту може не бути конаміоковим. Тому природно виникає питання: чи обов'язково компактний підпростір Y скінченного добутку $Y_1 \times \cdots \times Y_n$ лінійно впорядкованих компактів Y_k є конаміоковим?

В даній замітці ми, розвиваючи підхід з [9], покажемо, що при деяких додаткових умовах (типу зв'язності) на простір Y відповідь на дане питання є позитивною.

1. Неперервні відображення на компактних підпросторах добутків лінійно впорядкованих просторів

Для функції $f : X \times Y \to Z$ і точки $(x, y) \in X \times Y$ позначимо $f^x(y) = f_y(x) = f(x, y)$. Для лінійно впорядкованого простору X і точок $a, b \in X$ з $a \leq b$ через $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ і (a, b) ми позначатимемо відповідні проміжки.

Нехай X – топологічний простір. Для відображення $f : X \to \mathbb{R}$ і множини $A \subseteq X$ через $\omega_f(A)$ ми позначатимемо коливання $\sup_{x,y \in A} |f(x) - f(y)|$ функції f на множині A, а для точки $x_0 \in X$ через $\omega_f(x_0)$ ми позначатимемо коливання $\inf_{U \in \mathcal{U}} \omega_f(U)$ функції f у точці x_0, де $\mathcal{U}$ – це система всіх околів точки x_0 в просторі X.

Твердження 1. *Нехай $X_1, \ldots, X_n$ – лінійно впорядковані простори, $X \subseteq X_1 \times \cdots \times X_n$ – компактний простір, $\varepsilon > 0$ і $f : X \to \mathbb{R}$ – неперервне відображення. Тоді існує номер $m \in \mathbb{N}$ такий, що для довільного набору $W_1, \ldots, W_m$ паралелепіпедів*

$$W_k = [a_1^{(k)}, b_1^{(k)}] \times \cdots \times [a_n^{(k)}, b_n^{(k)}]$$

таких, що $(a_i^{(k)}, b_i^{(k)}) \cap (a_i^{(j)}, b_i^{(j)}) = \varnothing$ для довільних $i \in \{1, \ldots n\}$ та різних $j, k \in \{1, \ldots, m\}$, існує $k_0 \in \{1, \ldots m\}$ таке, що $\omega_f(W_{k_0} \cap X) \leq \varepsilon$.

Доведення. Без обмеження загальності ми можемо вважати, що $X_1, \ldots, X_n$ – компакти. Нехай $g : X_1 \times \cdots \times X_n \to \mathbb{R}$ – неперервне продовження відображення f. Виберемо такі скінченні покриття $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ просторів $X_1, \ldots, X_n$ відкритими проміжками, що $\omega_g(\overline{U}_1 \times \cdots \times \overline{U}_n) \leq \varepsilon$ для довільних $U_1 \in \mathcal{U}_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U}_n$. Для кожного $i \in \{1, \ldots, n\}$ позначимо через A_i множину всіх кінцевих точок проміжків $U \in \mathcal{U}_i$ і покладемо $m = |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| + 1$. Покажемо, що m – шукане.

Нехай $W_1, \ldots, W_m$ – набір паралелепіпедів $W_k = [a_1^{(k)}, b_1^{(k)}] \times \cdots \times [a_n^{(k)}, b_n^{(k)}]$ таких, що $(a_i^{(k)}, b_i^{(k)}) \cap (a_i^{(j)}, b_i^{(j)}) = \varnothing$ для довільних $i \in \{1, \ldots, n\}$ та різних $j, k \in \{1, \ldots, m\}$. Припустимо, що $\omega_f(W_k \cap X) > \varepsilon$ для кожного $k \in \{1, \ldots m\}$. Тоді $W_k \not\subseteq \overline{U}_1 \times \cdots \times \overline{U}_n$ для кожного

$k \in \{1, \dots m\}$ і довільних $U_1 \in \mathcal{U}_1, \dots, U_n \in \mathcal{U}_n$. Тому для кожного $k \in \{1, \dots m\}$ існують $i \in \{1, \dots n\}$ та $a \in A_i$ такі, що $a \in (a_i^{(k)}, b_i^{(k)})$. Оскільки $m > |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|$, то існують $i \in \{1, \dots, n\}$, $a \in A_i$ та різні $j, k \in \{1, \dots, m\}$ такі, що $a \in (a_i^{(k)}, b_i^{(k)}) \cap (a_i^{(j)}, b_i^{(j)})$, що неможливо. □

2. Основний результат

Теорема 1. *Нехай $Y_1, \dots, Y_n$ – лінійно впорядковані простори, $Y \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_n$ – такий компактний простір, що для довільного (можливо виродженого) паралелепіпеда $W = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_n$ множина $Y \cap W$ зв'язна. Тоді Y конаміоковий.*

Доведення. Нехай X – берівський простір і $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ – нарізно неперервна функція. Доведемо, що відображення f має властивість Наміоки. Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і покажемо, що відкрита множина $G_\varepsilon = \{x \in X : \omega_f(x, y) < \varepsilon$ для кожного $y \in Y\}$ є щільною в X.

Нехай U – довільна непорожня відкрита в X множина. Покажемо, що існує відкрита непорожня множина $U_0 \subseteq U \cap G_\varepsilon$. Для кожного $x \in U$ позначимо через $M(x)$ множину таких номерів $m \in \mathbb{N}$, для яких існують набори $W_1, \dots, W_m$ паралелепіпедів $W_k = [a_1^{(k)}, b_1^{(k)}] \times \dots \times [a_n^{(k)}, b_n^{(k)}]$ таких, що $(a_i^{(k)}, b_i^{(k)}) \cap (a_i^{(j)}, b_i^{(j)}) = \varnothing$ для довільних $i \in \{1, \dots, n\}$ та різних $j, k \in \{1, \dots, m\}$ і $\omega_{f^x}(W_k \cap Y) > \frac{\varepsilon}{6(n+1)}$ для кожного $k \in \{1, \dots, m\}$. Згідно з твердженням 1 всі множини $M(x)$ обмежені зверху. Для кожного $x \in U$ покладемо $\varphi(x) = \max M(x)$, якщо $M(x) \neq \varnothing$, і $\varphi(x) = 0$, якщо $M(x) = \varnothing$.

З неперервності функції f відносно першої змінної випливає, що для довільного паралелепіпеда $W \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_n$ множина $\{x \in X : \omega_{f^x}(W \cap Y) > \frac{\varepsilon}{6(n+1)}\}$ відкрита в X. Тому для кожного невід'ємного $m \in \mathbb{Z}$ множина $\{x \in U : \varphi(x) > m\}$ відкрита в U, тобто функція $\varphi : U \to \mathbb{Z}$ є напівнеперервною знизу на берівському просторі U. Згідно з [4], функція φ є точково розривною, тобто неперервною в кожній точці деякої щільної в U множини. Тому існують відкрита в U непорожня множина U_1 і невід'ємне ціле число $m \in \mathbb{Z}$ такі, що $\varphi(x) = m$ для кожного $x \in U_1$.

Якщо $m = 0$, то $|f(x, a) - f(x, b)| \leq \frac{\varepsilon}{6(n+1)} < \frac{\varepsilon}{3}$ для довільних $x \in U_1$ і $a, b \in Y$. Тоді, взявши довільну точку $y_0 \in Y$ і відкриту непорожню множину $U_0 \subseteq U_1$ таку, що $\omega_{f_{y_0}}(U_0) < \frac{\varepsilon}{3}$, одержимо, що $\omega_f(U_0 \times Y) < \varepsilon$. Зокрема, $U_0 \subseteq G_\varepsilon$.

Тепер розглянемо випадок, коли $m \in \mathbb{N}$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in U_1$ і виберемо набір $W_1, \dots, W_m$ паралелепіпедів $W_k = [a_1^{(k)}, b_1^{(k)}] \times \dots \times [a_n^{(k)}, b_n^{(k)}]$ таких, що $(a_i^{(k)}, b_i^{(k)}) \cap (a_i^{(j)}, b_i^{(j)}) = \varnothing$ для довільних $i \in \{1, \dots, n\}$ та різних $j, k \in \{1, \dots, m\}$ і $\omega_{f^{x_0}}(W_k \cap Y) > \frac{\varepsilon}{6(n+1)}$ для кожного $k \in \{1, \dots, m\}$. Використовуючи неперервність функції f відносно першої змінної, виберемо відкритий окіл $U_0 \subseteq U_1$ точки x_0 в U такий, що $\omega_{f^x}(W_k \cap Y) > \frac{\varepsilon}{6(n+1)}$ для довільних $k \in \{1, \dots, m\}$ і $x \in U_0$.

Далі без обмеження загальності ми можемо вважати, що $Y_1, \dots, Y_n$ – компакти, тобто $Y_1 = [a_1, b_1], \dots, Y_n = [a_n, b_n]$. Для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$ покладемо $A_i = \{a_i^{(k)}, b_i^{(k)} : 1 \leq k \leq m\} \cup \{a_i, b_i\}$ і позначимо через $\mathcal{V}_i$ множину всіх таких непорожніх проміжків $[a, b] \subseteq Y_i$, що $a, b \in A_i$. Крім того, покладемо $\mathcal{W} = \mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_n$. Покажемо, що $\omega_{f^x}(W \cap Y) \leq \frac{\varepsilon}{6}$ для всіх $x \in U_0$ і $W \in \mathcal{W}$.

Припустимо, що $\omega_{f^x}(W \cap Y) > \frac{\varepsilon}{6}$ для деяких $x \in U_0$ і $W = [c_1, d_1] \times \dots \times [c_n, d_n] \in \mathcal{W}$. Виберемо такі точки $z_0 = (z_1^{(0)}, \dots, z_n^{(0)}), z_{n+1} = (z_1^{(n+1)}, \dots, z_n^{(n+1)}) \in W \cap Y$, що

$|f(x, z_0) - f(x, z_{n+1})| = q > \frac{\varepsilon}{6}$. Для певності вважатимемо, що $z_1^{(0)} \le z_1^{(n+1)}, \dots, z_n^{(0)} \le z_n^{(n+1)}$. Використовуючи неперервність функції f^x і те, що для довільного паралелепіпеда $V \subseteq Y_1 \times \dots \times Y_n$ множина $V \cap Y$ зв'язна, виберемо точки $z_1 = (z_1^{(1)}, \dots, z_n^{(1)}), \dots, z_n = (z_1^{(n)}, \dots, z_n^{(n)}) \in W \cap Y$ такі, що $z_i^{(0)} \le z_i^{(1)} \le z_i^{(2)} \le \dots \le z_i^{(n)} \le z_i^{(n+1)}$ для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$ і $|f(x, z_{k-1}) - f(x, z_k)| = \frac{q}{n+1}$ для кожного $k \in \{1, \dots, n+1\}$. Тепер для довільних $i \in \{1, \dots, n\}$ і $k \in \{1, \dots, n+1\}$ покладемо $c_i^{(k)} = z_i^{(k-1)}$, $d_i^{(k)} = z_i^{(k)}$ і $V_k = [c_1^{(k)}, d_1^{(k)}] \times \dots \times [c_n^{(k)}, d_n^{(k)}]$. Зауважимо, що $(c_i^{(k)}, d_i^{(k)}) \cap (c_i^{(j)}, d_i^{(j)}) = \varnothing$ для довільних $i \in \{1, \dots, n\}$ та різних $j, k \in \{1, \dots, n+1\}$ і $\omega_{f^x}(V_k \cap Y) \ge \frac{q}{n+1} > \frac{\varepsilon}{6(n+1)}$ для кожного $k \in \{1, \dots, n+1\}$.

Оскільки для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$ множина $\{k \le m : (a_i^{(k)}, b_i^{(k)}) \cap (c_i, d_i) \ne \varnothing\}$ містить щонайбільше один елемент, то множина $N = \bigcap_{i=1}^n \{k \le m : (a_i^{(k)}, b_i^{(k)}) \cap (c_i, d_i) = \varnothing\}$ має потужність $|N| \ge m - n$. Тому система $\mathcal{P} = \{W_k : k \in N\} \cup \{V_j : 1 \le j \le n+1\}$ містить принаймні $m+1$ паралелепіпед. При цьому $\omega_{f^x}(P \cap Y) > \frac{\varepsilon}{6(n+1)}$ для кожного $P \in \mathcal{P}$ і $(t_i, u_i) \cap (v_i, w_i) = \varnothing$ для кожного $i \in \{1, \dots, n\}$, де $[t_1, u_1] \times \dots \times [t_n, u_n]$, $[v_1, w_1] \times \dots \times [v_n, w_n]$ – різні паралелепіпеди з $\mathcal{P}$. А це суперечить тому, що $\varphi(x) = m$. Отже, $\omega_{f^x}(W \cap Y) \le \frac{\varepsilon}{6}$ для всіх $x \in U_0$ і $W \in \mathcal{W}$.

Зафіксуємо $y \in Y$ і $x \in U_0$. Покладемо $\mathcal{W}_y = \{W \in \mathcal{W} : y \in W\}$ і $V_y = \bigcup_{W \in \mathcal{W}_y} (W \cap Y)$. Зрозуміло, що V_y – окіл точки y в просторі Y. Оскільки $\omega_{f^x}(W \cap Y) \le \frac{\varepsilon}{6}$ для кожного $W \in \mathcal{W}_y$ і $y \in \bigcap_{W \in \mathcal{W}_y} (W \cap Y)$, то $\omega_{f^x}(V_y) \le \frac{\varepsilon}{3}$. Тепер, використовуючи неперервність функції f відносно першої змінної в точці (x, y), виберемо такий окіл $\tilde{U}$ точки x в X, що $\omega_{f_y}(\tilde{U}) < \frac{\varepsilon}{3}$. Тоді $\omega_f(\tilde{U} \times V_y) < \varepsilon$, зокрема, $\omega_f(x, y) < \varepsilon$ для довільних $y \in Y$ і $x \in U_0$. Отже, $U_0 \subseteq G_\varepsilon$.

□

ЛІТЕРАТУРА

1. R. Baire, *Sur les fonctions de variables réelles*, Ann. Mat. Pura Appl., **3**:1 (1899), 1–123.
2. A. Bouziad, *Notes sur la propriété de Namioka*, Trans. Amer. Math. Soc. **344**:2 (1994), 873–883.
3. A. Bouziad, *The class of co-Namioka spaces is stable under product*, Proc. Amer. Math. Soc. **124**:3 (1996), 983–986.
4. J. Calbrix, J.P. Troallic, *Applications séparément continues*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A. **288** (1979), 647–648.
5. G. Debs, *Points de continuité d'une fonction séparément continue*, Proc. Amer. Math. Soc. **97**:1 (1986), 167–176.
6. R. Deville, *Convergence ponctuelle et uniforme sur un espace compact*, Bull. Polish. Acad. Sci. Math. **37** (1989), 507–515.
7. I. Namioka, *Separate continuity and joint continuity*, Pacific. J. Math. **51**:2 (1974), 515–531.
8. M. Talagrand, *Espaces de Baire et espaces de Namioka*, Math. Ann. **270**:2 (1985), 159–164.
9. В.В. Михайлюк, *Лінійно впорядковані компакти і конаміокові простори*, Укр. мат. журн. **59**:7 (2007), 1001–1004.

Надійшло 10.08.2013